

16. Організація наближеного рішення інтегральних рівнянь в МП MathCAD

Ольга Сєдих

Національний університет харчових технологій

Вступ. До інтегральних рівнянь приводять багато задач, що виникають в математиці і математичній фізиці. Інтегральні рівняння широко використовуються в моделях, що розглядаються в теорії пружності, газовій динаміці, електродинаміці, екології та інших областях фізики. В даній роботі пропонується реалізація в МП MathCAD квадратурних алгоритмів розв'язання лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду.

Матеріали і методи. Інтегральне рівняння Фредгольма II роду має вигляд:

$$x(t) = \lambda \int_a^b Q(t,s)x(s)ds + f(t) \quad (1)$$

де $x(t)$ – рішення рівняння; $f(t)$ – відома функція; $Q(t,s)$ – ядро інтегрального рівняння.

В основі чисельних методів розв'язання інтегральних рівнянь лежить заміна інтеграла в рівнянні кінцевою сумою, використовуючи будь-яку квадратурну формулу. Визначений інтеграл (1) можна представити його наближеним значенням, що обчислюється за допомогою квадратурної формули:

$$\int_a^b \varphi(s)ds \approx \sum_j^n A_j \varphi(s_j) \quad (2)$$

де $j=1,2,\dots,n$ – номери вузлів тимчасової сітки; A_j – коефіцієнти квадратурної формули.

Підставивши праву частину (2) і враховуючи, що $\varphi(s)=Q(t,s)x(s)$, в рівняння (1), отримаємо:

$$x(t) \approx \lambda \sum_{j=1}^n A_j Q(t,s_j)x(s_j) + f(t) \quad (3)$$

Введемо на відрізку $[a,b]$ дискретну тимчасову сітку t_1, t_2, \dots, t_n , вузли якої співпадають з вузлами сітки s_1, s_2, \dots, s_n . Для кожного моменту часу t_i виконується рівність

$$x(t_i) \approx \lambda \sum_{j=1}^n A_j Q(t_i, s_j)x(s_j) + f(t_i) \quad (4)$$

Введемо позначення $Q_{ij}=Q(t_i, s_j)$, $f_i=f(t_i)$, $x_i=x(t_i)$ і запишемо (4) у вигляді системи n лінійних алгебраїчних рівнянь n з невідомими:

$$\begin{cases} (1 - \lambda A_1 Q_{1,1})x_1 - \lambda A_2 Q_{1,2}x_2 - \dots - \lambda A_n Q_{1,n}x_n = f_1 \\ -\lambda A_1 Q_{2,1}x_1 + (1 - \lambda A_2 Q_{2,2})x_2 - \dots - \lambda A_n Q_{2,n}x_n = f_2 \\ \dots \\ -\lambda A_1 Q_{n,1}x_1 - \lambda A_2 Q_{n,2}x_2 - \dots + (1 - \lambda A_n Q_{n,n})x_n = f_n \end{cases} \quad (5)$$

для рішення якої можна використовувати будь-який метод розв'язку СЛАР.

Результати. Таким чином, знаходження рішення рівняння Фредгольма другого роду здійснюється за наступним алгоритмом: задається тимчасова сітка t_i ; обчислюються значення функції $f(t)$ у вузлах тимчасової сітки; обчислюються елементи матриці, яка містить коефіцієнти СЛАР; розв'язується СЛАР.