УДК 51-72

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЇ ГРАНИЦІ В'ЯЗКОГО ТІЛА МЕТОДОМ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

О.П. Зінькевич, кандидат фізико-математичних наук, доцент,

Національний університет харчових технологій

О.М. Нещадим, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України

В.М. Сафонов, кандидат фізико-математичних наук, доцент,

Національний університет харчових технологій

E-mail: oleksandr_neshchadym@mail.ru

Анотація. *У теорії потенціалу будуються інтегральні представлення розв'язку через довільні функції точок контуру області шляхом підстановки цих функцій у формули Гріна замість контурних значень рішень та їх частинних похідних. Умови на границі області призводять до так званих граничних інтегральних рівнянь* $[4]$. *У задачах руху в'язкої рідини виокремлюється практично важливий клас задач наперед невідомою (вільною границею), яка визначається в процесі самого розв'язання. Одним із можливих підходів до розв'язання даного класу задач гідродинаміки є метод гідродинамічних потенціалів, який переключає основні складності досліджень і числових розрахунків на деякі граничні інтегральні рівняння, які відносяться лише до границі області і враховують граничні умови безпосередньо. Дане перетворення надає можливість відразу визначити невідомі величини на границі, не обчислюючи їх у всій області. Це вигідно відрізняє метод граничних інтегральних рівнянь від інших методів (метод встановлення, кінцево-різницеві методи, тощо).*

У статті поставлена і розв'язана задача деформації в'язкого тіла під дією сил поверхневого натягу. Будуються граничні інтегральні рівняння, які розглядаються в сукупності з кінематичною контурною умовою. Запропоновано метод кроків за часом для чисельного аналізу деформації рідкого в'язкого тіла під дією сил поверхневого натягу.

Ключові слова: ***гідродинамічні потенціали, кінематична контурна умова, сили поверхневого натягу, інтегральне представлення, інтегральне рівняння.***

Актуальність. Рівняння Нав'є-Стокса мають ряд специфічних особливостей, які проявляються в чисельній реалізації незалежно про форми їх запису. В першу чергу це просторово-еліптичних характер рівнянь, обумовлений впливом в’язкості у всьому полі течії. Звідси - пояснення парадоксу, який полягає в тому, що знаходження розв’язку стаціонарної задачі часто виявляється складнішим нестаціонарної. Більш того, при чисельному аналізі стаціонарного руху рідини часто використовується метод встановлення, при якому стаціонарний рух є границею нестаціонарних течій при $t \to \infty$. Правда, при цьому необхідна впевненість в тому (не завжди очевидний факт), що нестаціонарне рух дійсно переходить в шукане стаціонарне [2].

Поряд з методом встановлення поширені також кінцево-різницеві методи. Але заміна похідних кінцевими різницями, без аналізу та врахуванням властивостей аналітичності рішення конкретного класу задач, не завжди дозволяє на основі чисельних розрахунків зробити якісний аналіз отриманих гідродинамічних величин [1].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Розв’язання крайових задач для рівнянь Нав'є-Стокса за допомогою гідродинамічних потенціалів вивчалися різними авторами [5,6]. Подальший розвиток метода гідродинамічних потенціалів отримано в роботах[3,4], при цьому істотно (на відміну від інших робіт) є те, що сінгулярності в граничних інтегральних рівняннях взаємно компенсуються. Це центральне місце теорії гідродинамічних потенціалів, побудованих на основі формул Гріна, залишило поза увагою інших авторів.

Мета дослідження. Методи розв’язання задач математичної фізики повинні бути різноманітними; необхідно виділяти раціональні класи задач і для кожного класу розробляти спеціальні методи, що поєднують кількісні оцінки з можливостями якісного аналізу.

Розробка методів розв’язання задач про рух в'язкої рідини становить проблему, яка цікавить як інженерів, так і математиків.

Матеріали і методика досліджень. У роботі [4] встановлено загальне інтегральне представлення розв’язку лінійованих рівнянь Нав’є-Стокса у випадку рухомих границь, і в плоскому випадку представлення для вектора швидкості є комбінацією гідродинамічних потенціалів подвійного і простого шару. Ядра потенціалів виражаються через елементарні функції, що дає можливість застосовувати теорію потенціалів до розв'язання прикладних задач.

Результати дослідження та їх обговорення. 1. *Постановка задачі деформації рідкого в'язкого тіла під дією сил поверхневого натягу*

Розглянемо в'язку, яка не піддається стисненню (рідке тіло), що заповнює в момент часу $t \leq 0$ область $D(0) \subset E_2$, обмеженої контуром $L(0)$ з координатами $x_1 = x_1(\sigma, 0)$, $x_2 = x_2(\sigma, 0)$, $0 \leq \sigma < a$. Кожному значенню параметра σ відповідає певна елементарна (нескінченно мала) частинка рідини, що знаходиться в момент часу $t = 0$ на кривій $L(0)$ в площині (x_1, x_2). Швидкості $\vec{v}$ частинок рідини при $t \leq 0$ вважаємо нульовими:

$$\vec{v}(\vec{y}, 0) = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \equiv 0, \;\; \vec{y} \in D(0).$$

Нехай починаючи з моменту часу $t = 0$ до границі рідини $L(0)$ прикладені нормальні сили напруги

$$\vec{p}_n(\vec{x}, t) = -\alpha \; \kappa(\sigma, t) \vec{n}(\sigma, t). \tag{1}$$

Масові сили в області D і дотичні напруги на контурі L вважаємо рівними нулю.

В крайовій умові (1) α – коефіцієнт поверхневого натягу;

$\kappa(\sigma, t)$ – кривизна кривої $L(t)$;

$\vec{x} = (x_1; x_2)$ – радіус-вектор точок контуру рідини;

$\vec{n}(\sigma, t)$ – зовнішня нормаль до $L(t)$.

Під дією сил поверхневого натягу частинки рідини приходять в рух, утворюючи рухливий контур $L(t)$, який описується рівняннями $x_k = x_k(\sigma, t)$, $k = 1, 2$.

Необхідно визначити границю $L(t)$ рідкого тіла, а також швидкість $\vec{v}(\vec{y},t)$ частинок рідкого тіла і гідродинамічний тиск $p(\vec{y},t)$, що задовольняють в $D(t)$ системі Нав'є-Стокса

$$\begin{cases} \mu\ \Delta\vec{v}(\vec{y},t)-\gamma\dfrac{\partial\vec{v}(\vec{y},t)}{\partial t}-\operatorname{grad} p(\vec{y},t)=0, \\ \operatorname{div}\vec{v}(\vec{y},t)=0. \end{cases} \tag{2}$$

Тут $\mu=\mathrm{const}>0$ і $\gamma=\mathrm{const}>0$ – відповідно в'язкість і густина рідини.

Функції $x_1=x_1(\sigma,t),\ x_2=x_2(\sigma,t)$ зв'язані з розв'язком системи (2) кінематичним співвідношенням

$$\vec{v}\left(\vec{x}(\sigma,t),t\right)=\frac{\partial\vec{x}(\sigma,t)}{\partial t}\equiv\vec{v}_0(\sigma,t), \tag{3}$$

де $\vec{v}(\vec{x},t)$ – вектор швидкості частинок рідини контуру $L(t)$;

$\vec{v}_0(\sigma,t)$ – вектор швидкості точок контуру $L(t)$;

$L(t)$ – вільний контур, і на ньому діють сили поверхневого натягу, які утримують на контурі одні і ті ж самі частинки рідини.

2. *Побудова граничних інтегральних рівнянь*

Уведемо позначення: $\vec{n}(\sigma,t)$ і $\vec{s}(\sigma,t)$ – зовнішня нормаль і дотичний вектор до контуру $L(t)$ в точці $\vec{x}(\sigma,t)$;

$\theta_1(\sigma,t)=\vec{v}_0(\sigma,t)\cdot\vec{n}(\sigma,t)$ і $\theta_2(\sigma,t)=\vec{v}_0(\sigma,t)\cdot\vec{s}(\sigma,t)$ – нормальна і дотична складові вектора швидкості точок контуру;

$\vec{x}(\sigma,\tau)$ і $\vec{x}(\sigma_0,t)$ – радіус-вектор змінної і фіксованої точок інтегрування відповідно, $r(\tau)=\left|\vec{x}(\sigma,\tau)-\vec{x}(\sigma_0,t)\right|$.

Спрямуємо в інтегральному представленні $\vec{y}\to\vec{x}(\sigma_0,t)$, $\vec{x}(\sigma_0,t)\in L$, $\vec{y}\in D$, і користуючись властивостями гідродинамічних потенціалів $[4]$ (з врахуванням (3)), зводимо задачу до розв'язання системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь

$$-\frac{1}{2}\theta_1(\sigma_0,t)+\int\limits_{L(t)}\theta_1(\sigma,t)\frac{\cos\omega_0(t)}{2\pi r(t)}ds+F_1(\sigma_0,t)=0,$$

$$-\frac{1}{2}\theta_2(\sigma_0,t)+\int\limits_{L(t)}\theta_1(\sigma,t)\frac{\sin\omega_0(t)}{2\pi r(t)}ds+F_2(\sigma_0,t)=0,$$

$$\frac{\partial x_1(\sigma,t)}{\partial t}=\theta_1(\sigma,t)n_1(\sigma,t)+\theta_2(\sigma,t)n_2(\sigma,t);\ \frac{\partial x_2}{\partial t}=-\theta_1 n_2+\theta_2 n_1,$$

при початкових умовах $\theta_1(\sigma,0)=\theta_2(\sigma,0)=0,\ \vec{x}(\sigma,0)=\vec{x}_0(\sigma).$

Тут

$$F_i(\sigma_0,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{L(\tau)}\left[\theta_2(\sigma,\tau)H_{i2}+\left(\theta_1(\sigma,\tau)-\frac{\alpha}{2\mu}\right)H_{i1}+\gamma\sum_{k=1}^{2}\theta_1(\sigma,\tau)\theta_k(\sigma,\tau)G_{ik}\right]ds,$$

$$H_{11}=A(\tau)\left[q_1(z(\tau))\cos(2\omega(\tau)+\omega_0(\tau))+q_2(z(\tau))\sin 2\omega(\tau)\sin\omega_0(\tau)\right],$$

$$H_{21}=A(\tau)\left[q_1(z(\tau))\sin(2\omega(\tau)+\omega_0(\tau))-q_2(z(\tau))\sin 2\omega(\tau)\cos\omega_0(\tau)\right],$$

$$H_{22}=-H_{11}+A(\tau)q_2(z(\tau))\cos(2\omega(\tau)+\omega_0(\tau)),$$
$$H_{12}=H_{21}+A(\tau)q_2(z(\tau))\sin(2\omega(\tau)-\omega_0(\tau));$$

$$G_{11}=B(\tau)\left[e^{-z(\tau)}\cos(\omega(\tau)-\omega_0(\tau))+q_2(z(\tau))\cos(\omega(\tau)+\omega_0(\tau))\right],$$

$$G_{21}=B(\tau)\left[q_1(z(\tau))\sin(\omega(\tau)+\omega_0(\tau))-e^{-z(\tau)}\sin(\omega(\tau)-\omega_0(\tau))\right],$$

$$G_{22}=-G_{11}+2B(\tau)e^{-z(\tau)}\cos(\omega(\tau)-\omega_0(\tau)),$$
$$G_{12}=G_{21}+2B(\tau)e^{-z(\tau)}\sin(\omega(\tau)-\omega_0(\tau));$$

$$A(\tau)=\frac{1}{2\pi r(\tau)(t-\tau)},\ B(\tau)=\frac{1}{8\pi\mu(t-\tau)},\ z(\tau)=\frac{\gamma\ r^2(\tau)}{2\pi\mu(t-\tau)};$$

$$q_1=z^{-1}-e^{-z}\left(1+z^{-1}\right),\ \ q_2=ze^{-z},\ \ r(\tau)=\left|\vec{r}(\tau)\right|,\ \ \vec{r}(\tau)=\vec{x}(\sigma,\tau)-\vec{x}(\sigma_0,t),$$

$$\omega_0(\tau)=\left(\vec{r}(\tau)\,\hat{,}\,\vec{n}(\sigma_0,\tau)\right),\ \omega(\tau)=\left(\vec{r}(\tau)\,\hat{,}\,\vec{n}(\sigma,\tau)\right),$$

$$\vec{s}=(s_1;s_2),\ \ s_i=\frac{\partial x_i}{\partial s}=\frac{\partial x_i}{\partial\sigma}\ \frac{d\sigma}{ds}\ \ (i=1,2),\quad \vec{n}=(n_1;n_2)=(s_2;-s_1).$$

Позначимо $\dfrac{\partial x_i}{\partial \sigma} = x_i'$ $(i = 1,2)$, тоді $ds = \sqrt{\left(x_1'(\sigma,\tau)\right)^2 + \left(x_2'(\sigma,\tau)\right)^2}\, d\sigma$,

$$s_1(\sigma,t) = \frac{x_1'(\sigma,t)}{\sqrt{\left(x_1'(\sigma,t)\right)^2 + \left(x_2'(\sigma,t)\right)^2}}, \quad s_2(\sigma,t) = \frac{x_2'(\sigma,t)}{\sqrt{\left(x_1'(\sigma,t)\right)^2 + \left(x_2'(\sigma,t)\right)^2}}. \qquad (4)$$

Якщо вектор нормалі і вектор дотичної розглядаються в фіксованій точці інтегрування, то необхідно в формулах (4) σ замінити на σ_0.

Використовуючи (4), а також $\vec{r} = \left(x_1(\sigma,t) - x_1(\sigma_0,t); x_2(\sigma,t) - x_2(\sigma_0,t)\right) = (r_1; r_2)$,

Маємо
$$\sin\omega_0(t) = \frac{\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(\sigma_0,t)}{\left|\vec{r}(t)\right|} = \frac{r_1\, x_1'(\sigma_0,t) - r_2\, x_2'(\sigma_0,t)}{\left(x_1'(\sigma_0,t)\right)^2 + \left(x_2'(\sigma_0,t)\right)^2},$$

$$\cos\omega_0(t) = \frac{\vec{r}(t)\cdot\vec{n}(\sigma_0,t)}{\left|\vec{r}(t)\right|} = \frac{r_1\, x_2'(\sigma_0,t) - r_2\, x_1'(\sigma_0,t)}{\left(x_1'(\sigma_0,t)\right)^2 + \left(x_2'(\sigma_0,t)\right)^2}.$$

Формули обчислення $\sin\omega(t)$ і $\cos\omega(t)$ мають аналогічний вигляд, тільки необхідно аргумент в x_i' замінити: σ_0 на σ.

3. *Алгоритм розв'язання задачі деформації рідкого в'язкого тіла під дією сил поверхневого натягу*

Розглянемо послідовність моментів часу $t_0, t_1 = h, \dots, t_k = k\cdot h, \dots$, де $h > 0$ – крок по часу (задане мале число).

Розіб'ємо процес розв'язання задачі для кожного моменту часу на етапи:

1) Припустимо, що функції $\theta_i(\sigma,t)$ і $x_i(\sigma,t)$, $i = 1,2$ відомі для усіх $t \le t_{k-1}$ і $t \le t_k$ відповідно.

Функцію $\theta_1(\sigma,t_k)$ визначаємо із рівняння

$$-\frac{1}{2}\theta_1(\sigma_0,t_k) + \int\limits_{L(t_k)} \theta_1(\sigma,t_k)\frac{\cos\omega_0(t_k)}{2\pi r(t_k)}ds = F_1(\sigma_0,t_k). \qquad (5)$$

2) Використовуючи обчислену функцію $\theta_1(\sigma,t_k)$, а також відомі функції $x_i(\sigma,t)$ (для усіх $t \le t_k$) і $\theta_2(\sigma,t)$ (для усіх $t \le t_{k-1}$), функцію $\theta_2(\sigma,t_k)$ визначаємо за формулою

$$\frac{1}{2}\theta_2\left(\sigma_0,t_k\right)=\int\limits_{L(t_k)}\theta_1\left(\sigma,t_k\right)\frac{\sin\omega_0\left(t_k\right)}{2\pi r\left(t_k\right)}ds+F_2\left(\sigma_0,t_k\right). \tag{6}$$

3) Знаючи функції $\theta_i\left(\sigma,t_k\right)$ і $x_i\left(\sigma,t_k\right)$ знаходимо для моменту часу $t=t_{k+1}$ функції $x_i\left(\sigma,t_{k+1}\right)$ по наближеним формулам

$$x_i\left(\sigma,t_{k+1}\right)\approx x_i\left(\sigma,t_k\right)+\left(t_{k+1}-t_k\right)\left(\vec{e}_i\cdot\sum_{j=1}^{2}\theta_j\left(\sigma,t_k\right)\vec{a}_0^{\,j}\right),$$

де $$\vec{a}_0^{\,1}=\vec{n}\left(\sigma,t_k\right),\ \vec{a}_0^{\,2}=\vec{s}\left(\sigma,t_k\right).$$

Після визначення контуру $x_i\left(\sigma,t_{k+1}\right)$ за умови $\left|x_i\left(\sigma,t_{k+1}\right)-x_i\left(\sigma,t_k\right)\right|>\varepsilon$, можна повторити пункти 1) – 3) і обчислити функції $x_i\left(\sigma,t_{k+2}\right)$.

В інтегральне рівняння (5) і в рівність (6) входять $F_1\left(\sigma_0,t_k\right)$ і $F_2\left(\sigma_0,t_k\right)$, які обчислюються за формулами:

$$F_1\left(\sigma_0,t_k\right)=-\int\limits_0^{t_{k-1}}d\tau\int\limits_{L(\tau)}\Bigg[\theta_2\left(\sigma,\tau\right)H_{12}\left(\sigma_0,\sigma,t_k,\tau\right)+\left(\theta_1\left(\sigma,\tau\right)-\frac{\alpha}{2\mu}\right)H_{11}\left(\sigma_0,\sigma,t_k,\tau\right)+$$

$$+\gamma\sum_{j=1}^{2}\theta_1\left(\sigma,\tau\right)\theta_j\left(\sigma,\tau\right)G_{1j}\left(\sigma_0,\sigma,t_k,\tau\right)\Bigg]ds-\int\limits_{L(t_k)}\Bigg[\theta_2\left(\sigma,t_{k-1}\right)H_{12}^k\left(\sigma_0,\sigma\right)+$$

$$+\left(\theta_1\left(\sigma,t_{k-1}\right)-\frac{\alpha}{2\mu}\right)H_{11}^k\left(\sigma_0,\sigma\right)+\gamma\sum_{j=1}^{2}\theta_1\left(\sigma,t_{k-1}\right)\theta_j\left(\sigma,t_{k-1}\right)G_{1j}^k\left(\sigma_0,\sigma\right)\Bigg]ds;$$

$$F_2\left(\sigma_0,t_k\right)=\int\limits_0^{t_{k-1}}d\tau\int\limits_{L(\tau)}\Bigg[\theta_2\left(\sigma,\tau\right)H_{22}+\left(\theta_1\left(\sigma,\tau\right)-\frac{\alpha}{2\mu}\right)H_{21}+$$

$$+\gamma\sum_{j=1}^{2}\theta_1\left(\sigma,\tau\right)\theta_j\left(\sigma,\tau\right)G_{2j}\Bigg]ds+\int\limits_{L(t_k)}\Bigg[\theta_2\left(\sigma,t_{k-1}\right)H_{22}^k+$$

$$+\left(\theta_1\left(\sigma,t_k\right)-\frac{\alpha}{2\mu}\right)H_{21}^k+\gamma\sum_{j=1}^{2}\theta_1\left(\sigma,t_k\right)\theta_j\left(\sigma,t_{k-1}\right)G_{2j}^k\Bigg]ds.$$

Ядра H_{ij}^k і G_{ij}^k $\left(i,j=1,2\right)$ знаходяться в результаті інтегруванні H_{ij} і G_{ij} в межах від t_{k-1} до t_k:

$$H_{11}^k=\tilde q_1\frac{\cos\left(2\omega+\omega_0\right)}{2\pi r_0}+e^{-z_k}\frac{\sin 2\omega\sin\omega_0}{2\pi r_0},\quad H_{12}^k=\tilde q_1\frac{\sin\left(2\omega+\omega_0\right)}{2\pi r_0}-e^{-z_k}\frac{\cos 2\omega\sin\omega_0}{2\pi r_0},$$

$$H_{21}^k=\tilde q_1\frac{\sin\left(2\omega+\omega_0\right)}{2\pi r_0}-e^{-z_k}\frac{\sin 2\omega\cos\omega_0}{2\pi r_0},\ H_{22}^k=-\tilde q_1\frac{\cos\left(2\omega+\omega_0\right)}{2\pi r_0}+e^{-z_k}\frac{\cos 2\omega\cos\omega_0}{2\pi r_0},$$

$$G_{11}^k=\frac{e^{-z_k}\cos\left(\omega+\omega_0\right)}{8\pi\mu}-\frac{\cos\left(\omega-\omega_0\right)\operatorname{li}x}{8\pi\mu},\quad G_{21}^k=\frac{\tilde q_1\sin\left(\omega+\omega_0\right)}{8\pi\mu}-\frac{\sin\left(\omega-\omega_0\right)\operatorname{li}x}{8\pi\mu},$$

$$G_{12}^k=G_{21}^k-\frac{\sin\left(\omega-\omega_0\right)\operatorname{li}x}{4\pi\mu},\quad G_{22}^k=G_{11}^k-\frac{\cos\left(\omega-\omega_0\right)\operatorname{li}x}{4\pi\mu};$$

$$z_k=\frac{\gamma\ r_0^2}{4\mu\ h_k},\ h_k=t_k-t_{k-1},\ \tilde q_1=\frac{1-e^{-z_k}}{z_k},\ \ r_0=\left|\vec x\left(\sigma,t_k\right)-\vec x\left(\sigma_0,t_k\right)\right|.$$

Визначений інтеграл $\int\limits_0^x\frac{dt}{\ln t}$, де $x=e^{-z_k}$, називається інтегральним логарифмом і позначається $\operatorname{li}x$: $\operatorname{li}x=\int\limits_0^x\frac{dt}{\ln t}$.

Висновки.

Задача деформації в’язкого тіла звелась до розв’язку інтегрального рівняння, яке відноситься тільки до границі області і враховує краєві умови безпосередньо. Перевага такого перетворення полягає в тому, що представляється можливим відразу визначити невідомі величини на границі, не обчислюючи їх у всій області.

Якщо необхідно знайти рішення в довільній внутрішній точці області, то для цього достатньо виконати інтегрування.

Це вигідно відрізняє метод граничних інтегральних рівнянь від інших методів.

Список літератури

1. Бабенко К. И. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под. Ред.К. И. Бабенко. М.: Наука, 1979. – 295 с.

2. Бабенко К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. М.: Наука, 1986. – 744 с.

3. Белоносов С.М. Гидродинамические и тепловые потенциалы в областях с подвижными границами / С.М. Белоносов, К.А. Черноус. В кн.: Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности – Киев: Наукова думка, 1977. С. 126-136.

4. Белоносов С.М. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса / С.М. Белоносов, К.А. Черноус – М. Наука, 1985. – 312 с.

5. Долидзе Н.Е. Некоторые вопросы нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости / Н.Е. Долидзе – Тбилиси: Изд-во АН Груз. ССР, 1960.

6. Odqvist F. K.G. Beitrage zur Theorie der nichtstationaren zahen Flussigkeitsbewegungen // Archiv fur Mat.Astr.Fysik.-1930/32.-Bd.22 A, N 28. – S. 1–22.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ГРАНИЦЫ ВЯЗКОГО ТЕЛА МЕТОДОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Зинькевич А.П., Нещадим О.М., Сафонов В.М.

В теории потенциала строятся интегральные представления решения через произвольные функции точек контура области путем подстановки этих функций в формулы Грина вместо контурных значений решений и их частных производных. Условия на границе области приводят к так называемым граничных интегральных уравнений. В задачах вязкой жидкости выделяется практически важный класс задач с заранее неизвестной (свободной границей), которая определяется в процессе самого решения. Одним из возможных подходов к решению данного класса задач гидродинамики является метод гидродинамических потенциалов, переключающий основные трудности исследований и численных расчетов на некоторые граничные интегральные уравнения, которые относятся лишь к границе области и учитывают граничные условия непосредственно. Это преобразование позволяет сразу определить неизвестные величины на границе, не вычисляя их по всей области. Это выгодно отличает метод граничных интегральных уравнений от других методов.

В статье поставлена и решена задача деформации вязкого тела под действием сил поверхностного натяжения. Строятся граничные интегральные уравнения, которые рассматриваются в совокупности с кинематическим контурным условием. Предложен метод шагов по времени для численного анализа деформации жидкого вязкого тела под действием сил поверхностного натяжения.

Ключевые слова: гидродинамические потенциалы, кинематическое соотношение, силы поверхностного натяжения, интегральное представление, интегральное уравнение.

MATHEMATICAL MODELING OF DEFORMATION BORDER VISCOELASTIC BODY HYDRODYHAMIC POTENTIALS METHOD

Alexey Zinkevych, Alexander Neshchadym, Volodymyr Safonov

In the theory of potential, integral representations of a solution in terms of arbitrary functions of points of the contour of a domain are constructed by substituting these functions into Green's formulas instead of the contour values of the solutions and their partial derivatives. The conditions on the boundary of the region lead to the so-called boundary integral equations. The viscous fluid theory stands practically important class of problems with pre-unknown (free boundary), which is determined in the process of resolving. One approach to solving this class of hydrodynamics problems is the method of hydrodynamic potentials, switch the main challenges of research and numerical calculations of some boundary integral equations, which relate only to the border area and take into account the boundary conditions directly. This conversion allows you to immediately identify unknown quantities at the border, without calculating them throughout the region. This distinguishes the method of boundary integral equations of the other methods.

The article posed and solved the problem of viscous deformation of the body under the action of surface tension forces. We construct boundary integral equations, which are considered in conjunction with the kinematic boundary conditions. The method of time steps for the numerical analysis of liquid viscous deformation of the body under the action of surface tension forces.

Keywords: hydrodynamic potentials kinematic ratio, surface tension, integral representation, integral equation.