УДК 531(075)

Листопад В. В.

РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРРТНОЇ ЗАДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

У статті проілюстровано розв’язання транспортної задачі математичного програмування комп'ютерно-орієнтованим методом. Показано, як за допомогою функції-оптимізатора ПОИСК РЕШЕНИЯ (Microsoft Excel) покроковим методом можна отримати альтернативні розв’язки.

Ключові слова: *транспортна задача, опорний план, оптимальний план задачі, метод північно-західного кута ,план невироджений (вироджений), метод потенціалів, зсув по циклу.*

Першою за появою і найпопулярнішою матричною моделлю розподілу ресурсів є транспортна модель (її загальновживана назва – транспортна задача), яка є прикладом простої задачі розподілу [1,с.131]. Популярність моделі транспортної задачі пояснюється великою кількістю практичних ситуацій, де виникають різноманітні задачі розподілу цього типу, і можливістю застосування розвиненого матричного апарату для їх постановки, формулювання та розв'язання. Транспортна задача є однією із важливих матричних моделей лінійного програмування.

Ця модель своєю назвою, транспортна задача (*transportation problem*), зобов'язана в першу чергу актуальним проблемам, що виникають всюди і завжди при перевезенні вантажів залізницями, автотранспортом, водними чи повітряними шляхами, передачею каналами зв'язку з матричною організацією, які характеризуються суттєвими витратами різноманітних ресурсів: коштів, техніки, людської праці, часу. Гострота цих проблем значно підвищується під час надзвичайно відповідальних, напружених і навіть катастрофічних ситуацій: масштабних аварій, стихійного лиха тощо.

Актуальність проблеми суттєво зростає в наші дні у зв'язку з розвитком різноманітних комунікаційних систем, де ресурсом, що розподіляється, виступає інформація у вигляді проектної, ділової чи управлінської документації значних розмірів і певної важливості (наприклад: довге очікування відповіді на запит в Інтернеті є свідченням недосконалості транспортної мережі, низької пропускної здатності каналів чи неоптимальністю програми-маршрутизатора).

Отже, пошук оптимальних варіантів розподілу замовлених ресурсів від постачальників до споживачів ставить за мету зменшити транспортні витрати чи скоротити тривалість доставки за рахунок ефективного використання діючих комунікацій.

Транспортна задача вперше описана О. Толстим (1930 р., СРСР). Під час Другої світової війни її розв'язанням активно займалися математики Л. Канторович, М. Гавурін (СРСР), Ф. Хічкок, Дж. Данціг та Т. Купманс (США), відповідна базова математична модель тепер називається класичною. У процесі впровадження в практику модель класичної транспортної задачі поступово ускладнювалась, щоб врахувати особливості реальних ситуацій , відповідні модифікації виступають як певні моделі оптимального розподілу ресурсів (однорідних, взаємозамінних, пропорційних) . Це, зокрема, змусило будувати і досліджувати транспортні моделі, що виходять за межі лінійного програмування і відносяться до класів моделей потокового та нелінійного програмування.

Математична модель транспортної задачі передбачає пошук оптимального плану перевезень у вигляді матриці невідомих. Тому, на відміну від векторної моделі про оптимальний план виробництва чи оптимальний раціон (де невідомі представлені вектором-рядком), цю модель називають матричною моделлю оптимізації.

Комбінована (векторно-матрична) модель є поєднанням векторної та матричної моделей оптимізації, наприклад, при розв’язанні виробничо-транспортних задач, де одночасно враховуються витрати, пов’язані з виробництвом (вектор плану), постачанням сировини та розподілом продукції (матриця перевезень).

З точки зору теорії двоїстості відомо, що модель будь-якої задачі лінійного програмування складається з прямої та двоїстої до неї задач, їх розв'язки доповнюють одна одну, хоча саме ці задачі мають різну економічну сутність. Це у повній мірі стосується й транспортної задачі.

Модель класичної транспортної задачі лінійного програмування застосовують з метою мінімізації транспортних витрат, пов'язаних з доставкою продукції (ресурсів) від постачальників до споживачів, яка часто виникає у виробників, де транспортні витрати входять до складу собівартості продукції. Тому класична транспортна задача стала досить ефективною математичною моделлю для багатьох економічних та організаційних задач, які, буває, й не мають прямого відношення до суто транспортування. Це, наприклад, управління запасами чи рухом капіталу, складання розкладу роботи чи призначення персоналу на вакантні посади, прикріплення споживачів послуг за постачальниками тощо [2,с. 184 – 204].

Двоїстою до моделі класичної транспортної задачі лінійного програмування є модель задачі на максимум ефективності розподілу ресурсів між постачальниками і споживачами (прибутку), яка виникає у транспортному підприємстві, яке є власником транспортної мережі і надає платні комунікаційні послуги. Ця модель є широко вживаною у задачах оптимального прикріплення споживачів за постачальниками, бо дає змогу оцінити вартісні потенціали постачальників та споживачів.

<u>Постановка задачі.</u> Нехай в пунктах $A_1, A_2, \dots A_m$, виробляється, або зберігається деякий однорідний продукт, причому об’єм його виробництва в пункті A_i складає a_i одиниць. Припустимо, що даний продукт використовується в пунктах споживання $B_1, B_2, \dots, B_n$, причому об’єм споживання в пункті B_j дорівнює b_j одиниць продукту. Нехай з кожного пункту можливе транспортування продукту в буд-який пункт споживання, причому транспортні витрати (тарифи), що припадають на перевезення продукту з і-го пункту виробництва A_i в j-й пункт споживання B_j відомі та

становлять c_{ij} грошових одиниць. Запишемо постановку транспортної задачі в табличному вигляді.

Таблиця 1

Пункти виробництва (зберігання) продукції	Пункти споживання					Об'єми виробництва (запаси)
	B_1	B_2		B_{n-1}	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}		$c_{1(n-1)}$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}		$c_{2(n-1)}$	c_{2n}	a_2
…						
A_m	c_{m1}	c_{m2}		$c_{m(n-1)}$	c_{mn}	a_m
Об'єми споживання (попит)	b_1	b_2		b_{n-1}	b_n	

Постановка Задачі. Знайти план перевезення, при якому попит всіх пунктів споживання буде повністю задоволений, увесь продукт із пунктів виробництва буде вивезений і при цьому сумарні транспортні затрати на перевезення будуть мінімальними.

Математичне формулювання задачі. Нехай x_{ij} - це кількість продукту, який перевозиться з пункту виробництва A_i до пункту споживання B_j. Потрібно визначити такий план перевезення X величин $x_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ (кількість одиниць продукції), які задовольняють умовам:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i=\overline{1,m} \text{ (всі запаси вивезені)} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j=\overline{1,n} \text{ (попит всіх споживачів задоволений)} \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n} \quad (3)$$

і таких, що лінійна форма

$$L(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min \qquad (4)$$

План перевезення записується у вигляді матриці

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

План перевезення, при якому функція (4) приймає своє мінімальне значення називається <u>оптимальним планом</u>, або розв'язком транспортної задачі. Матрицю

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

називають матрицею <u>транспортних затрат</u>, або тарифів.

Умова $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$ (5)

називається умовою балансу, а модель називають збалансованою або закритою.

Якщо запаси перевищують потреби, тобто

$\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j$, то вводять фіктивного $(n+1)$ споживача з попитом $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$, а відповідні тарифи на перевезення вважаються рівними нулю $c_{in+1}=0, i=\overline{1,m}.$

Якщо попит перевищує запаси, тобто $\sum_{j=1}^{n}b_j>\sum_{i=1}^{m}a_i$, то вводять фіктивний $(m+1)$ пункт виробництва із запасом $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$, а відповідні тарифи на перевезення приймають рівними нулю $c_{m+1j}=0, j=\overline{1,n}.$

В "польових" умовах, коли під рукою немає комп'ютера з програмою - оптимізатором, транспортну задачу невеликого розміру можна розв’язати наближено і вручну, отримавши близький до оптимального розв'язок, який ще називають опорним. Саме так, між іншим, працює й симплекс-метод - спочатку він знаходить опорний план, який потім за певною ітераційною процедурою його покращує, аж поки не знайде оптимальний варіант. Те ж саме можна зробити й вручну, але для задач невеликого розміру (на 20-30 клітинок).

Оскільки умови (1) - (2) містять $n+m-1$лінійно-незалежних рівнянь, то і опорний план транспортної задачі може мати не більше ніж $n+m-1$ відмінних від нуля невідомих. Якщо в опорному плані число ненульових компонент рівне $n+m-1$, то план називається невиродженим, а якщо менше, то виродженим.

При знаходженні опорного плану транспортної задачі методом північно-західного кута заповнення клітинок таблиці умов починається з лівої верхньої клітинки для невідомої x_{11} («північно-західний кут») і закінчуємо клітинкою для невідомої x_{mn}. Метод мінімального елементу є варіантом методу північно-західного кута, із використанням матриці тарифів. Зауважимо, що другий метод дозволяє знайти опорний план транспортної задачі, при якому значення функції мети (загальна вартість перевезень) є меншою ніж відповідне значення знайдене за методом північно-західного кута.

Визначення оптимального плану транспортної задачі за допомогою методу потенціалів.

Теорема. Якщо для деякого опорного плану $X=\left(x_{ij}\right), i=\overline{1,m}; \ j=\overline{1,n}.$ транспортної задачі (1) - (4) існують такі числа $U_1,U_2,\ldots,U_m,V_1,V_2,\ldots,V_n,$ що $V_j-U_i=c_{ij}$ при $x_{ij}>0$ та $V_j-U_i-c_{ij}\le 0$для всіх $i=\overline{1,m}; \ j=\overline{1,n}$, то $X=\left(x_{ij}\right)$ - оптимальний план транспортної задачі.

Числа U_i та V_j $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ називають потенціалами відповідно пунктів виробництва та пунктів споживання.

Сформульована теорема дає можливість побудувати алгоритм розв'язання транспортної задачі. Нехай одним із методів знайдено опорний план транспортної задачі. Для кожного із пунктів виробництва і споживання (відправки і призначення) визначаємо потенціали із системи рівнянь

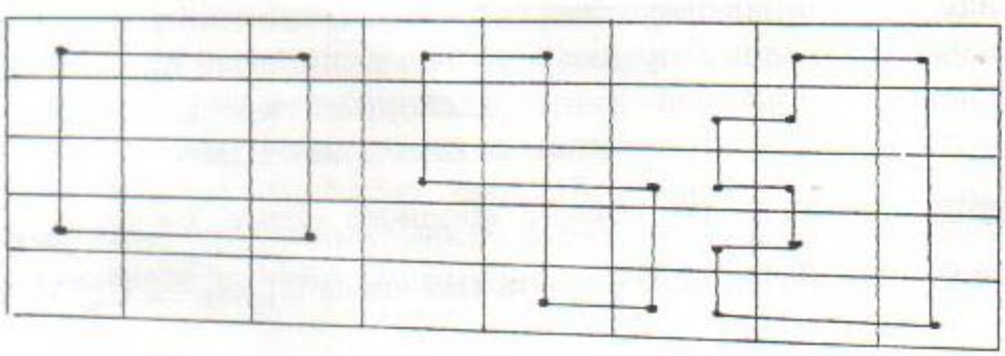
$$V_j - U_i = c_{ij} \qquad (6)$$

Де c_{ij} тарифи, які стоять у заповнених клітинках таблиці транспортної задачі. Оскільки число заповнених клітинок рівне $n+m-1$, то система (6) з $n+m$ невідомими містить $n+m-1$ рівнянь. Оскільки число невідомих на одиницю перевищує число рівнянь, то одне з невідомих можна покласти рівним нулю (наприклад $U_1 = 0$) і знайти послідовно із (6) решту невідомих. На практиці рекомендують брати рівним нулю той потенціал постачальника в рядку якого найбільша кількість відомих елементів плану-розв'язку x_{ij}. Після того як всі потенціали знайдено, для кожної з вільних клітинок визначаємо числа

$$\alpha_{ij} = V_j - U_i - c_{ij} \qquad (7)$$

Якщо серед чисел α_{ij} немає додатних, то знайдений опорний план буде оптимальним. Якщо ж для деякої вільної клітинки , отриманий план не є оптимальним і необхідно перейти до нового опорного плану. Для цього розглядають всі вільні клітинки, для яких $\alpha_{ij} > 0$ і серед отриманих чисел вибираємо максимальне. Клітинку в якій знаходиться знайдене число потрібно заповнити. Заповнюючи вибрану клітинку, необхідно змінити об'єм поставок, записаний в ряді інших заповнених клітинок, і зв'язаних із заповнюваною так званим циклом. Циклом в таблиці умов транспортної задачі називається ламана лінія, вершини якої розташовані в зайнятих клітинках таблиці, а ланки вздовж строчок і стовпчиків, причому в кожній вершині зустрічається рівно дві ланки, одна з яких знаходиться в стовпчику, а інша – в строчці. Якщо ламана, яка утворює цикл перетинається, то точки самоперетину не будуть вершинами. Приклади циклів можуть бути такі

Рисунок 1



При правильній побудові опорного плану для будь-якої вільної клітинки можна побудувати лише один цикл. Після того, як для вибраної вільної клітинки він побудований, слід перейти до нового опорного плану. Для цього необхідно здійснити переміщення вантажів в межах клітинок, пов'язаних з даною вільною клітинкою. Це переміщення здійснюється за допомогою наступних кроків:

1) кожній з клітинок, пов'язаних з циклом даною вільною клітинкою, приписують певний знак, причому вільній клітинці знак «+», а всім іншим клітинкам почергово знаки «+» та «–». Будемо називати ці клітинки плюсовими та мінусовими;

2) в дану клітинку переносять менше з чисел x_{ij}, які стоять в мінусових клітинках. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які стоять в плюсових клітинках. Клітинка, яка була раніше вільною, стає зайнятою, а мінусова клітинка, в якій стояло мінімальне з чисел x_{ij}, вважається вільною.

В результаті вказаних переміщень, визначають новий опорний план транспортної задачі. Описаний перехід від одного опорного плану транспортної задачі до іншого називають *зсувом по циклу* перерахунку. При зсуві по циклу перерахунку кількість зайнятих клітинок залишається незмінною, а саме $n+m$. При цьому, якщо в мінусових клітинках є два (або більше) однакових чисел x_{ij}, то звільняють лише одну з клітинок, а інші лишають незайнятими. В результаті описаного ітераційного процесу після скінченого числа кроків отримуємо оптимальний план задачі.

Зауважимо, що при визначенні опорного плану, або в процесі розв'язання задачі може бути отриманий вироджений план. В такому випадку відповідні нульові елементи опорного плану слід замінити як завгодно малим додатнім числом ε і розв'язувати задачу як не вироджену.
В оптимальному плані такої задачі необхідно вважати ε рівним нулю.

Приклад. На три бази A_1, A_2, A_3 поступив однорідний вантаж в кількостях відповідно рівних 50, 30 та 10 одиниць. Цей вантаж потрібно перевезти в чотири пункти призначення B_1, B_2, B_3, B_4 відповідно в кількостях 30,30, 20 і 10 одиниць. Тарифи на перевезення однієї одиниці продукції з бази A_i в пункт B_j задані таблицею

Таблиця 2

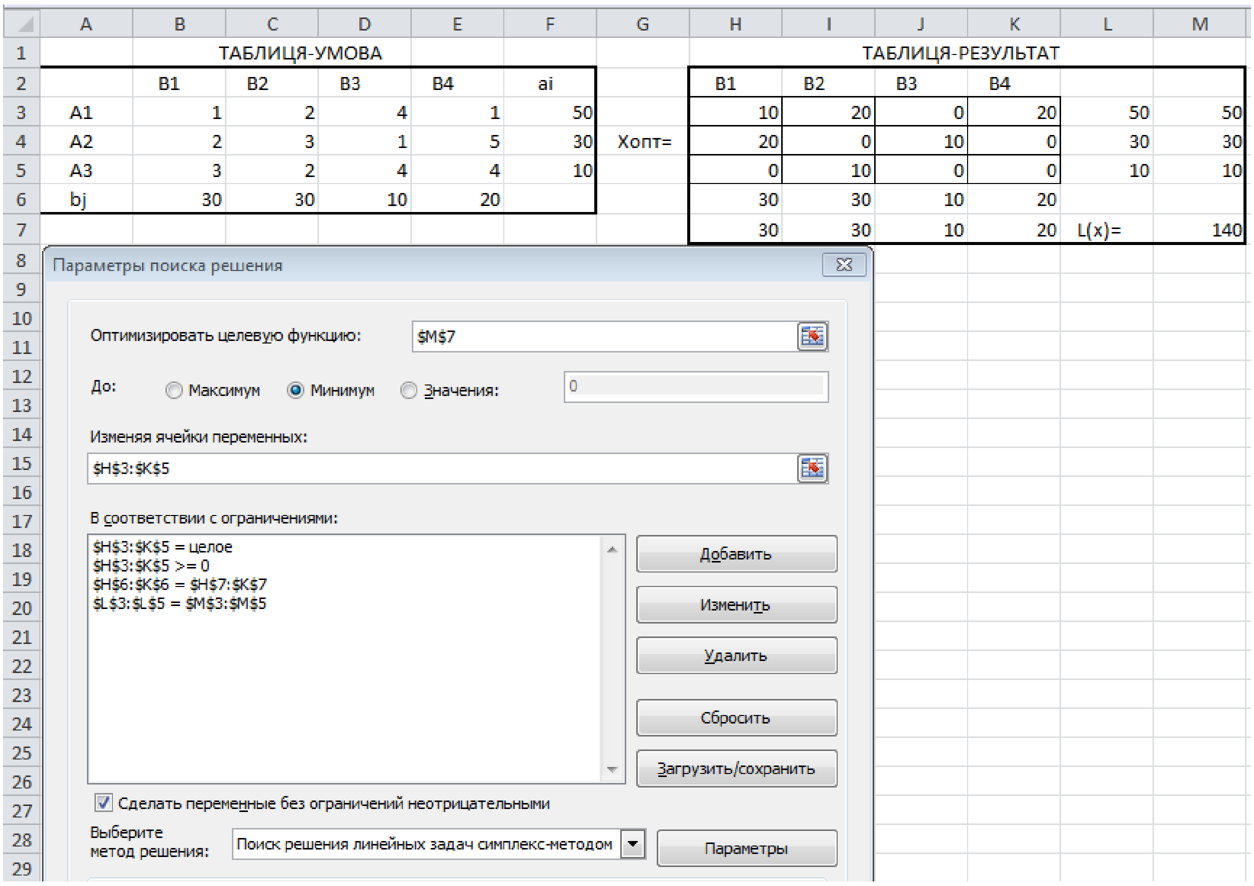
	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	1	2	4	4	50
A_2	2	3	1	1	30
A_3	3	2	4	2	10
Потреби	30	30	10	20	

Знайти такий план перевезення, при якому всі запити пунктів призначення будуть повністю задоволені, увесь вантаж із баз буде вивезено і при цьому сумарні транспортні затрати будуть мінімальними.

Розв'язання. Скористаємося функцією-оптимізатором ПОИСК РЕШЕНИЯ.

Результати в табл. 3

Таблиця 3



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		ТАБЛИЦЯ-УМОВА							ТАБЛИЦЯ-РЕЗУЛЬТАТ				
2		B1	B2	B3	B4	ai		B1	B2	B3	B4		
3	A1	1	2	4	1	50		10	20	0	20	50	50
4	A2	2	3	1	5	30	Хопт=	20	0	10	0	30	30
5	A3	3	2	4	4	10		0	10	0	0	10	10
6	bj	30	30	10	20			30	30	10	20		
7								30	30	10	20	L(x)=	140

У параметрах функції-оптимізатора зробимо помітку «показувати результати ітерацій». Виконуючи покрокову процедуру розв'язання, отримаємо:

1) на третьому кроці ітерації , отримаємо $X_{1опт} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$;

2) на восьмому кроці - $X_{2опт} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 & 20 \\ 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, і вартість перевезення при цьому $L(x) = 140$ у.о.

На третьому кроці ітераційного процесу отримаємо не вироджений план із заповненими чотирма клітинками. На восьмому кроці – вироджений $n+m-1=6$. Всього було проведено 15 кроків ітерації.

Отже, застосування електронних таблиць Microsoft Excel дає змогу:

– скоротити час розв'язку задачі в кілька десятків разів;

– отримувати основні та альтернативні розв'язки задачі;

– реалізувати міжпредметні зв’язки;

– реалізувати можливість паралельного засвоєння теоретичного матеріалу даної теми;

– отримувати та аналізувати розв’язки задач лінійного програмування;

– готувати систему вправ для самостійного виконання.

Використана література:

1. *Кузьмичов А.І.* Математичне програмування в Excel: навч. посіб./ А.І.Кузьмичов ,М.Г. Медведєв. – К.: Вид – во Європ. ун-ту, 2005. – 320 с.
2. *Наконечний С.І.* Математичне програмування: навчальний посібник/ С.І.Наконечний, С.С.Савіна – К.: КНЕУ, 2005 – 452с.

References:

1. *Kuzmichovn A.I.* Matematytchne programuvannja v Excel: navtchalnyj posibnyk /A.I.Kuzmitchichovn, M.G.Medvedev. – K.:Vyd-vo Evrop. Un-tu, 2005. –320 s.
2. *Nakonetchnyj S.I.* Matematytchne programuvannja: navtchalnyj posibnyk / S.I. Nakonetchnyj, S.S.Savina. – K.: KNEU, 2005 – 452 s.