В.В. ЛИСТОПАД
НУПТ (г. Киев, Украина)

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Задачи с параметрами – это тип задач повышенной сложности с нестандартными подходами в методах их решения. Задача с параметрами включена в четвертую часть ВНО как задание открытой формы с развернутым ответом. Во время выполнения такого типа задач участник тестирования должен сам разработать метод решения, используя в новой нестандартной ситуации знания с различных разделов курсов алгебры, геометрии, начал математического анализа, правильно выполнить рисунок (если есть необходимость), решить, обосновывая все этапы решения.

При подготовке к внешнему независимому оцениванию (ВНО) по математике большинство учеников (9 из 10) отказываются от рассмотрения методов решения задач с параметрами, мотивируя это тем, что они не понимают их содержания, методов решения и эти задачи выходят за пределы курса школьной математики.

Известно, что решению задач с параметрами в школе уделяют очень мало времени, а поэтому трудно рассчитывать на высокий результат ученикам, не прошедшим дополнительную подготовку. Учащиеся, которые овладевают методами решения задач с параметрами, успешно справляются и с другими задачами, имеют развитое логическое мышление, математическую культуру, демонстрируют способность осуществлять исследовательскую деятельность и, как результат, претендуют на самую высокую оценку на ВНО.

Далее рассмотрим задачи с параметрами, которые предлагались на ВНО в 2013-2017 гг. в Украине. Решение предложенных задач будем сопровождать только замечаниями и комментариями. Полное решение предлагаем выполнить самостоятельно.

Задача 1 (2013 г). При каком наибольшем отрицательном a уравнение $\sqrt[4]{|x|-3}-2x=a$ имеет одно решение?

При решении этой задачи нужно использовать графический метод для функций: $y=\sqrt[4]{|x|-3}$ и $y=2x+a$. На первый взгляд функции пересекаются в точке $x_o=3$ и значение параметра $a=-6$. Но это ошибочное решение. Функция $y=\sqrt[4]{|x|-3}$ имеет на промежутке $[3;4]$ «выпуклость», которой и касается прямая в точке $x_o=3\frac{1}{16}$. Эту точку находим, пользуясь известным угловым коэффициентом $k=2=\left(\sqrt[4]{x-3}\right)'$.

Ординату находим из уравнения кривой. Подставляя полученные значения в уравнение прямой, получим $a = -5,625$.

Задача 2 (2014 г). Найти все отрицательные значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{y^2 - 4y + 4} + 3|x| = 11 - y, \\ 25x^2 - 20ax = y^2 - 4a^2, \end{cases}$$

имеет единственное решение. Если такое значение одно, то запишите его в ответ. Если таких значений несколько, то в ответ запишите их сумму.

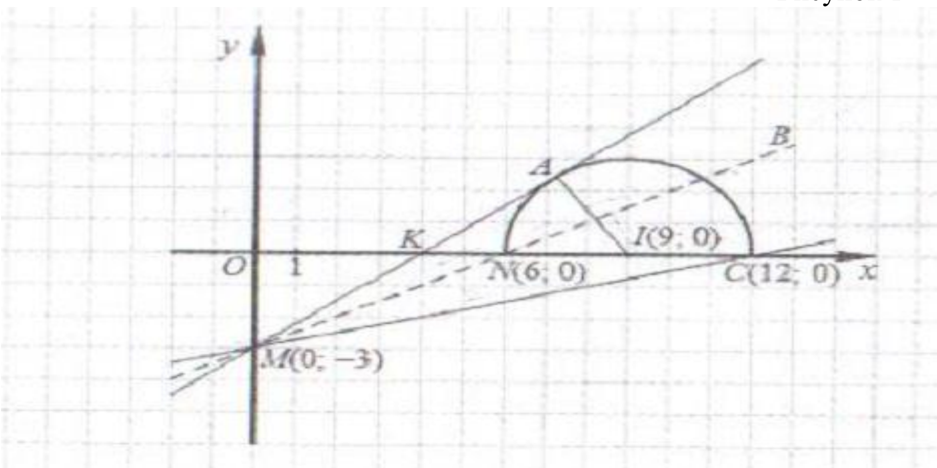
Сворачиваем первое и второе уравнение к виду

$$\begin{cases} 2|y - 2| + 3|x| = 11 - y, \\ |5x - 2a| = |y|, \end{cases}$$

С помощью графиков, построенных методом преобразований, находим единственное решение в точке $(-3;2)$ и параметр $a = -8,5$.

Задача 3 (2015 г, пробное ВНО). Найти все значения параметра a при которых уравнение $ax - 3 = \sqrt{-x^2 + 18x - 72}$ имеет единственное решение.

Рисунок 1



С графика (рис. 1) видно, что прямая $y = ax - 3$ с «верхней» частью полуокружности (центр в точке $(9;0)$ и радиуса $r = 3$) имеет касательную в точке A и дугу $(BC]$, где будет единственное решение. Угловые коэффициенты соответствующих прямых находятся из прямоугольных треугольников.

Задача 4 (2016 г). Найти решение уравнения

$$\frac{\sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0,$$

в зависимости от параметра a.

Решим задачу аналитическим методом. Найдем область определения дроби и параметра. $a \geq 0,\ 5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x \neq 0,\ x \neq a - 1.$ Приравниваем числитель к нулю $x^2+(4a-4)x+4a^2-8a=0$, получим $x_1=-2a, x_2=4-2a,$ и учитывая $x\neq a-1,\ a\neq\frac{1}{3},\ a\neq\frac{5}{3}.$

Ответ. Если $a<0$, то $x\in\varnothing$, если $a\in\left[0;\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right[\cup\left]\frac{5}{3};\infty\right[$, то $x=-2a,\ 4-2a,$ если $a=\frac{5}{3}$, то $x=-3\frac{1}{3}$, если $a=\frac{1}{3}$, то $x=3\frac{1}{3}.$

Задача 5 (2017 г). Найти решения системы в зависимости от параметра a

$$\begin{cases}|x-y|=|x+a|;\\ \ln(y-a)=\ln\left(4a^2+x-x^2\right)\end{cases}.$$

Поскольку модуль «любит» квадрат $\left(\sqrt{x^2}=|x|\right)$, то первое равенство возводим в квадрат и выражаем из него $y_1=a$ или $y_2=2x-a$. Подставляя их во второе уравнение (после потенциирования), получим две точки. Используя область определения второго уравнения системы, получим окончательный ответ:

если $a>0$, то $(2a;3a)$, если $a\in\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$ $(-2a-1;-5a-2)$,

если $a\in\left[-\frac{1}{3};0\right]$, нет решений.

Задача 6. При каких значениях параметра a уравнение $x^2-2a\sin(\cos x)+2=0$ имеет единственное решение?

Используем свойство четности-нечетности функции. Перепишем условие задачи в виде $x^2+2=2a\sin(\cos x)$. В левой части функция – четная, а в правой – нечетная. Они могут быть равны лишь при $x=0$. Подставляя это значение получим: $a=\frac{1}{\sin 1}$. Аналогичное решение можно получить рассматривая равенство минимального значения в левой и максимального в правой частях равенства.

В школьных учебниках есть задачи с параметрами (в основном в конце параграфа или темы) и учителя должны выделять время на их решение (особенно в математических классах), рассматривать методы решения на заседаниях математических кружков, при подготовке к олимпиадам и ВНО.