

О задаче выбора оптимального инвестиционного портфеля методом Г. Марковица с помощью Microsoft Excel

ЛИСТОПАД В.В., доцент, ШОХА В.П., ассистент
кафедры высшей математики имени проф. В.И. Можара

Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина

Аннотация: Реализован алгоритм поиска оптимального инвестиционного портфеля методом Г. Марковица с помощью электронных таблиц Ms Excel.

Ключевые слова: оптимальный инвестиционный портфель, метод Марковица, доход, доходность, риск, ковариация.

Г. Марковиц в 1952 году впервые предложил математическую модель формирования инвестиционного портфеля. В основе его модели лежат два ключевых показателя любого финансового инструмента: доходность и риск, которые были количественно измерены. Рассмотрим задачу поиска оптимального инвестиционного портфеля.

Это задача о поиске оптимального варианта распределения целого на отдельные части с целью получения максимальной прибыли. Эта задача является достаточно распространенной в теории ресурсного обеспечения, страхования, инвестирования, банковского дела.

Постановка задачи минимизации риска инвестиционного портфеля [1, с.274].

Инвестор намерен вложить S у.е. в ценные бумаги (ЦБ) и хочет определить, какую долю этой суммы лучше всего вложить в каждый вид ЦБ. Выбранный набор ценных бумаг носит название инвестиционный портфель.

Выгодным может быть один из двух альтернативных вариантов:

- минимизация риска при ограничении на доход (осторожный подход)
- максимизация дохода при ограничении на риск (рискованный, смелый подход).

Напомним, что в инвестиционном менеджменте набор частиц суммы инвестирования называется портфель (portfolio), а оптимальным портфелем такой набор, который инвестор определяет для себя лучшим по соотношению между доходностью вложений и риском потерь.

Пусть инвестор хочет вложить средства в акции предприятий таким образом, чтобы портфель $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ имел минимальный риск при фиксированном уровне ожидаемого дохода.

Доход, d_t полученный за определенный период времени t от инвестирования суммы C_{t-1} , вырос за этот период до C_t , является числом (положительным или отрицательным)

$$d_t = \frac{C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}} \quad (1).$$

Общая доходность представляет собой взвешенную сумму доходностей каждой ценной бумаги $d_p = \sum_{i=1}^n x_i d_i$, где d_p - доходность инвестиционного портфеля, d_i - доходность i -й ценной бумаги, x_i - доля i -й ценной бумаги в портфеле.

Риск в теории инвестирования принято измерять величиной возможного рассеивания (изменчивости) дохода портфеля от среднего значения, который в статистике называется среднее квадратическое отклонение σ , или дисперсия (вариация), характеризующая квадрат отклонения σ^2 . Ковариация дохода - это число характеризующее зависимость дохода от двух ценных бумаг, которые определенным образом связаны между собой и

влияют друг на друга. Ковариация массива «сам с собой» является его вариацией (дисперсией).

Начальные данные задачи задаются статистикой доходов для всех N ЦБ, накопленные за T временных периодов (лет, месяцев, недель и т.д.), то есть это матрица размерности $T \times N$, где каждый из ее элементов d_{ij} является доходом, полученным в i -й период для j -й ЦБ.

С этой матрицы можно получить:

- среднее значение дохода от j -й ЦБ, (использовать функцию СРЗНАЧ с Ms Excel);
- вариацию (ДИСПР) дохода $\sigma_j^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (d_{ij} - \bar{d}_j)^2$;
- ковариацию (КОВАРИАЦИЯ) дохода от j -й и от k -й ЦБ

$$\sigma_{jk} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (d_{ij} - \bar{d}_j)(d_{ik} - \bar{d}_k).$$

Вариация (дисперсия) дохода вычисляется по общей формуле:

$$Z = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sigma_{ik} x_i x_k = X_i V_{ij} X_i^{\wedge} \quad (2).$$

Это квадратичная функция, для которой нужно найти минимум (V_{ij} - ковариационная матрица X_i - вектор долей ценных бумаг в неизвестном плане, а X_i^{\wedge} - вектор транспонированный к X_i). Чтобы сформировать инвестиционный портфель нужно решить оптимизационную задачу. Существует два вида задач: поиск частей акций в портфеле для достижения максимальной прибыли при заданном уровне риска и минимизация риска при заданном уровне доходности портфеля. Кроме того сумма частей акций должна равняться 1 (или 100%), а сами части должны быть неотрицательными. Проиллюстрируем ограничения и формулы для поиска оптимальных частей ЦБ в инвестиционном портфеле по методу Марковица, [2].

I. Портфель Марковица минимального риска при заданном уровне доходности:

$$\begin{cases} \sqrt{X_i V_{ij} X_i^{\wedge}} \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n x_i \bar{d}_i \geq d_p \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

II. Портфель Марковица максимальной прибыли при заданном уровне риска:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \bar{d}_i \rightarrow \max \\ \sqrt{X_i V_{ij} X_i^{\wedge}} \leq \sigma_p \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Дадим алгоритм реализации для обеих задач, в матричном виде, с помощью электронных таблиц Microsoft Excel.

1. Вычисляем относительное значение дохода по формуле (1) и среднюю доходность (СРЗНАЧ) и стандартное отклонение (СТАНДОТКЛОН) каждой ценной бумаги. Ценные бумаги, имеющие отрицательную доходность, выключаем из рассмотрения.
2. Для оставшихся данных вычисляем ковариационную матрицу (КОВАРИАЦИЯ) и вычисляем произведение матриц $X_i V_{ij} X_i^T$ (МУМНОЖ). Вектор, долей ценных бумаг, задаем произвольно. Транспонированные к нему заходим с помощью функции ТРАНСП.
3. Установив курсор на ячейку, в которой содержится значение целевой функции, и вызвав функцию-оптимизатор ПОИСК РЕШЕНИЯ задаем ограничения и выбираем метод для нелинейных функций.
4. В первом случае, получим распределение ценных бумаг в портфеле с минимальным риском и доходностью не менее от заданной, а во втором - максимальный доход с риском не более заданного.

С помощью предложенного алгоритма можно оптимизировать вложения в ценные бумаги по одному из критериев: минимальный риск или максимальная прибыль. Полученные результаты можно сравнить с вариантом при равномерном распределении ЦБ.

Литература:

1. Кузьмичов А.И., Медведёв М.Г. Математичне програмування в Excel: Навч. посіб. – К.: Вид – во Європ. Ун-ту, 2005.- 320 с.
2. Жданов И.Ю. Формирование инвестиционного портфеля Марковица в Excel //Электронный ресурс: <http://finzz.ru/formirovanie-investicionnogo-portfelya-markovica-v-excel.html>