В.В. Листопад
НУПТ (г. Киев, Украина)

О применении градиентного метода в нелинейном программировании

Стремительное развитие информационных технологий и внедрения их в производственную деятельность требует подготовки высоко конкурентных специалистов в каждой отрасли. Особенное внимание сегодня уделяют подготовке экономистов как наиболее активных субъектов рыночной экономики. Содержание курса математики и его направленность на профессиональную деятельность является залогом успешного развития профессиональной компетентности будущих специалистов по экономике. Одним из типов задач, которые способствуют формированию компетентности экономиста, являются задачи нелинейного программирования.

В отличие от линейного программирования, в котором разработаны эффективные и универсальные вычислительные методы оптимизации для общей задачи нелинейного программирования нет универсальных методов оптимизации. Для построения нелинейных моделей в исследованиях часто используют метод наименьших квадратов, который является основой симплекс-метода для задач линейного программирования. Однако он не охватывает все типы линейных зависимостей. Это требует разработки новых подходов в создании нелинейных моделей.

Градиентные методы принадлежат к приближенным методам решения задач нелинейного программирования и дают только некоторое приближение к экстремуму. Причем с увеличением объема вычислений, можно достичь результата с наперед заданной точностью, но в этом случае, у вас есть возможность найти только локальные экстремумы целевой функции. Обратите внимание, что эти методы могут применяться только для тех типов нелинейных задач, где целевая функция и ограничения являются дифференцированными, по крайней мере, один раз. Градиентные методы дают возможность получать точки глобального экстремума только для задач выпуклого программирования, в которых локальный и глобальный экстремумы совпадают.

Градиентные методы базируются на основном свойстве градиента дифференцируемой функции – определять направление наибольшего возрастания этой функции. Идея метода состоит в переходе от одной точки к другой в направлении градиента, с наперед заданным шагом.

Рассмотрим метод Франка — Вульфа, процедура которого предусматривает определение оптимального решения задачи путем перебора решений, которые являются допустимыми планами данной задачи.

Пусть надо найти $\max F(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при линейных ограничениях: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1, \ldots, m)$

$x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n)$.

Рассмотрим подробнее переход k-ой итерации метода к (k + 1)-ой. Предположим, что известна точка X_k, которая принадлежит области допустимых значений. В данной точке вычисляем значение градиента целевой функции: $\nabla f(x_k) = \left(\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_n} \right)$. Значение градиента функции в данной точке задает направление наиболее быстрого ее возрастания.

Меняем целевую функцию задачи на линейную: $F = \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + \ldots + \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_n} \cdot x_n$. Решаем полученную задачу линейного программирования с ограничениями начальной задачи. Пусть решением этой задачи будет точка $\widetilde{X}_k$ С начальной точки X_k в направлении $\widetilde{X}_k$ двигаемся с некоторым произвольным шагом $0 \le \lambda \le 1$,определяя координаты новой X_{k+1} точки, следующим методом: $X_{k+1} = X_k + \lambda(\widetilde{X}_k - X_k)$

Заметим, что значение параметра $0 \le \lambda \le 1$ целесообразно выбирать таким, который дает наибольшее значение целевой функции изначальной задачи. $F(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для точки X_{k+1} повторяем рассмотренный процесс.

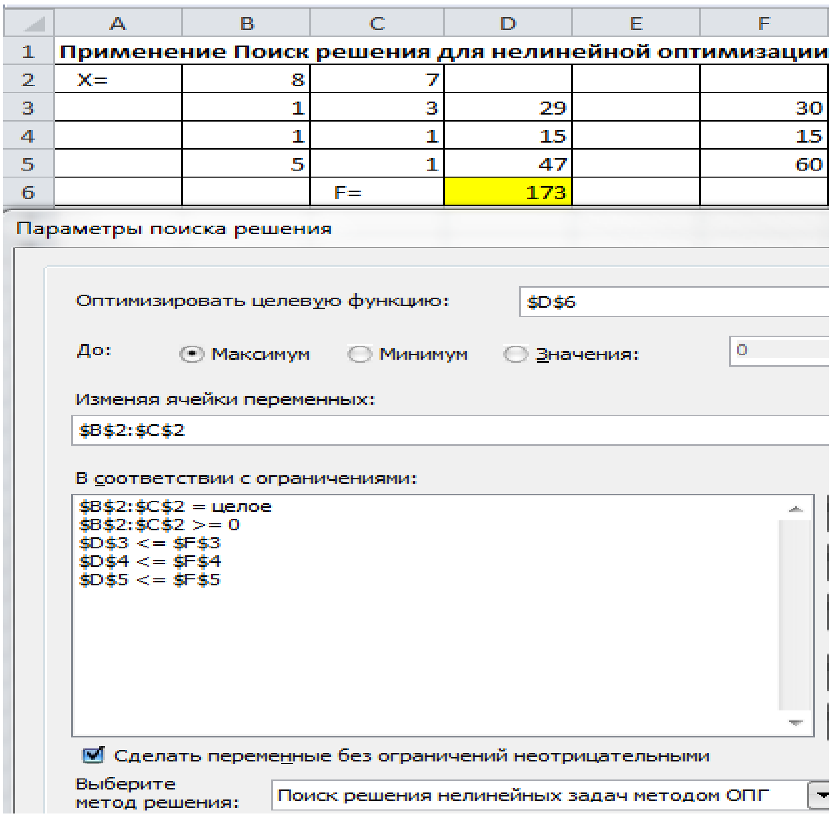
Таким образом, строим последовательность точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$,которые постепенно приближаются к оптимальному плану исходной задачи. Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока значение градиента целевой функции станет равным нулю или пока будет выполнятся условие $\left| f(X_{k+1}) - f(X_k) \right| < \varepsilon$, где — ε достаточно малое число (точность).

Пример. Малое предприятие изготавливает два вида продукции (А и В), используя при этом три вида ресурсов: I, II, III, запасы которых ограниченны. Исходные данные заданы в таблице.

Ресурсы	Затраты на производство единицы продукции		Запасы ресурсов
	А	В	
I	1	3	30
II	1	1	15
III	5	2	60
Цена реализации	20 у.е	18 у.е	-

Прибыль для обоих видов продукции зависит от затрат на производство, которые прямо пропорциональны квадрату количества изготовляемой продукции. Найти план производства продукции, для которого прибыль будет максимальной.

Применяя метод Франка-Вульфа, суть которого состоит в переборе допустимых решений задачи, рассмотренного в [1с. 163-165] (задача нелинейной оптимизации) после пяти итераций получаем оптимальное решение $X_{опт} = (8;7)$ и $F_{\max} = 173$ у.е. Используя функцию-оптимизатор ПОИСК РЕШЕНИЯ [2с. 57], получим этот же результат, получаем за две итерации.



При аналитическом решении нелинейной задачи математического программирования на этот процесс уйдет 2-3 часа времени. С помощью информационных технологий этот процесс занимает 10-15 минут и дает возможность каждому студенту самостоятельно решить несколько задач даже с большим количеством переменных.

Литература

1. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування.:Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2005 – 452с.

2. Кузьмичов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в Excel: Навч. посіб. – К. : Вид-во Європ. ун-ту, 2005. – 320 с.