$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = F(x), \quad x \in (0;1).$$

Практичне значення одержаних результатів. Результати дослідження можуть бути використані в якості демонстраційного матеріалу застосування спеціальних функцій при вивченні крайових задач математичної фізики. Ці результати також можуть бути використані при проведенні практичних занять з курсу “математична фізика” у закладах вищої освіти, де ведеться підготовка фахівців з фізико-математичних і технічних спеціальностей.

ДЖЕРЕЛА

1. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 455 с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б. Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

РІШЕННЯ ЗАДАЧ БАГАТОЦІЛЬОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ОСНОВІ МАРГІНАЛЬНИХ РІШЕНЬ ЗАСОБАМИ МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТУ MATHCAD

Сєдих О., Дорофеєва А.
Національний університет харчових технологій, м. Київ

Рішення задачі багатокритеріальної оптимізації на основі маргінальних рішень полягає в наступному: 1) пошук маргінальних рішень для цільової функції і обмежень; 2) мінімізація узагальненого критерію оптимізації.

Розглянемо задачу лінійного програмування з декількома критеріями оптимальності. Нехай задана система критеріїв оптимальності у вигляді лінійних форм:

$$\begin{aligned} f_1(x1, x2) &= -3 \cdot x1 + 2 \cdot x2 \\ f_2(x1, x2) &= 4 \cdot x1 + 3 \cdot x2 \\ f_3(x1, x2) &= 2 \cdot x1 - 5 \cdot x2 \end{aligned} \tag{1}$$

Обмеження на керовані змінні:

$$\begin{cases} -2 \cdot x1 - 3 \cdot x2 \ge -18 \\ -2 \cdot x1 - x2 \ge -10 \\ x1, x2 \ge 0 \end{cases} \qquad (2),$$

що визначають область допустимих значень x1, x2. Потрібно знайти таке рішення (x1, x2), яке максимізує одночасно всі три критерії оптимальності.

За допомогою математичного пакету MathCAD визначимо максимальні маргінальні значення $f_1(\bullet)$, $f_2(\bullet)$, $f_3(\bullet)$, які вони можуть приймати у заданій обмеженій області керованих змінних.

Узагальнений критерій оптимальності (3) буде мати наступний вигляд:

$$f(x1, x2) = \min \sum_{i=1}^{3} \left[fi(x1, x2) - f_i(\bullet) \right]^2 \tag{3}$$

Таким чином, при цьому критерії рішенням задачі буде точка $\left(x_1^*, x_2^*\right)$, в якій досягається мінімум суми квадратів відхилень кожного із критеріїв оптимальності від відповідних маргінальних значень.

Відзначимо, що в даній задачі важливість усіх трьох критеріїв оптимальності прийнята однаковою. Результати розрахунків представлені на рисунку 1.

$f1(x1,x2) := -3 \cdot x1 + 2 \cdot x2$ $\quad f2(x1,x2) := 4 \cdot x1 + 3 \cdot x2$ $\quad f3(x1,x2) := 2 \cdot x1 - 5 \cdot x2$

$g1(x1,x2) := -2 \cdot x1 - 3 \cdot x2 + 18$ $\quad g2(x1,x2) := -2 \cdot x1 - x2 + 10$

$x1 := 2$ $\quad x2 := 2$

Given

$g1(x1,x2) \ge 0$ $\quad g2(x1,x2) \ge 0$ $\quad x1 \ge 0$ $\quad x2 \ge 0$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(f1, x1, x2)$ $\quad \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad f1marg := f1(x1,x2)$

$f1marg = 12$

Given

$g1(x1,x2) \ge 0$ $\quad g2(x1,x2) \ge 0$ $\quad x1 \ge 0$ $\quad x2 \ge 0$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(f2, x1, x2)$ $\quad \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad f2marg := f2(x1,x2)$

$f2marg = 24$

Given

$g1(x1,x2) \ge 0$ $\quad g2(x1,x2) \ge 0$ $\quad x1 \ge 0$ $\quad x2 \ge 0$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(f3, x1, x2)$ $\quad \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f3marg := f3(x1,x2)$

$f3marg = 10$

$F(x1,x2) := (f1(x1,x2) - f1marg)^2 + (f2(x1,x2) - f2marg)^2 + (f3(x1,x2) - f3marg)^2$

$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(F, x1, x2)$ $\quad \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.969 \\ 1.523 \end{pmatrix}$

$f1(x1,x2) = -5.86$ $\quad f2(x1,x2) = 16.444$ $\quad f3(x1,x2) = -1.678$

Рис. 1. Реалізація рішення задачі багатоцільової оптимізації

Мінімальне значення цієї функції досягається в точці з координатами $x1^* = 2.969; \quad x2^* = 1.523$, яка належить області допустимих значень керованих змінних. У цій точці критерії оптимальності мають такі значення: $f_1^*(\bullet) = -5.86;\ f_2^*(\bullet) = 16.444;\ \ f_3^*(\bullet) = -1.678.$

ДЖЕРЕЛА

1. Зак Ю. А. Прикладные задачи многокритериальной оптимизации. / Ю. А. Зак. – М. : Экономика, 2014. – 455 с.

ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ ГРАФІКІВ ЗАЙНЯТОСТІ В MS EXCEL

Сєдих О., Дорофеєва А.
Національний університет харчових технологій, м. Київ

Задачі побудови оптимального розкладу виникають дуже часто і є достатньо складними. Розклади стосуються людей чи машин, стан яких визначається двома значеннями: людина у певний день на роботу вийшла/ не вийшла, машина на певній стадії працює/не працює тощо.

Розглянемо задачу: протягом тижня 10 працівників виконують покладені на них функції. На кожен день відомі потреби на їх чисельність. Знайти оптимальний розклад для п’ятиденного робочого тижня, щоб задовольнити ці потреби із загальною мінімальною кількістю людино/днів.

Введемо позначення: i- номер працівника, j – номер тижня, x_{ij} – ознака того, працює (1) чи ні (0) i-тий працівник у j-тий день тижня, p_j – попит працівників у j-тий день.

Задача оптимізації: знайти матрицю X(10x7), таку, щоб

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{7} x_{ij} \to \min$$

за обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{10} x_{ij} = p_j \\ \sum_{j=1}^{7} x_{ij} = 5 \\ x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$

Математична модель відноситься до класу задач лінійного програмування. Для зручності розуміння і наочності представлення результатів оптимізації використовується MS Excel.