

# РІЗНОВИДИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЗНО

## ЧАСТИНА II

Олег МАЗУР — старший викладач кафедри вищої математики ім. проф. Можара В. І. Національного університету харчових технологій

Розглядаються види тригонометричних рівнянь та способи їх розв'язання.

### 1. Розкладання на множники.

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння  $\sin 3x + \sin x + 2 \cos x = \sin 2x + 2 \cos^2 x$ .

**Розв'язання.** Запишемо початкове рівняння у вигляді  $(\sin 3x + \sin x) + 2 \cos x - (\sin 2x + 2 \cos^2 x) = 0$  і застосуємо спосіб розкладання на множники. Скориставшись формулами для суми синусів і синуса подвійного кута, маємо  $(2 \sin 2x \cos x + 2 \cos x) - (2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x) = 0$  або  $2 \cos x (\sin 2x + 1 - (\sin x + \cos x)) = 0$ , звідки або  $\cos x = 0$ , тобто  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in Z$  або  $\sin 2x + 1 - (\sin x + \cos x) = 0$ . Оскільки  $\sin 2x + 1 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2$ , то останнє рівняння еквівалентне такому:  $(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) = 0$  або  $(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$ . Якщо  $\sin x + \cos x = 0$ , то  $x = -\frac{\pi}{4} + m\pi$ ,  $m \in Z$ . Якщо ж  $\sin x + \cos x - 1 = 0$ , то  $x = 2n\pi$ ,  $n \in Z$  або  $x = \frac{\pi}{2} + 2t\pi$ ,  $t \in Z$ . Остання серія розв'язків міститься в серії  $x = \frac{\pi}{2} + l\pi$ ,  $l \in Z$ .

**Відповідь.**  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in Z$ ,  $x_2 = -\frac{\pi}{4} + m\pi$ ,  $m \in Z$ ,  $x_3 = 2n\pi$ ,  $n \in Z$ .

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння

$$\sin 2x + \cos 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0.$$

**Розв'язання.** Оскільки  $\sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$ , а  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ , то маємо:  $(\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) = 0$ . Звідси  $(\sin x + \cos x)(1 + 2 \cos x) = 0$  або  $\cos x(\operatorname{tg} x + 1)(2 \cos x + 1) = 0$ , де  $\cos x \neq 0$ . Тоді або  $\operatorname{tg} x = -1$ , тобто  $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ ,  $n \in Z$ , або  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ , тобто  $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2m\pi$ ,  $m \in Z$ .

**Відповідь.**  $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ ,  $n \in Z$  або

$$x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2m\pi, m \in Z.$$

### 2. Раціоналізуючі підстановки.

Розглянемо рівняння  $R(\cos x, \sin x, \dots) = 0$ , раціональне відносно тригонометричних функцій,

© Мазур О. ?, 2019

що містяться в лівій частині. Якщо для виразу  $R$  відома раціоналізуюча підстановка, тобто всі тригонометричні функції, що входять в нього, виражаються у виді раціональних функцій від деякого проміжного аргументу  $t$ , то застосування цієї підстановки приведе до раціонального рівняння відносно  $t$ . Відмітимо такі способи раціоналізації тригонометричних рівнянь.

1) Універсальною підстановкою  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  зводиться до раціонального відносно  $t$  всяке рівняння

$$R(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0, \quad (1)$$

раціональне відносно тригонометричних функцій одного й того самого аргументу  $x$ . Усякий розв'язок  $t = t_1$  рівняння (1) (після підстановки) дає серію розв'язків тригонометричного рівняння:  $x = 2 \arctg t_1 + 2k\pi$ ,  $k \in Z$ .

За допомогою універсальної підстановки можуть бути знайдені всі розв'язки рівняння (1), за винятком розв'язків виду  $x = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in Z$  (у цьому випадку  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  не існує). Наявність або відсутність розв'язків цього виду може бути з'ясовано безпосередньою перевіркою.

Застосуємо універсальну підстановку до розв'язування рівняння, лінійного відносно синуса і косинуса

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (\text{де } a \neq 0 \text{ та } b \neq 0). \quad (2)$$

$$\text{Оскільки } \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$x \neq (2n + 1)\pi$ ,  $n \in Z$  то, поклавши  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , після спрощень одержимо квадратне рівняння

$$(b + c)t^2 - 2at - (b - c) = 0, \quad (3)$$

якщо  $b + c \neq 0$ , тобто якщо  $b \neq -c$ . У цьому випадку воно має два розв'язки

$$t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}, \quad \text{якщо } a^2 + b^2 - c^2 \geq 0,$$

тобто якщо  $a^2 + b^2 \geq c^2$ . Загальний розв'язок

$$\text{рівняння (2) є } x = 2 \arctg \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + 2k\pi,$$

$k \in Z$ . Якщо  $a^2 + b^2 < c^2$ , то в області дійсних чисел рівняння (3) розв'язків не має. Якщо

ж  $b = -c$ , то рівняння (3) перетворюється в рівняння першого степеня  $-2at - 2b = 0$  звідки знаходимо  $t = -\frac{b}{a}$  і тоді маємо другу серію розв'язків для рівняння (2):  $x = -2 \arctg \frac{b}{a} + 2k\pi$ ,  $k \in Z$ . Для випадку  $b = -c$  рівняння також має серію розв'язків  $x = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in Z$ .

2) Рівняння  $R(\cos x, \sin x) = 0$ , що містять  $\cos x$  (або  $\sin x$ ) лише в парних степенях, раціоналізуються підстановкою  $t = \sin x$  (або  $t = \cos x$ ).

3) Рівняння  $a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \dots + a_n \cos^n x = 0$  (1) називається однорідним тригонометричним рівнянням.

*Перший випадок.* Якщо  $a_0 \neq 0$ , то в цьому випадку рівняння (1) не має розв'язків, для яких  $\cos x = 0$ , бо тоді прийдемо до суперечливого наслідку, що  $\sin x = \cos x = 0$ . Поділивши обидві частини (1) на  $\cos^n x \neq 0$ , одержимо рівняння  $a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \dots + a_n = 0$ , еквівалентне йому ж. Поклавши  $t = \operatorname{tg} x$ , дістанемо алгебраїчне рівняння степеня  $n$  відносно  $t$ .

*Другий випадок.* Декілька перших коефіцієнтів дорівнюють нулю:  $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$ ; але  $a_k \neq 0$ . У цьому випадку рівняння набуває вигляду  $\cos^k x (a_k \sin^{n-k} x + a_{k+1} \sin^{n-k-1} x \cos x + \dots + a_n \cos^{n-k} x) = 0$ ; воно еквівалентне двом рівнянням:  $\cos x = 0$  та  $a_k \sin^{n-k} x + a_{k+1} \sin^{n-k-1} x \cos x + \dots + a_n \cos^{n-k} x = 0$ , перше з яких є найпростішим рівнянням, а для другого має місце перший випадок.

*Примітка.* Однорідне рівняння може бути зведено до алгебраїчного також підстановкою  $t = \operatorname{ctg} x$ .

До однорідних можна звести, наприклад, такі рівняння:

1)  $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ . Достатньо праву частину замінити на  $d(\cos^2 x + \sin^2 x)$ , щоб одержати однорідне рівняння другого степеня.

2)  $a \sin^4 x + b \sin^3 x \cos x + c \sin^2 x \cos^2 x + d \sin x \cos^3 x + e \cos^4 x = f$ . Достатньо праву частину замінити на  $f(\cos^2 x + \sin^2 x)$ , щоб отримати однорідне рівняння четвертого степеня.

3)  $a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos 2x + d \cos^2 x = e$ . Достатньо перетворити  $\sin 2x$  та  $\cos 2x$  за відомими формулами і замінити  $e$  на  $e(\cos^2 x + \sin^2 x)$ , щоб дістати однорідне рівняння другого степеня.

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння

$$(\cos x - \sin x) \left( 2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right) + 2 = 0.$$

**Розв'язання.** Застосувавши універсальну підстановку  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  після перетворень одержимо

$$\frac{3t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 2t - 3}{(1+t^2)(1-t^2)} = 0, \text{ звідки (розклавши}$$

чисельник на множники), дістанемо  $(3t^2 - 1)(t^2 + 2t + 3) = 0$ . Дійсні корені останнього рівняння

такі:  $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , звідки  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in Z$ .

Дане рівняння не має розв'язків виду  $(2k + 1)\pi$ , а тому отримана серія є загальним розв'язком.

**Відповідь.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in Z$ .

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння

$$(1 + \cos x) \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} - 2 + \sin x = 2 \cos x.$$

**Розв'язання.** Застосовуючи підстановку  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , одержимо  $\frac{2}{1+t^2} \sqrt{t} - 2 + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2-2t^2}{1+t^2}$  або  $\sqrt{t} = 2 - t$ .

Останнє рівняння еквівалентне змішаній системі

$$\begin{cases} t = (2-t)^2, \\ 2-t \geq 0, \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок  $t = 1$ .

Виходить, повертаючись до первісного невідомого, отримуємо найпростіше тригонометричне рівняння  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$ , звідки знаходимо  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in Z$ .

**Відповідь.**  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in Z$ .

**Приклад 3.** Розв'язати рівняння

$$(\sin^2 x - \sin x + 1)^4 - 6 \sin^2 x (\sin^2 x - \sin x + 1)^2 + 5 \sin^4 x = 0.$$

**Розв'язання.** Дане рівняння являється однорідним відносно  $\sin^2 x - \sin x + 1$  та  $\sin x$ . Поділивши обидві його частини на  $\sin^4 x$  ( $\sin x = 0$  не є коренем) одержуємо рівносильне рівняння

$$\left( \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin x} \right)^4 - 6 \left( \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin x} \right)^2 + 5 = 0.$$

Поклавши  $t = \left( \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin x} \right)^2$  і розв'язавши

рівняння  $t^2 - 6t + 5 = 0$ , знайдемо  $t_1 = 1$  та  $t_2 = 5$ .

Таким чином, вихідне рівняння рівносильне сукупності

$$\left( \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin x} \right)^2 = 1, \left( \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin x} \right)^2 = 5,$$

тобто сукупності  $\sin^2 x - \sin x + 1 = \sin x$ ,  $\sin^2 x - \sin x + 1 = -\sin x$ ,  $\sin^2 x - \sin x + 1 = \sqrt{5} \sin x$ ,  $\sin^2 x - \sin x + 1 = -\sqrt{5} \sin x$ .

Розв'язуючи її, отримаємо  $\sin x = 1$ , тобто

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z \text{ або } \sin x = \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2},$$

тобто  $x = (-1)^k \arcsin \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2} + k\pi$ ,  $k \in Z$ .

**Відповідь.**  $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in Z$ ,

$$x_2 = (-1)^k \arcsin \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Вказані вище й інші частинні прийоми розв'язування тригонометричних рівнянь застосовуються зазвичай в їх різних комбінаціях. Вміння користуватися частинними прийомами набуваються лише у результаті тривалої практики. Ніякими загальними правилами неможливо передбачити також різноманітні штучні способи, які вносять спрощення у процес розв'язування тригонометричних рівнянь.

Нерідко одне й те саме тригонометричне рівняння може бути розв'язане різними способами, при цьому порівняльна простота процесу розв'язання (загалом кажучи) залежить від вибору способу розв'язання. Так, наприклад, рівняння лінійну відносно синуса і косинуса  $a \sin x + b \cos x = c$  може бути розв'язане такими способами:

1) За допомогою універсальної підстановки.

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння

$$2 \sin x + \cos x = 1.$$

**Розв'язання.** Застосувавши універсальну підстановку  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , після перетворень одержимо  $t^2 - 2t = 0$ ,  $t(t - 2) = 0$ , звідки  $t = 0$  або  $t = 2$ , тобто  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$  або  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$ , тобто  $x = 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  або  $x = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Відповідь.**  $x = 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $x = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2) За допомогою введення допоміжного кута.

Визначаючи кут  $\varphi$  з умов (припускається, що  $a$  та  $b$  не дорівнюють нулю одночасно)

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{та} \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1)$$

ми зможемо звести рівняння  $a \sin x + b \cos x = c$  (2) до вигляду  $\pm \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = c$  (3). При цьому саме знаки чисел  $a$  і  $b$  визначають ту чверть, у якій закінчується кут  $\varphi$ .

Поділивши обидві частини (3) на  $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$  (з відповідним знаком), одержимо  $\sin(x + \varphi) = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + n\pi - \varphi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , де  $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$ , або  $c^2 \leq a^2 + b^2$ . Якщо  $c^2 > a^2 + b^2$ , то рівняння розв'язків не має.

Це загальний спосіб введення допоміжного кута. Але часто буває зручно визначити допоміжний кут так, щоб він лежав в межах від 0 до  $\frac{\pi}{2}$ . Якщо замість формул (1) використати для визначення допоміжного кута  $\varphi$  рівності

$$\sin \varphi = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{та} \quad \cos \varphi = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4)$$

то кут  $\varphi$  можна вибрати в першій чверті. Більше того, для визначення  $\varphi$  достатньо скористатися тільки якою-небудь з формул (4), бо кут у першій чверті однозначно визначається значенням си-

нуса (або косинуса). (При бажанні для визначення  $\varphi$  (в межах від 0 до  $\frac{\pi}{2}$ ) можна використати і співвідношення  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{|a|}{|b|}$  (якщо  $a \neq 0$ ), яке випливає з (4). Легко переконатися, що всі ці співвідношення визначають один і той же кут  $\varphi$  в першій чверті).

При цьому, зрозуміло, рівняння  $a \sin x + b \cos x = c$  зводиться не обов'язково до виду  $\pm \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = c$ , а, може бути, до одного з рівнянь  $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x - \varphi) = c$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(-x + \varphi) = c$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(-x - \varphi) = c$  в залежності від знаків чисел  $a$  та  $b$ .

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння

$$-2 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2.$$

**Розв'язання.** Перепишемо його у вигляді

$$\sqrt{7} \left( -\frac{2}{\sqrt{7}} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cos x \right) = 2.$$

Якщо тепер  $\frac{2}{\sqrt{7}}$  прийняти за косинус допоміжного кута  $\varphi$ , а  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$  — за синус цього ж кута, то  $\sqrt{7}(-\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x) = \sqrt{7} \sin(\varphi - x)$ .

Сам кут  $\varphi$  (у межах від 0 до  $\frac{\pi}{2}$ ) можна визначити з рівності  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ , тобто  $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$ ; тому рівняння запишеться у вигляді

$$-\sqrt{7} \sin \left( x - \arcsin \frac{\sqrt{21}}{7} \right) = 2, \quad \text{або}$$

$$\sin \left( x - \arcsin \frac{\sqrt{21}}{7} \right) = -\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

Звідси находимо

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{\sqrt{14}}{7} + \arcsin \frac{\sqrt{21}}{7} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо для визначення допоміжного кута  $\varphi$ , який лежить між 0 та  $\frac{\pi}{2}$ , використати умову  $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}$ , тобто  $\varphi = \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$ , то рівняння запишеться у вигляді  $-\sqrt{7} \sin \left( x - \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7} \right) = 2$ , звідки

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{2\sqrt{7}}{7} + \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Відповідь.**

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{\sqrt{14}}{7} + \arcsin \frac{\sqrt{21}}{7} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{(або } x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{2\sqrt{7}}{7} + \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Підкреслимо, що отримані відповіді — лише різні форми запису коренів заданого рівняння.

Іноколи виявляється вигідніше звести вираз  $a \sin x + b \cos x$  до косинуса суми (або різниці) кута  $x$  та допоміжного кута, який лежить у межах від  $0$  до  $\frac{\pi}{2}$ . Це перетворення також зручно проводити без застосування загальних формул.

**Приклад 3.** Розв'язати рівняння

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 1.$$

**Розв'язання.** Запишемо це рівняння у вигляді

$$2 \left( \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = 1.$$

Ліва його частина зводиться до косинуса деякої комбінації кутів, якщо вираз у дужках представити як розгорнутий косинус суми кута  $2x$  і деякого кута  $\varphi$  (у межах від  $0$  до  $\frac{\pi}{2}$ ).

Але для цього достатньо  $\frac{1}{2}$  взяти за синус допоміжного кута  $\varphi$ , а  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  — за його косинус.

Оскільки у даному випадку  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , то

$$2 \left( \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x - \cos \frac{\pi}{6} \cos 2x \right) = -2 \cos \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right)$$

і початкове рівняння набуде вигляду

$$-2 \left( \cos 2x + \frac{\pi}{6} \right) = 1, \text{ звідки знайдемо}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Відповідь.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$

**Приклад 4.** Розв'язати рівняння  $4 \sin 2x + 3 \cos 2x = 5$ .

**Розв'язання.** Запишемо рівняння у вигляді  $\frac{4}{5} \sin 2x + \frac{3}{5} \cos 2x = 1$  (1) і нехай  $\varphi$  — кут між  $0$  і  $\frac{\pi}{2}$  який задовольняє співвідношенням  $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ , тобто  $\varphi = \arcsin \frac{3}{5}$ . Тоді рівняння (1)

рівносильне рівнянню  $\sin(2x + \varphi) = 1$ , звідки  $x = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Співвідношення, які визначають додатковий кут  $\varphi$ , дозволяє також вибрати  $\varphi = \arctg \frac{3}{4}$ ; тоді

$$x = -\frac{1}{2} \arctg \frac{3}{4} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Насамкінець, можна було б ввести допоміжний кут  $\varphi$ ,  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , так щоб рівняння (1) зводилось до вигляду  $\cos(2x - \varphi) = 1$ . Для цього достатньо вибрати, наприклад,  $\varphi = \arccos \frac{3}{5}$ ; тоді  $x = \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

**Відповідь.**  $x = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

(або  $x = -\frac{1}{2} \arctg \frac{3}{4} + \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$  або

$$x = \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Зауваження.** Отримані формули — лише різні форми запису коренів рівняння (1).

3) Можна виразити одну тригонометричну функцію, наприклад:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad (\text{або } \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}).$$

4) Можна піднести обидві частини до квадрата, тоді вийде рівняння, яке зводиться до однорідного:  $a^2 \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \cos^2 x = c^2$ .

У частинному випадку при  $a = b$  останнє рівняння набуває особливо простий вигляд:  $a^2 \sin 2x = c^2 - a^2$ .

5) Розглянемо тотожність:  $(a \sin x + b \cos x)^2 + (a \cos x - b \sin x)^2 = a^2 + b^2$ . Завдяки умові  $a \sin x + b \cos x = c$ , одержимо:  $(a \cos x - b \sin x)^2 = a^2 + b^2 - c^2$ . Значення  $\sin x$  та  $\cos x$  знаходяться з системи рівнянь:

$$\begin{cases} a \sin x + b \cos x = c, \\ -b \sin x + a \cos x = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}. \end{cases}$$

Невідоме  $x$  знаходиться за знайденими значеннями синуса і косинуса.

### Вправи для самостійного розв'язування

#### Група А

1. Розв'язати рівняння

$$2 \operatorname{tg} x \cos x + 1 = 2 \cos x + \operatorname{tg} x.$$

**А.**  $\frac{\pi}{4} + n\pi; \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$

**Б.**  $\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$

**В.**  $\frac{\pi}{4} + 2n\pi; \pm \frac{\pi}{3} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$  **Г.**  $\emptyset;$

**Д.**  $\frac{\pi}{3} + 2n\pi; \pm \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$

2. Розв'язати рівняння

$$\cos^3 x + \cos^2 x - 4 \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

**А.**  $\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$

**Б.**  $\frac{\pi}{3} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$

**В.**  $\pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$

**Г.**  $2\pi + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$

**Д.**  $\frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$

3. Розв'язати рівняння

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 2x.$$

**А.**  $-\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$

**Б.**  $\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$

**В.**  $\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$  **Г.**  $\emptyset;$

**Д.**  $\frac{\pi}{5} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

4. Розв'язати рівняння  $2 \sin x + \cos x = 1$ .

А.  $2n\pi, n \in \mathbb{Z}; 2 \arctg 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;

Б.  $n\pi, n \in \mathbb{Z}; \arctg 2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;

В.  $\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}; \arctg \frac{1}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;

Г.  $\pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}; \frac{1}{2} \arctg \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ; Д.  $\emptyset$ .

5. Розв'язати рівняння

$$\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0.$$

А.  $\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}; \arctg 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;

Б.  $-\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}; -\arctg 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;

В.  $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}; \arctg 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;

Г.  $\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ; Д.  $\emptyset$ .

6. Розв'язати рівняння

$$5 \cos 2x + 2 \sin 2x = 1.$$

А.  $\arctg \frac{2}{5} + \arccos \frac{1}{\sqrt{29}} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;

Б.  $\frac{2}{5} \arctg \frac{2}{5} - \arccos \frac{1}{\sqrt{29}} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;

В.  $2 \arctg \frac{2}{5} + 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{29}} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;

Г.  $\frac{1}{2} \arctg \frac{2}{5} \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{\sqrt{29}} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ;

Д.  $\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ .

7. Розв'язати рівняння  $\sin x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ .

А.  $n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ;

Б.  $\pi + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ;

В.  $2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ;

Г.  $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ;

Д.  $\pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ .

Група В

1. Розв'язати рівняння  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$ .

2. Розв'язати рівняння  $\operatorname{tg} x + \sin 2x = \frac{1}{\cos x}$ .

3. Розв'язати рівняння  $4 \sin x + 2 \cos x = 2 + 3 \operatorname{tg} x$ .

4. Розв'язати рівняння  $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$ .

5. Розв'язати рівняння

$$3 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + 4 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + 5 \sin \left( 5x + \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

6. Розв'язати рівняння

$$\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3} (\sin 6x + \cos 8x).$$

7. Розв'язати рівняння  $3 \sin^2 x \cos \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) +$

$$3 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \sin^2 \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \cos x = 0.$$

Група В

1. Розв'язати рівняння

$$\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = \frac{1}{2} \cos 6x.$$

2. Розв'язати рівняння  $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$ .

3. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg} x - \frac{8 \sin^2 x + 3 \sin 2x + 1}{8 \cos^2 x + 3 \sin 2x + 1} = 0.$$

4. Розв'язати рівняння

$$(\cos x - \sin x) \left( 2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right) + 2 = 0.$$

5. Розв'язати рівняння

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 4x = 2.$$

6. Розв'язати рівняння

$$4 \cos^2 x - 2 + \frac{1}{2} \cos 2x \left( \frac{\sqrt{3}}{\cos 2x} + \frac{1}{\sin 2x} \right) = 0.$$

7. Розв'язати рівняння

$$2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos^2 x \right) = 1 - \cos(\pi \sin 2x).$$

Відповіді

Група А

1. А; 2. В; 3. В; 4. А; 5. Б; 6. Г; 7. В.

Група Б

1.  $\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}; 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

2.  $(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ .

3.  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ;

$-2 \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ .

4.  $-\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} - (-1)^k \arcsin \frac{2-\sqrt{2}}{2} + k\pi,$   
 $k \in \mathbb{Z}$ .

5.  $\frac{1}{4} \arctg \frac{4}{3} - \frac{\pi}{24} + \frac{2k+1}{4} \pi, k \in \mathbb{Z}$ .

6.  $\frac{\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$ .

7.  $\pm \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Група В

1.  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . 2.  $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

3.  $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . 4.  $\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

5.  $\emptyset$ . 6.  $\frac{\pi}{12} + m\pi, m \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{36} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ .

7.  $\frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}; \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ .

ЛІТЕРАТУРА

1. Захарійченко Ю. О. Повний курс математики в тестах / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. — 3-тє видання. — Х.: Вид-во «Ранок», 2013. — 496с. — (Енциклопедія тестових завдань).

2. Листопад В. В., Мазур О. К. Готуємось до ЗНО. Математика // «Оріон». — 2017.