В.В. ЛИСТОПАД, В.П. ШОХА
НУПТ (Киев, Украина)

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

При изучении уравнений математической физики (уравнение колебания струны, уравнение тепло проводимости, колебание струны под действием сосредоточенного импульса, колебание бесконечной струны, колебание струны в среде с вязким сопротивлением и др.) используются разложения в ряды Фурье с вычислением определённых интегралов. Процесс интегрирования очень трудоемкий и громоздкий, поэтому целесообразно воспользоваться программными средствами, в которых есть возможность вычисления интегралов (Mathcad, Mat lab, Gran, Gran1, и др).

Рассмотрим некоторые теоретические вопросы математической физики (без доказательств) и примеры вычислений в Mathcad.

Сформулируем математическую постановку задачи [1, с. 40 – 43], к которой приводит изучение свободных колебаний струны, закреплённой на обоих концах.

Нужно решить однородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

при начальных условиях $u(x,0) = f(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi)x)$ (2)

и предельных условиях $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0.$ (3)

Функции $f(x), \varphi(x)$ определены на промежутке $[0;l]$ и, как следует из первого условия (2) и условий (3), $f(0) = f(l) = 0.$ Будем искать ненулевое частное решение уравнения (1) в виде произведения $X(x)$ и $T(t)$:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \qquad (4)$$

Пользуясь методом Фурье и решая проблему Штурма-Ливуиля получим решение задачи (1)

$$u(x,t)=\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi kat}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi kat}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right). \quad (5)$$

Если $t=0$, то из (5), получим выражение:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right). \qquad (6)$$

Если функция $f(x)$ такая, что в интервале $(0,l)$ ее можно разложить в ряд Фурье , то условие (6) выполняется, если

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)dx. \qquad (7)$$

Далее дифференцируем ряд (5) по переменной t и положим $t=0$, получим:

$$u_t'\,\left(x,0)\right)=\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\frac{\pi ka}{l}\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right). \qquad (8)$$

Аналогично (7) определяем коэффициенты b_k :

$$b_k=\frac{2}{\pi ka}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)dx. \qquad (9)$$

Рассмотрим пример. Найти закон колебания струны длиной $\ell=10$см, который удовлетворяет уравнение $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$ при заданных предельных условиях:

$u(0;t)=u(l;t)=0$ – концы струны закреплены,

$u(x;0)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\le x\le 4\\ \dfrac{10-x}{9}\end{cases}$ – начальная форма струны,

$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x;0)=\varphi(x)=0$ – начальная скорость струны.

Решение. Согласно методу Фурье решение задачи имеет вид:

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nat}{\ell}+b_n\sin\frac{\pi nat}{\ell}\right)\sin\frac{\pi nx}{\ell}$$

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx=\frac{2}{10}\left(\int_0^4\frac{x}{6}\sin\frac{\pi n x}{10}dx+\int_4^{10}\frac{10-x}{9}\sin\frac{\pi n x}{10}dx\right)=\frac{1}{5}(I_1+I_2).$$

Вычислим интегралы I_1 та I_2, пользуясь программой MATHCAD. Получим:

$$\left[\int_0^4\frac{x\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{10}\right)}{6}dx+\int_4^{10}\frac{(10-x)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{10}\right)}{9}dx\right]\rightarrow\frac{100\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{5}\right)-100\cdot\sin(\pi\cdot n)+60\cdot\pi\cdot n\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{5}\right)}{9\cdot\pi^2\cdot n^2}+\frac{50\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{5}\right)-20\cdot\pi\cdot n\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{5}\right)}{3\cdot\pi^2\cdot n^2}$$

и после приведения к общему знаменателю, получим:

$\frac{1}{5}(I_1+I_2)=\frac{50}{9\pi^2n^2}\sin\frac{2\pi n}{5}$. Поскольку $\varphi(x)=0$, то $b_n=0$.

Поэтому решение задачи имеет вид:

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{50}{9\pi^2n^2}\sin\frac{2\pi n}{5}\cos\frac{\pi n a t}{10}\sin\frac{\pi n x}{10}=\frac{50}{9\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{2\pi n}{5}\cos\frac{\pi n a t}{10}\sin\frac{\pi n x}{10}.$$

Вычисление интегралов I_1, I_2 в «ручном» режиме занимает почти час, а с помощью компьютера 5 – 10 минут, то есть, в десять раз меньше. Среди преимуществ использования компьютерных технологий в учебном процессе следует отметить:

- экономию аудиторного времени на практическом занятии;
- значительное упрощение механизма осуществления контроля выполнения задачи;
- простота и доступность в работе;
- возможность использовать компьютер для подготовки системы упражнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиненко М.А., Легеза В.П. Інженерні задачі математичної фізики:Навч. посібн.-К.: НУХТ, 2008. – 389 с.