Володимир Листопад, Олексій Зінькевич, Олег Мазур (Київ, Україна)

ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ НА ЗНО

Анотація. В доповіді розглянуто три типи розв'язування задач з параметрами,які пропонувалися на ЗНО з математики в різні роки. Це задачі із закладеною ідеєю, графічно-аналітичне розв'язування та дослідницький метод (перебір варіантів).

Ключові слова. Задачі з параметрами, ЗНО з математики (Зовнішнє незалежне оцінювання), логічне мислення, математична культура, дослідницькі навички.

Останнє десятиріччя задачі з параметрами є постійним складником тестів з математики на зовнішньому незалежному оцінюванні. Статистика результатів ЗНО показує, що для більшості випускників шкіл такі задачі є каменем спотикання. Очевидно, що до «зустрічі» з такими задачами потрібна спеціальна підготовка. Як свідчать спостереження, в більшості навчальних закладів задачі з параметрами розглядають дуже поверхнево або взагалі оминають, і тому навіть проста нерівність з параметром $ax > -1$ залишається нерозв'язаною випускником. Ми застерігаємо, щоб у читачів не сформувалося уявлення про задачі з параметрами, як штучну перешкоду для отримання високого балу. Незалежно від того, чи включені ці задачі в тести ЗНО, вони мають бути присутні в шкільному курсі математики (особливо в профільних класах). В цьому переконані як вчителі, так і викладачі ВНЗ. Оскільки добре відомо, яку роль відіграють ці задачі для формування логічного мислення, математичної культури та дослідницьких навичок у школярів. Тому учні, які володіють методами розв'язування задач з параметрами, успішно справляються із іншими видами завдань.

Мета даної доповіді – «відкрити завісу», тобто описати основні типи задач з параметрами та деякі підходи до їх розв'язування. Звичайно, все це умовно, оскільки задачі з параметрами не можна однозначно віднести до жодної з тем. Це можуть бути нерівності, властивості функцій, рівняння тощо.

В доповіді ми виокремлюємо три основних типи задач з параметрами, які найчастіше зустрічаються в завданнях ЗНО.

І тип. Це задачі із закладеною ідеєю. Звичайно ідея може бути різна: властивості функцій, повний квадрат, теорема Вієта, метод мажорант тощо.

Приклад 1 (ЗНО 2013 р.). Знайдіть значення параметра a, при якому корінь рівняння $\lg\left(\sin 5\pi x\right)=\sqrt{16+a-x}$, належить проміжку $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Розв'язування. Бачимо, що $\lg\left(\sin 5\pi x\right)\le 0$, а $\sqrt{16+a-x}\ge 0$.

Рівність матимемо лише тоді, коли ці вирази одночасно дорівнюють нулю.

$$\begin{cases}\lg\left(\sin 5\pi x\right)=0,\\ \sqrt{\sqrt{16+a-x}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{s}in5x=1,\\ 16+a-x=0.\end{cases}$$

Очевидно, що розв'язання останньої системи не викличе складнощів в учнів. Зауважимо, що потрібно не випускати з поля зору область визначення функції та параметра.

Подібна ідея, також закладена в **прикладі 2** (ЗНО 2014).

Знайдіть найменше значення параметра a, при якому рівняння

$2^{\sin^2\left(2\pi x+\frac{5\pi}{4}\right)}=\dfrac{4}{\sqrt{\left(x-a\right)^2-6\left(x-a\right)+13}}$ має додатній корінь.

Розв'язування . Оскільки

$$1\le 2^{\sin^2\left(2\pi x+\frac{5\pi}{4}\right)}\le 2 \text{ і } \frac{4}{\left(\left(x-a\right)^2-6\left(x-a\right)+9\right)+4}=\frac{4}{\left(x-a+3\right)^2+4},$$

то цей вираз набуває найбільшого значення 1, при $x-a+3=0$. Отже задане рівняння зводиться до розв'язання системи:

$$\begin{cases}\sin^2\left(2\pi x+\dfrac{5\pi}{4}\right)=0\\ x-a+3=0, a\to\min, x>0.\end{cases}$$

Приклад 3. При яких значеннях параметра c рівняння

$x^2+c\cos x+3=0$ має єдиний розв'язок.

Розв'язування. Легко побачити, що якщо x_0 - розв'язок, то $-x_0$ також є розв'язком рівняння. Тоді, враховуючи єдиність (функція парна, і $x_0 = -x_0$), отримаємо, що $x_0 = 0$. Параметр c знаходимо простим підрахунком $\left(c = -3\right)$.

Аналогічні міркування можна провести і для системи.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} |x| + y = e, \\ \ln y + x^2 + a^2 = 5 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

З використанням властивостей функції (монотонність або парність/непарність) можна розв'язати наступне завдання.

Приклад 5 ([4, с.161]). За яких значень параметра a рівняння $x^2 - 2a\sin\left(\cos x\right) + 2 = 0$ має єдиний розв'язок?

II тип – це так зване графічне (аналітично-графічне) розв'язання завдань. Звичайно, розв'язання завдань даного типу потребує навичок побудови графіків елементарних функцій прямої, параболи (квадратичної або кубічної), напівпараболи, гіперболи (обернена пропорційність), показникової та логарифмічної, тригонометричних а також побудови графіків типу $y = f(x) \pm a, y = f(x \pm a), y = a \cdot f(x), y = f(ax), y = \left| f(x) \right|, y = f\left(|x|\right), |y| = f(x),$ та інші [4, с. 21-23].

Приклад 6. При яких значеннях параметра a рівняння $\left|x^2 - 5|x| + 6\right| = a$ має найбільшу кількість розв'язків (ЗНО, 2010).

Приклад 7. Знайти найменше значення параметра a , при якому система

$\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має чотири розв'язки.

III тип. Дослідницький (або перебір варіантів). Цей спосіб вимагає розгляду всіх випадків розташування параметра a відносно відомих коренів. В цьому типі задач можна виокремити задачі, що мають в умові квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$. Зауважимо, що цей поліном буде квадратним, лише коли $a \neq 0$ а випадок $a = 0$ розглядати окремо. Графіком $f(x)$ буде парабола з вершиною $(x_0; y_0)$, де $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = f(x_0)$, точками перетину з віссю Ox, що знайдені з рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, та віссю Oy $(0; c)$. Вітки параболи направлені вверх при $a > 0$ і вниз при $a < 0$. Знаючи як розташована парабола, коли $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ для будь-якого значення x, можна встановити, коли корені рівняння будуть додатні, від'ємні, різного знаку. До цього типу належать задачі на розташування коренів відносно заданого числа (точки на осі координат).

Приклад 9. Розв'язати нерівність $x^2 - ax - 2x + 2a > 0$ для всіх значень параметра a.

Приклад 10 (ЗНО 2018). Розв'яжіть нерівність $\sqrt{\dfrac{4x-1}{x-a}} > a$ залежно від значень параметра a.

Звичайно цими типами задачі з параметрами не вичерпуються. У наступних публікаціях ми розкриємо сутність інших підходів до розв'язання таких типів задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мазур О., Листопад В. **Про пріоритетність при підготовці до ЗНО та аналіз тестових завдань з математики за 2013 — 2015 рр./** Математика в рідній школі №5, 2017, с. 6-15.

2. ЗНО з математики 2010,2013, 2014 рр./testportal.gov.ua.

3. Горнштейн П., Полонский В., Якир М. Задачи с параметрами.-К. : РИА «Текст» : МП «ОКО», 1992.-290 с.

4. Листопад В. Готуємося до ЗНО. Математика:навч. посібник/В.В.Листопад, О.К.Мазур. – К.: УОВЦ «Оріон», 2016. -176 с.