

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

**І.В. ДУБКОВЕЦЬКИЙ,  
В.Р. КУЛІНЧЕНКО**

**ГІДРОГАЗОДИНАМІКА**

**КУРС ЛЕКЦІЙ**

**для студентів напрямку**

**0925 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" денної,  
заочної та скороченої форм навчання**

**СХВАЛЕНО**

на засіданні кафедри  
процесів і апаратів  
харчових виробництв  
та технології  
консервування  
Протокол № 11  
від 16. 04. 2008р.

**Київ НУХТ 2009**

**І.В. Дубковецький, В.Р. Кулінченко.** Гідрогазодинаміка: курс лекцій для студ. для студентів напрямку 0925 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" денної, заочної та скороченої форм навчання. — К.: НУХТ, 2009 — 95 С.

Рецензент **С.М. Василенко**, д-р техн. наук

Дубковецький І.В., к.т.н., доцент  
Кулінченко В.Р., д.т.н., професор

**Видання подається в авторській редакції**

© І.В. Дубковецький  
В.Р. Кулінченко,

© НУХТ, 2009

## ЗМІСТ

Вступна лекція. Попередні поняття.....	3
1. Гідрогазостатика.....	11
Гідростатичний тиск та його властивості.....	11
Диференціальні рівняння (рівняння Ейлера).....	12
Основне рівняння гідростатики.....	14
Геометричний зміст основного рівняння гідростатики.....	15
Гідравлічні прилади, що застосовуються для вимірювання тиску, вакууму, перепаду тисків.....	16
Визначення сили тиску і центра тиску на тверду плоску стінку, що занурена в рідину під кутом до горизонту.....	29
Визначення сили тиску і центра тиску на криволінійні стінки, що занурені у рідину.....	22
Визначення сили і центра тисків на циліндричну поверхню, занурену у рідину.....	24
Поверхні рівного тиску.....	26
Визначення форми вільної поверхні рідини в місткості.....	26
Форма вільної поверхні рідини, що знаходиться у циліндрі, який обертається разом з рідиною навколо вертикальній осі зі сталою кутовою швидкістю.....	26
Рівновага газу з урахування його стисливості.....	28
2. Гідрогазодинаміка.....	30
Струмінна модель потоку.....	30
Диференціальні рівняння руху ідеальної рідини.....	33
Властивість живих перерізів.....	38
Рівняння Бернуллі для потоку нестисливої рідини.....	39
Гідравлічний ухил.....	42
Геометричний (енергетичний) зміст рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини при усталеному русі.....	43
Приклад застосування рівняння Бернуллі сумісно з рівнянням нерозривності потоку.....	45
Основне рівняння рівномірного руху.....	47
Режими руху рідини.....	49
Закони ламінарного руху рідини.....	51
Закон залежності втрати напору за довжиною від геометричних і гідродинамічних параметрів потоку.....	53
Турбулентний рух рідини.....	53
Пристінний шар і ядро течії.....	54
Закон розподілу швидкості в ядрі потоку.....	55
Втрати напору за довжиною труби при турбулентному русі рідини.....	57
Середня швидкість і витрата рідини в трубопроводах і каналах будь-якої форми (для квадратичної зони турбулентного потоку).....	61
3. Гідравлічні розрахунки трубопроводів.....	63

Гідравлічний розрахунок простого короткого трубопроводу.....	63
Гідравлічний розрахунок довгого (він же простий) трубопроводу.....	65
Гідравлічний розрахунок сифонного трубопроводу.....	68
Втрати напору в трубопроводах зі змішаною, шляховою і транзитною витратами рідини.....	70
Основи техніко-економічного розрахунку трубопроводів.....	71
Гідравлічні характеристики трубопроводів.....	72
Гідравлічні розрахунки елементів складних трубопроводів.....	73
Гідравлічний удар в трубах.....	79
Витікання рідини крізь отвори і насадки.....	80
Визначення швидкості витікання рідини і витрати рідини крізь малий отвір в тонкій .....	82
Витікання рідини крізь великі отвори в тонкій стінці.....	83
Витікання рідини крізь насадки.....	85
Витікання рідини при змінному напорі.....	86
Витікання стисливої рідини (газу) з отворів.....	87
Основи гідродинамічної теорії подібності.....	88
Питання для самоперевірки знань.....	92
Список рекомендованої літератури.....	95

Курс лекцій складено відповідно до програми навчальної дисципліни “Гідрогазодинаміка”.

Курс складається з трьох розділів:

1. Гідрогазостатика. Вивчає закони спокою рідин і газів.
2. Гідрогазодинаміка. Вивчає закони руху рідин і газів.
3. Гідравлічні розрахунки трубопроводів.

Розраховані на студентів денної, заочної та скороченої форм навчання спеціальностей ”Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології” при вивченні курсу і виконанні контрольних завдань.

## ТЕКСТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ ГІДРОГАЗОДИНАМІКА

### Вступна лекція. Попередні поняття.

**Предмет гідрогазодинаміка.** Наука про рух рідини і газу в широкому значенні слова є предметом гідрогазодинаміки. В залежності від галузі застосування гідрогазодинаміка має і інші назви: **гідравліка**, якщо розглядаються закони спокою і руху при сталій густині краплинної чи газової рідини; **аеродинаміка** — пов’язано з тією роллю, яку відіграє знання законів руху повітря в галузях вентиляції; **газодинаміка** — наука про рух газу (і повітря) при великих швидкостях, близьких до швидкості звуку і більших.

Необхідні відомості з газодинаміки будуть наведені в темах гідрогазостатики і гідрогазодинаміки.

Метою вивчення дисципліни ”Гідрогазодинаміка” є засвоєння студентами понять і законів **гідравліки і газодинаміки** та застосування їх надалі у процесі вивчення спеціальних дисциплін та проведення необхідних інженерних розрахунків.

Предмет **”Гідрогазодинаміка”** базується на дисциплінах **”Вища математика”, ”Фізика”, ”Теоретична механіка”, ”Прикладна механіка”, ”Термодинаміка”**.

Знання курсу **”Гідрогазодинаміка”** є теоретичною основою для вивчення таких спеціальних дисциплін, як **”Гідравлічні машини і холодильні установки”, ”Технологічне обладнання галузі”, ”Вентиляційне обладнання”, ”Теплосилове господарство цукрових та інших заводів”, ”Парогенератори”, ”Опалення і вентиляція”, ”Водопостачання і каналізація”, ”Газопостачання”**.

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

**знати** основні закони статички і динаміки рідин і газів;

**вміти** застосовувати ці закони в інженерних розрахунках місткостей, що працюють під тиском рідин і газів, у гідравлічних розрахунках простих і складних трубопроводів і газопроводів; при витіканні рідин і газів крізь отвори і насадки та ін.

**Попередні поняття.** Рідина може бути краплинною і газоподібною. Краплинні рідини (вода) практично нестисливі, тоді як гази легко стискаються.

Газ не має власного об'єму і цілком заповнює всю місткість, в якій він знаходиться. Краплинною рідиною можна заповнити частину місткості, причому поверхня розділу краплинної рідини і оточуючого її газу утворює вільну поверхню.

Поняття **рідина** охоплює як краплинну так і газоподібну рідину. Рідина представляє собою сукупність частинок диференціальних розмірів, щільно притиснутих одна до одної. Всі властивості, які має рідина в деякому об'ємі чи в потоці, притаманні частинкам цієї рідини.

Рідини і гази мають одну спільну властивість, яка різко відрізняє їх від твердих тіл, а саме — плинність (текучість), малу опірність змінюванню форми.

**Рідина** — це фізичне тіло, яке має властивість плинності, тобто рідина тече (частинки рідини переміщуються одна відносно другої) під дією будь-яких малих зовнішніх сил, прикладених до неї.

Якщо розглядається газ без врахування його стисливості, то застосовується термін "нестислива рідина". У випадках, коли необхідно враховувати стисливість газу, кажуть "стислива рідина".

**Уявною (ідеальною) рідиною** називається рідина, між частинками якої відсутні сили зчеплення. Тобто при відносному переміщенні сукупних частинок уявної рідини не виникає сила тертя, а в реальній рідині виникає. Поняття уявної рідини застосовується для спрощення виводів систем диференціальних рівнянь рухомих частинок рідини, а також їх інтегрування.

При русі реальної рідини між сукупними частинками, що рухаються з різними швидкостями, виникає сила тертя, тобто опір їх відносному переміщенню (зсуву).

**В'язкість.** Властивість рідини чи газу при їх русі чинити опір відносному переміщенню своїх частинок називається в'язкістю. Тобто в'язкість рідин проявляється тільки при їх русі.

**Закон Ньютона про внутрішнє тертя в рідині.** Цей закон формулюється так: сила тертя, що виникає між сукупними частинками рідини, які рухаються з різними швидкостями прямо пропорційна площі доторкання цих частинок, прямо пропорційна градієнту швидкості, залежить від роду рідини, що рухається, і не залежить від тиску

$$T = \mu F \frac{du}{dr} \quad (1)$$

де  $T$  — сила тертя, н;

$\mu$  — динамічний коефіцієнт в'язкості, н·сек/м<sup>2</sup>;

$F$  — площа доторканості сукупних частинок, м<sup>2</sup>;

$\frac{du}{dr}$  — градієнт швидкості, сек<sup>-1</sup>.

Коефіцієнт  $\mu$  характеризує рідину з точки зору в'язкості.

З метою визначення градієнта швидкості розглянемо епюру розподілу швидкості при ламінарному русі в циліндричній трубі. Як відомо це є симетрична парабола (рис.1).

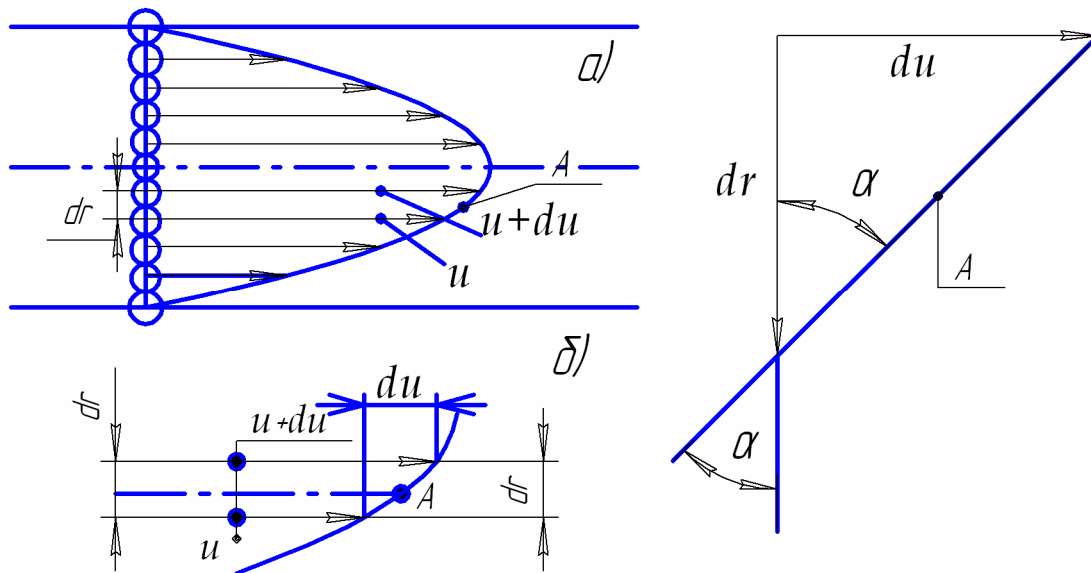


Рис. 1

Виділимо в потоці, як показано на рис.1 а, б в поперечному перерізі дві сукупні частинки рідини з векторами швидкості "u" і "(u+du)". Відстань між центрами ваги цих частинок "dr". Точка "A" на кривій розподілу швидкості відповідає точці доторкання сукупних частинок. Проведемо через цю точку дотичну до елемента кривої розподілу швидкостей. Тоді (як видно з рис. 1 а, б) градієнт швидкості визначається як тангенс кута між дотичною, проведеною через точку "A" і вертикаллю. Тобто

$$\frac{du}{dr} = \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

Градієнт швидкості характеризує інтенсивність зміни відносного переміщення частинок у вертикальному напрямку.

**Дотична напруга "τ"**, що виникає в будь-якій точці потоку від сили тертя визначається як

$$\tau = \frac{P}{F}, \text{ або } \tau = \mu \frac{du}{dr} \quad (3)$$

Динамічний коефіцієнт в'язкості і його розмірність визначається з формули (3)

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{\left[ \frac{du}{dr} \right]} = \frac{\text{н}}{\text{м}^2} \cdot \text{сек} = \text{па} \cdot \text{сек}, \quad (4)$$

$$\text{або } [\mu] = \text{па} \cdot \text{сек} = \frac{\text{н}}{\text{м}^2} \cdot \text{сек} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2 \cdot \text{сек}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{сек}} \quad (5)$$

Часто для характеристики в'язкості рідин і газів застосовують не динамічний, а **кінематичний коефіцієнт в'язкості**, куди не входять динамічні величини. Відношення коефіцієнта динамічної в'язкості до густини тієї ж самої рідини називається кінематичним коефіцієнтом в'язкості, тобто

$$\gamma = \frac{\mu}{\rho}, \quad (6)$$

де  $\gamma$  — коефіцієнт кінематичної в'язкості;  
 $\rho$  — густина рідини,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

$$[\gamma] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{сек}} \frac{\text{м}^3}{\text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{сек}} \quad (7)$$

Величини коефіцієнтів в'язкості рідин визначають за допомогою приладів, які називаються **віскозиметрами**. Ці прилади різноманітні як своєю конструкцією, так і за принципом дії (в конструкціях застосовуються методи капіляра, падіння кульки, коливальних або обертальних рухів циліндрів і дисків у досліджувальних рідинах і газах, електричний метод та ін.).

В'язкість рідин і газів практично не залежить від тиску, але дуже залежить від температури. В'язкість води з підвищенням температури швидко зменшується, а в'язкість газів, навпаки, зростає.

Як приклад приведемо значення кінематичного коефіцієнта в'язкості при  $t = 20^\circ \text{C}$  для води  $\gamma = 0,01 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{сек}$ , а для повітря  $\gamma = 0,15 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{сек}$ . Тобто, при  $t = 20^\circ \text{C}$  кінематична в'язкість повітря в 15 раз більша, ніж води.

**Густина однорідного середовища** є масою одиниці об'єму

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (8)$$

де  $m$  — маса рідини, кг;

$V$  — одиниця об'єму,  $\text{м}^3$ .

$$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

**Густина газів** визначається з рівняння стану. Для ідеальних газів (повітря, природний газ) при відносно невеликих тисках (менш як 100 ат) і температурах (менш як  $100^\circ \text{C}$  і більш як  $0^\circ \text{C}$ ) рівняння стану для газів буде рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$pv = RT, \quad (9)$$

де  $T$  — термодинамічна температура,  $^\circ \text{K}$ ;

$R$  — газова стала,  $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$ ;

$v$  — питомий об'єм газу,  $\text{м}^3/\text{кг}$ .

Оскільки  $v = \frac{1}{\rho}$ , рівняння стану можна записати так:

$$\rho = \frac{p}{RT}. \quad (10)$$

Це рівняння дає можливість визначити густину газу при відомому тиску і температурі.

У технічних розрахунках густину газу зводять до нормальних фізичних умов ( $t = 0^\circ \text{C}$  і тиск атмосфери 760 мм.рт.ст. =  $101325 \text{ н/м}^2$ ), або до стандартних умов ( $t = 20^\circ \text{C}$  і тиск  $101325 \text{ н/м}^2$ ).

Тоді густина стандартного повітря

$$\rho = \frac{101325}{287(273 + 20)} = 1,2 \text{ кг/м}^3. \quad (11)$$

Густина краплинних рідин практично не залежить від тиску і в незначній мірі зменшується з підвищенням температури.

За певних умов рідини переходять в гази, і навпаки, гази можна перетворити



в краплинній рідині. Цей перехід залежить від тиску (пружності) парів рідин, що насичують простір при даній температурі. Так як вода при  $t=20^{\circ}\text{C}$  закипає при тиску  $2350 \text{ н/м}^2$  ( $P_{\tau}=0,0235 \text{ ат}$ , або  $0,235 \text{ м.вод.ст.}$ ), то у всмоктувальних трубах насосних установок, сифонах та ін., при  $t < 20^{\circ}\text{C}$  і тисках  $< 2350 \text{ н/м}^2$  виникає кавітація, тобто закипає вода, що порушує роботу в цих установках і в трубах.

**Стисливість.** Рідини при стисканні поводять себе, як пружні тіла, тобто підлягають закону Гука:

$$-\frac{dV}{V} = \frac{dp}{E} \quad (12)$$

де  $V$  — початковий об'єм рідини;

$dV$  — зменшення цього об'єму при збільшенні тиску на  $dp$ ;

$E$  — модуль об'ємної пружності.

Величину, обернену модулю пружності, називають коефіцієнтом об'ємного стиску, який виражається формулою:

$$\beta_v = \frac{1}{E} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \quad (13)$$

Деформація стиску для води (та інших краплинних рідин) дуже незначна.

На відміну від краплинних рідин газів зазнають значних деформацій стиску.

Стисливість характеризується також відношенням прирощення тиску до приросту густини, спричиненого зміною тиску. З фізики відомо, що це відношення дорівнює квадрату швидкості поширення звуку в середовищі, тобто:

$$a^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \quad (14)$$

Очевидно, що для малостисливих рідин і газів при великих змінах тиску  $\Delta p$  зміна густини буде малою і швидкість звуку буде великою, а для дуже стисливих рідин при малих  $\Delta p$  зміна густини буде більша, а швидкість звуку малою.

Звідси, **мірою стисливості рідин і газів** може бути швидкість звуку. Чим більша швидкість звуку в даному середовищі, тим менша стисливість цього середовища. Так, стисливість води, швидкість звуку в якій близька  $1400 \text{ м/сек}$  значно менша від стисливості повітря, в якому швидкість звуку дорівнює приблизно  $300 \text{ м/сек}$ . В нестисливому середовищі швидкість звуку ( $a$ ) дорівнює безмежності.

Для оцінки стисливості рідин і газів при русі користуються не абсолютним значенням швидкості звуку, а відношенням швидкості течії ( $u$ ) до швидкості звуку ( $a$ ). Це відношення в газодинаміці називається числом Маха

$$M = \frac{u}{a} \quad (15)$$

У випадку, коли в усій зоні руху швидкість мала порівняно із швидкістю звуку в цьому середовищі, число Маха буде мале порівняно з одиницею, незалежно від того чи розглядаємо ми рух рідин чи газів, рухливе середовище можна розглядати як нестисливу рідину.

Швидкості течії повітря в повітропроводах, газу в газопроводах низького тиску і газоходах котельних установок, води в водопровідних лініях не перевищують (відповідно) значень  $12$ ,  $25$  і  $2,5 \text{ м/с}$ . Тому в практиці

водопостачання, тепловодопостачання і вентиляції не тільки краплинні рідини, а й гази можна вважати нестисливими.

При русі газів із швидкостями понад 70 м/сек, а також в деяких інших випадках вже слід враховувати вплив стисливості, тобто приймати умову  $\rho \neq \text{const}$  і гази при цьому розглядають як стисливу рідину.

Дисципліна "гідравліка" вивчає закони, яким підпорядковується **ньютонівська рідина**, що знаходиться в станах спокою чи рухається.

Якщо графічна залежність дотичних напруг ( $\tau$ ) від зміни градієнта швидкості ( $du/dr$ ) є пряма, яка виходить з початку координат, то ця рідина є ньютонівська.

**Неньютонівськими рідинами**, до яких, наприклад, відносяться патоки, сиропи, цементні розчини, суспензії та ін. займається дисципліна, яка називається інженерною реологією.

**Стан спокою чи руху** рідини здійснюється під дією зовнішніх сил, прикладених до неї. Молекулярні сили взаємодії в рідині не впливають на стан рідини.

Молекулярною теорією в гідравліці пояснюється тиск поверхневого молекулярного шару на рідину. Доводиться, наприклад, що тиск поверхневого молекулярного шару на воду дорівнює 10 000 ат. Цим пояснюється, що на силу тертя в рідині тиск, що прикладений на рідину, практично не впливає, також краплинна рідина практично не стискається, тобто не змінює свій об'єм при зміні тиску. Також молекулярною теорією пояснюється форма меніска в капілярних трубках (вигнута чи випукла).

**До зовнішніх сил**, що діють на рідину відносяться поверхневі та масові сили.

**Поверхневі сили** — це сили, що діють на вільні поверхні рідини, а також дія стінок посудин, в яких знаходиться рідина. До поверхневих сил відносяться сили тертя між потоком і стінками, в яких вона рухається, а також між суміжними частинками потоку, що рухаються з різними швидкостями.

**Масові сили** — це сили, що діють на кожен частинку даного об'єму чи потоку рідини. До масових сил в гідравліці відносяться сили ваги і сили інерції.

Під дією зовнішніх сил в рідині в будь-якій точці виникає напруга, яка називається гідромеханічним тиском. В розділі гідростатика, коли рідина знаходиться в стані спокою, гідромеханічний тиск називається гідростатичним, а в розділі гідродинаміка (при русі рідини) – гідродинамічним.

## ГІДРОГАЗОСТАТИКА

**Гідростатика** — це розділ гідравліки, що вивчає закони, яким підпорядковується рідина, знаходячись в стані абсолютного чи відносного спокою.

**Абсолютний спокій** рідини має місце коли частинки в даному об'ємі не пересуваються одна відносно другої і місткість разом з рідиною не переміщаються відносно зовнішньої точки відліку. При цьому з масових сил на рідину діє тільки сила ваги.

**Відносним спокоєм** рідини називається спокій рідини відносно місткості, в якій вона знаходиться. При цьому частинки рідини не пересуваються одна відносно другої, але місткість разом з рідиною переміщається відносно зовнішньої системи відліку. Наприклад: рух місткості з рідиною за горизонтальним прямолінійним напрямком зі сталим прискоренням; обертання рідини в циліндричній місткості навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю.

**Основною задачею гідростатики** є знаходження закону розподілу гідростатичного тиску в даному об'ємі рідини, на основі якого виводяться певні залежності для визначення: сили тисків на плоскі і криволінійні поверхні і точки прикладення цих тисків на відповідні поверхні, занурених у рідину; умов рівноваги рідини у гідравлічних приладах для вимірювання тисків, вакуумів, перепадів тисків; визначення форм вільних поверхонь при відносному спокої, та ін.

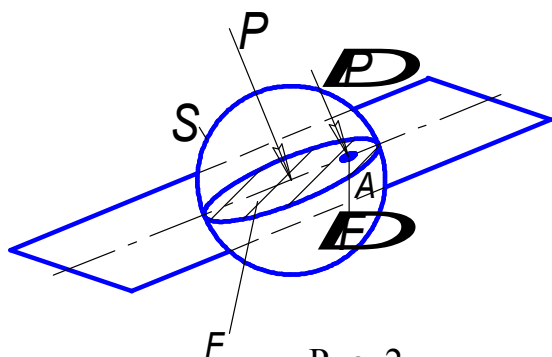


Рис. 2

**Гідростатичний тиск та його властивості.** З об'єму рідини, яка знаходиться в стані спокою, подумки виділимо певний об'єм рідини (рис.2) і розітнемо його площиною, яка поділить його на верхню і нижню частини. Відкинемо верхню частину і її дією замінимо силою гідростатичного тиску  $P$ , яка рівномірно розподіляється на площі  $F$ . Тоді середній гідростатичний

тиск на цій площі буде:

$$p = \frac{P}{F}, \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right], \text{па} \quad (15)$$

Тиск в дані точці  $p_A$  визначається як

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} = p_A,$$

де  $\Delta F$  - скіл навколо точки  $A$ ;

$\Delta P$  - елементарна сила, що діє на елементарну площу  $\Delta F$ ;

$dP$  і  $dF$  – повні диференціали тиску і площі.

Тоді

$$dP = p_A \cdot dF,$$

Тобто елементарна сила тиску  $dP$ , що діє на елементарну площу  $dF$  дорівнює добутку тиску в будь-якій точці на  $dF$  на цю саму  $dF$ . (гідростатичний тиск в межах елементарної площі однаковий в кожній точці).

**Перша властивість гідростатичного тиску.** Гідростатичний тиск завжди направлений за внутрішньою нормаллю до площі дії.

**Друга властивість гідростатичного тиску** полягає в тому, що в даній точці певного об'єму рідини величина гідростатичного тиску однакова в усіх напрямленнях, тобто

$$p_x = p_y = p_z = p_n \quad (17)$$

**Диференціальні рівняння (рівняння Ейлера),** яким підпорядковується рідина, що знаходиться в стані спокою.

З об'єму рідини, що знаходиться в стані спокою, подумки виділимо елементарний об'єм у вигляді паралелепіпеда з ребрами  $dx, dy, dz$ , які паралельні відповідним напрямленням  $x, y, z$  в системі декартових координат

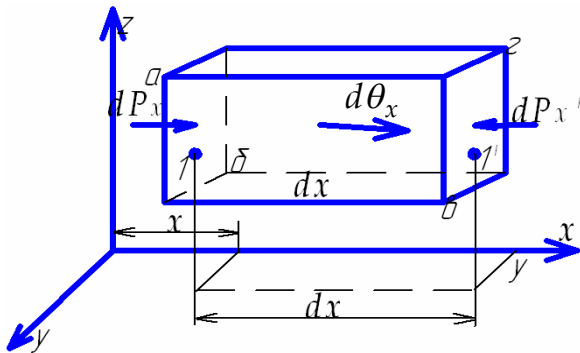


Рис. 3

(рис.3). Цей елементарний об'єм знаходиться в рівновазі, тобто, в спокої під дією поверхневих і масових сил.

З теоретичної механіки відомо, що система знаходиться в рівновазі коли сума проєкцій всіх сил на відповідні осі дорівнює нулю.

Запишемо в загальному вигляді суму проєкцій всіх сил, які діють вздовж осі "x".

$$dP_x - dP'_x + d\theta_x = 0, \quad (18)$$

де  $dP_x$  – елементарна сила, що діє на грань "ab", елементарна площа якої  $dF_x = dydz$ . На цій грані в точці 1 діє тиск  $p$ , який є неперервною функцією координат  $x, y, z$ , тобто  $p = f(x, y, z)$ . Тоді

$$dP_x = p \cdot dydz \quad (19)$$

$dP'_x$  – елементарна сила, що діє на протилежній грані "a'b'", елементарна площа якої теж  $dF'_x = dydz$ .  $dP'_x$  має знак "-", так як діє в протилежному напрямку осі  $x$ . На цій грані в точці 1' діє тиск  $p'$ , який є неперервною функцією координат  $p' = f'(x + dx, dydz)$ .

Так як різниця цих неперервних функцій  $p'_x - p_x = \frac{\partial p}{\partial x} dx$ , то  $p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ ,

а елементарна сила  $dP'_x = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz$ . (20)

$d\theta_x$  – елементарна масова сила в проєкції на вісь "x". Вона дорівнює добутку проєкції прискорення ( $X$ ), що діє на елементарний об'єм помноженому на елементарну масу цього елементарного об'єму. Тобто

$$d\theta_x = X \rho dx dy dz, \quad (21)$$

де  $\rho dx dy dz$  – елементарна маса об'єма " $dx \cdot dy \cdot dz$ " з густиною " $\rho$ ".

Інших сил в проекції на вісь “x” немає. Тоді, підставивши в рівняння (18) свої значення будемо мати

$$p \cdot dydz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \right) dydz + X\rho dx dydz = 0$$

$d\theta_x$  береться зі знаком (+), так як конкретне значення проекції прискорення покаже свій знак (+) чи (-). Після спрощення і приведення всіх величин до одиниці маси отримаємо

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 .$$

Якщо записати подібні суми проекцій на осі “y” і “z”, отримаємо подібні рівняння тільки з відповідно іншими позначками, а саме, сума проекцій всіх сил на вісь “y” буде  $Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ , а на вісь “z” буде  $Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ .

Разом ці три рівняння називаються системою диференціальних рівнянь рівноваги рідини (диференціальні рівняння Ейлера)

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array} \quad (22)$$

Кожне з рівнянь показує закон розподілу гідростатичного тиску вздовж відповідних осей в об’ємі рідини густиною “ $\rho$ ”, на який (об’єм) діє прискорення “ $a$ ” з відповідними проекціями  $X$ ,  $Y$  і  $Z$ . Два будь-яких рівняння системи диференціальних рівнянь встановлює закон розподілу гідростатичного тиску на відповідні площини ( $x y$ ,  $x z$ ,  $y z$ ). Три рівняння систем диференціальних рівнянь описують закон розподілу гідростатичного тиску в об’ємі рідини.

### **Зведене рівняння системи диференціальних рівнянь Ейлера.**

Помножимо перше рівняння системи диференціальних рівнянь на  $dx$ , друге на  $dy$ , третє на  $dz$  і складемо ці рівняння за вертикаллю

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0$$

Вираз в дужках є повний диференціал тиску  $dp$ , який є неперервною функцією координат. Тоді це рівняння запишеться так:  $Xdx + Ydy + Zdz - \frac{dp}{\rho} = 0$ ,

звідки

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) , \quad (23)$$

де  $dp$  – зміна тиску в певному об’ємі рідини густиною “ $\rho$ ”, на який діє прискорення масових сил, виражених через її проекції ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ).

Рівняння (23) називається зведеним рівнянням системи диференціальних рівнянь Ейлера.

## Основне рівняння гідростатики

Основне рівняння гідростатики встановлює закон зміни гідростатичного тиску в даному об'ємі рідини, яка знаходиться в абсолютному спокої, тобто з масових сил на рідину діє тільки сила ваги.

Для виводу цього рівняння застосовуємо зведене диференціальне рівняння

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Оскільки з масових сил діє тільки сила ваги, яка обумовлена прискоренням земного тяжіння "g", то в рівнянні (23)  $Z = -g$ , а  $X$  і  $Y$  дорівнюють нулю.

Тоді  $dp = -\rho g dz$ ; далі ділимо це рівняння на  $\rho g$  і  $-dz$  переносимо ліворуч

$$\frac{dp}{\rho g} + dz = 0. \quad (24)$$

Рівняння (24) є основним рівнянням гідростатики в диференціальній формі.

Інтеграл цього рівняння при  $\rho = const$  буде:

$$\frac{p}{\rho g} + z = C, \quad (25)$$

де  $z$  – відстань певної точки в об'ємі рідини густиною  $\rho$  з тиском  $p$  до площини порівняння.

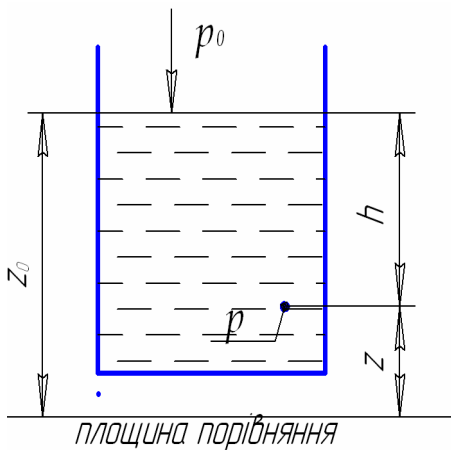


Рис. 4

Площина порівняння – це будь-яка горизонтальна площина, до якої заміряється положення вибраних точок в об'ємі рідини.

Розглянемо наступний приклад (рис. 4). Місткість з рідиною, на вільній поверхні якої тиск  $p_0$ . Знизу, як правило, проведена площина порівняння.

Позначимо через  $z_0$  відстань від вільної поверхні рідини до площини порівняння. На відстані від площини порівняння  $z$  в точці всередині рідини тиск  $p$ .

Використовуючи рівняння (25) визначимо сталу інтегрування „C” для випадку: при  $z_0$ , тобто на вільній поверхні, тиск -  $p_0$ . Тоді

$$\frac{p_0}{\rho g} + z_0 = C.$$

Для двох точок, які знаходяться на відстані  $z$  і  $z_0$  від площини порівняння рівняння запишеться:

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} + z_0. \quad (26)$$

Звідси визначимо  $\frac{p}{\rho g}$ ;

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} + z_0 - z;$$

так як  $z_0 - z = h$ , то

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} + h, \text{ м ст. рідини,} \quad (27)$$

або

$$p = p_0 + \rho gh, \text{ [па]}. \quad (28)$$

Основне рівняння гідростатики (28) має такий зміст: тиск у будь-якій точці даного об'єму рідини дорівнює тиску на вільну поверхню рідини  $p_0$  плюс тиск стовпа рідини ( $\rho gh$ ) відповідно глибини занурення цієї точки під рівень вільної поверхні.

Основне рівняння гідростатики також формулює закон Паскаля про передачу тиску, що діє на вільну поверхню в будь-яку точку даного об'єма однаково. Тобто, тиск  $p_0$  передається у всі точки даного об'єму рідини однаково, без будь-яких втрат. На основі закону Паскаля на виробництві застосовуються гідравлічні преси, домкрати, гідравлічні акумулятори.

Основне рівняння гідростатики пов'язує між собою будь-які точки даного об'єму. Тобто для точок 1 і 2 (рис.5) можна записати рівняння відносно вибраної площини порівняння

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2. \quad (29)$$

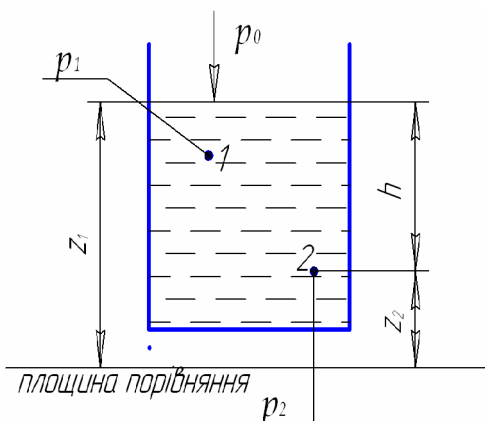


Рис. 5

**Геометричний зміст основного рівняння гідростатики.** Розглянемо закриту місткість з рідиною, на вільній поверхні якої тиск  $p_0 > p_{atm}$ . Виберемо точки 1 і 2 в даному об'ємі рідини, які розташовані одна вище другої. Відстань цих точок до площини порівняння відповідно  $z_1$  і  $z_2$ .

Над точками 1 і 2 встановимо скляні вертикальні трубки малого діаметра ( $d \approx 5$  мм),

які відкриті знизу і зверху. На верхні кінці трубок діє атмосферний тиск. Ці трубки називаються п'езометричними (або п'езометрами).

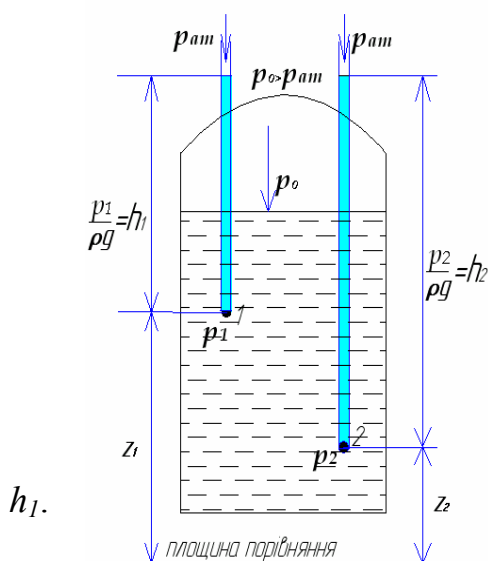


Рис. 6

$$h_1 = \frac{p_1}{\rho g}, \text{ а } h_2 - \text{відповідно } h_2 = \frac{p_2}{\rho g}.$$

Вираз  $\frac{p}{\rho g}$ , що вимірюється в м стовпа рідини називається п'езометричним напором.

В свою чергу  $z_1$  і  $z_2$  – геометричні напори, це є відстань від певних точок 1 і 2 до площини порівняння (в розділі „гідродинаміка” розглянемо енергетичний зміст цих величин). Як видно з рис. 6, сума двох напорів (геометричного і п'езометричного) в різних точках в даному об'ємі рідини відносно площини порівняння є величина стала, що підтверджується основним рівнянням гідростатики ( $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$ ).

**Гідравлічні прилади, що застосовуються для вимірювання тиску, вакууму, перепаду тисків.**

Визначення показів гідравлічних приладів (тиску, вакууму, перепаду тисків) ґрунтується на складанні рівнянь рівноваги частинок рідини в цих приладах (сполучених посудинах) в характерних точках.

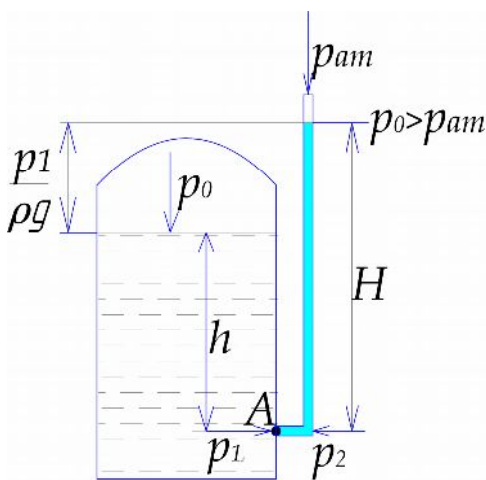


Рис. 7

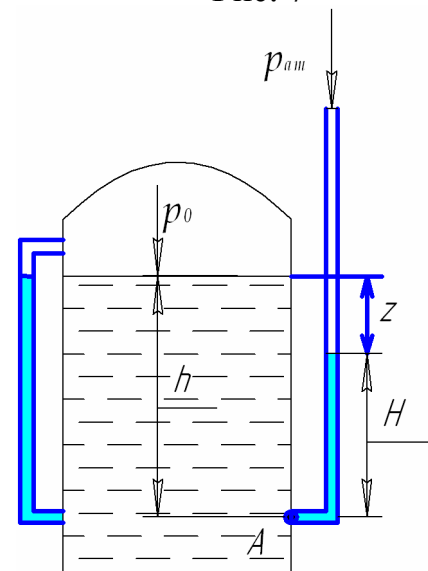


Рис. 8

Найпростішим приладом для вимірювання тиску або вакууму, вираженого стовпом тієї ж самої рідини, що знаходиться в місткості є п'езометр.

**П'езометр** являє собою тонку скляну вертикальну трубку приєднану до місткості в точці де треба виміряти напір (тиск), а другий кінець трубки відкритий в атмосферу.

З метою визначення величин показів п'езометра „Н” необхідно скласти рівняння рівноваги рідини для характерної точки

(рис. 7). Такою точкою є точка „А”, на яку діють

тиски з боку місткості ( $p_1$ ) і з боку п'езометричної трубки ( $p_2$ ). Оскільки рідина знаходиться в рівновазі, тиски  $p_1 = p_2$  (частинка рідини в точці А врівноважена). Тоді, використовуючи основне рівняння гідростатики, запишемо рівняння рівноваги частинки рідини в точці А

$$p_0 + \rho gh = p_{atm} + \rho gH . \quad (30)$$

Звідки,

$$H = \frac{P_0 - P_{atm}}{\rho g} + h, \quad (31)$$

тобто  $H$  вимірює надлишковий напір (тиск) в точці А.

Для випадку  $p_0 < p_{atm}$  (див. рис. 8) вакуум знаходиться з рівняння рівноваги, складеного для



точки  $A$ .  $p_0 + \rho gh = p_{am} + \rho gH$ , звідки  $\frac{p_{am} - p_0}{\rho gh} = h - H = z$ , м.ст.рід., тобто вакуум

над вільною поверхнею рідини  $\left(\frac{p_{вак}}{\rho g} = z\right)$  визначається розміром  $z$ .

$z$  – різниця між глибиною занурення  $h$  (точка  $A$ ) під рівень вільної поверхні в місткості і глибиною занурення цієї точки в п'єзометрі під рівень вільної поверхні в ньому ( $H$ ).

**Мікроманометри** застосовують для замірів невеликих напорів (50-100 мм ст. р.). Також ці прилади можна застосовувати як диференціальні мікроманометри (див. рис. 9а і 9б).

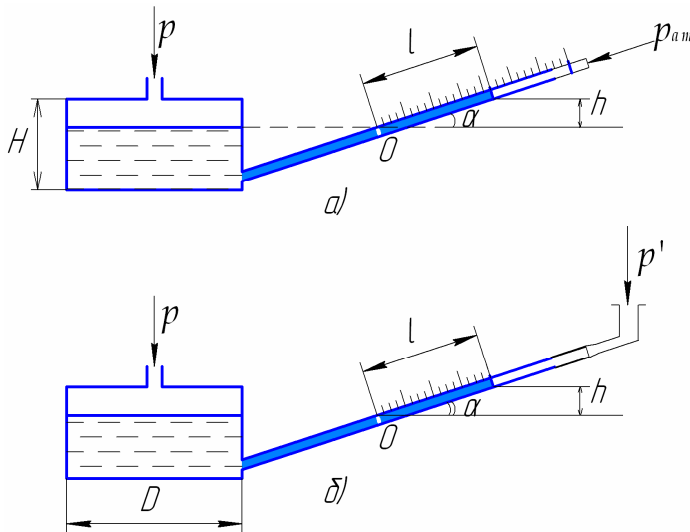


Рис. 9

Мікрометри представляють собою (як правило) металеву коробку невеликих розмірів ( $D = 100 - 150$  мм,  $H = 75 - 100$  мм), в яку налита вода, або інша рідина з меншою густиною. В певній точці на коробці приєднана тонка ( $d \approx 5$  мм) скляна трубка, другий кінець якої відкритий в атмосферу (рис. 9а). Скляна трубка розташована під кутом 15 градусів. Також є конструкції, де кут нахилу ( $\alpha$ ) можна змінювати. Заміри напору проводять за довжиною  $l$  (для

більшої точності заміру). Тоді  $h = l \cdot \sin \alpha$ .

Тут рівняння рівноваги для точки «0» (див. рис. 9а) запишеться

$$p = p_{am} + l \cdot \sin \alpha \cdot \rho g, \text{ або } p = p_{am} + \rho gh, \text{ звідки}$$

$$\frac{p - p_{am}}{\rho g} = h, \text{ м ст.р.} \quad (32)$$

Тобто висота  $h$  вимірює надлишковий напір (тиск).

На рис. 9б представлений той же самий мікроманометр, що і на рис. 9а, але на верхньому вільному кінці трубки діє тиск ( $p'$ ), який менший за  $p$ . Тоді рівняння рівноваги для точки «0» запишеться так:

$$p = p' + \rho gh,$$

звідки

$$\frac{p - p'}{\rho g} = h, \text{ м.ст.р.} \quad (33)$$

Тобто,  $h$  показує перепад напорів (тисків)  $\left(\frac{p - p'}{\rho g}\right)$ , які діють на вільну поверхню рідини в коробці  $p$ , а  $p'$  – на вільну поверхню рідини в трубці.

**Ртутний манометр** представляє собою U- подібну трубку, в якій налита ртуть, одним кінцем приєднана до точки в місткості, де необхідно визначити тиск, а другий кінець відкритий в атмосферу (рис.10).

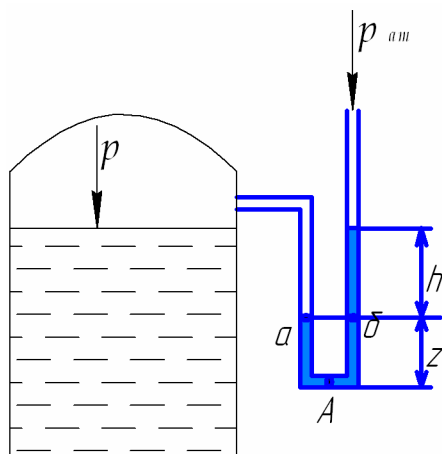


Рис. 10

Тоді

$$p = p_{atm} + \rho_{рт} g h.$$

Звідки

$$h = \frac{p - p_{atm}}{\rho_{рт} g}, \text{ м рт.ст.}, \quad (35)$$

де  $h$  – висота між вільними поверхнями ртуті в U-подібній трубці, яка вимірює надлишковий тиск повітря над вільною поверхнею в місткості.

**Вакуумметр** – це рідинний прилад для вимірювання вакууму. Вакуумом в гідравліці називають величину тиску, яка не дістає до атмосферного тиску. Тобто, вакуум існує там, де абсолютний тиск менший атмосферного.

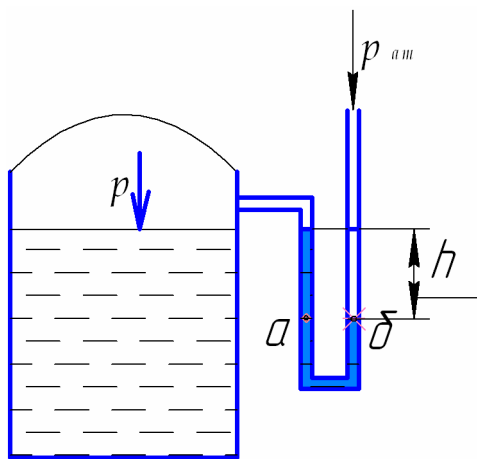


Рис. 11

звідки

$$h = \frac{p_{atm} - p}{\rho_{рт} g}, \text{ м рт.ст.},$$

де  $(p_{atm} - p)$  – величина, що не дістає до атмосферного тиску, тобто – вакуум.

Тоді

$$h_{вак} = \frac{p_{atm} - p}{\rho_{рт} g} = \frac{p_{вак}}{\rho_{рт} g}, \text{ м рт.ст.} \quad (36)$$

**Диференціальний манометр** служить для вимірювання різниці тисків в будь-яких місткостях або з різних боків витратомірної діафрагми та ін. і представляє собою U-подібну скляну трубку, яка приєднана своїми кінцями до різних місткостей, або перед і за витратомірною діафрагмою (рис.12).

Розглянемо рух рідини в трубці, в якій встановлена витратомірна діафрагма.

Витратомірна діафрагма представляє собою тонкий сталевий диск,

При  $p > p_{atm}$ , в правому коліні стовпчик ртуті підніметься, а в лівому – понизиться.

Напишемо рівняння рівноваги для частинки рідини, що знаходиться в характерній точці «А». Ліворуч і праворуч тиски на цю точку однакові (друга властивість гідростатичного тиску). Тоді

$$p + \rho_{рт} g z = p_{atm} + \rho_{рт} g h + \rho_{рт} g z \quad (34)$$

Як видно з рівняння 34 і рис. 10 висота стовпчиків ртуті ( $a-A$ ) ліворуч і ( $b-A$ ) праворуч дорівнюють « $z$ » врівноважені і випадають з рівняння (34). Таким чином в точках  $a$  і  $b$  тиск однаковий. Тобто  $p_a = p_b$ .

виконаний за ГОСТом, з отвором всередині, діаметр якого  $d$  менший за діаметр труби  $D$ . Потік рідини на підході до діафрагми звужується і протискається крізь отвір діафрагми. Далі знову потік розширюється з діаметра  $d$  до діаметра ( $D$ ). При цьому тиск  $p_1$  до діафрагми знижується до  $p_2$  після діафрагми.

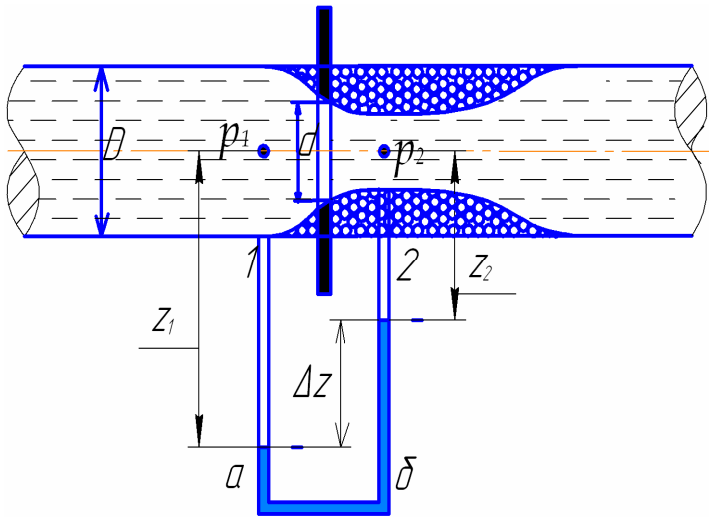


Рис. 12

Диференціальний манометр приєднується одним кінцем до точки 1 в трубі до діафрагми де тиск ( $p_1$ ), а другим – до точки 2 в трубі після діафрагми, де тиск  $p_2$ . В U- подібній трубці знаходиться ртуть, вільні поверхні якої розташуються певним чином: вільна поверхня ртуті в лівому коліні буде нижча ніж вільна поверхня в правому коліні трубки, так як  $p_1 > p_2$ .

Різниця між цими вільними поверхнями ртуті  $\Delta z$  буде залежати від  $p_1$  і  $p_2$ , які в свою чергу, залежать від витрати рідини  $Q$  в трубі.

Тобто у даному прикладі за величиною  $\Delta z$  визначають витрату рідини в трубі. Тому ця діафрагма називається витратомірною.

Далі, запишемо рівняння рівноваги частинок рідини, що знаходяться в одній горизонтальній площині, проведеної через нижню вільну поверхню ртуті в лівому коліні.

Відповідно до позначень на рис.12 рівняння рівноваги для точок  $a$  і  $b$  в U- подібній трубці буде  $p_a = p_b$ . Звідки

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 + \rho_{pm} g \Delta z, \quad (37)$$

де  $\rho g z_1$  – тиск стовпа рідини в U- подібній трубці ліворуч від осі до точки „а”.

$\rho g z_2$  – тиск стовпа рідини в U- подібній трубці праворуч від осі до точки „б”. Тоді:

$$p_1 - p_2 + \rho g (z_1 - z_2) = \rho_{pm} g \Delta z.$$

Так як  $p_1 - p_2 = \Delta p$  – перепад тисків і  $z_1 - z_2 = \Delta h$  то

$$\Delta p = \Delta z (\rho_{pm} - \rho) \rho g. \quad (38)$$

Тобто перепад тисків  $\Delta p$  дорівнює величині « $\Delta z$ », що вимірюється диференціальним манометром, з урахуванням різниці густин ртуті і рідини.

**Визначення сили тиску і центра тиску на тверду плоску стінку, що занурена в рідину під кутом до горизонту.**

Як відомо сила тиску на дно місткості (рис.13) дорівнює добутку тиску на одиницю площі дна на саму площу дна. Оскільки  $H$  величина однакова по всій площі дна, то сила тиску на дно визначається:  $P_{дн} = \rho g H \cdot F_{дн}$ , де  $H = h_{ч.в.}$ ,  $h_{ч.в.}$  – глибина занурення центра ваги дна підрівень вільної поверхні.

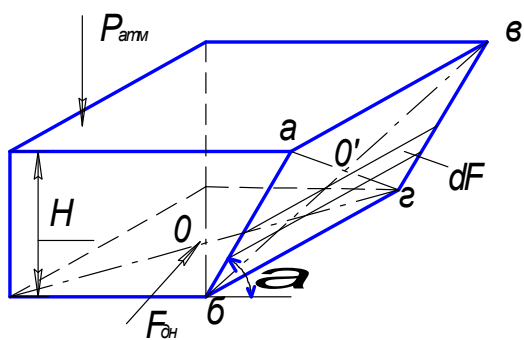


Рис. 13

$$\text{Тоді } P_{\text{дн}} = \rho g h_{\text{ц.в.}} \cdot F_{\text{дн}}$$

Сила тиску на бокову стінку, яка занурена в рідину і розташована під кутом до горизонту  $\alpha$ , визначається за формулою, що необхідно вивести (так як кожна точка на боковій стінці занурена на різну глибину під вільну поверхню рідини). Подумки витягнемо стінку ( $а б в з$ ), до суміщення ребра  $вз$  з ребром  $аб$ , повернемо її навколо ребра

$аб$  і положимо на площину листа. Тоді будемо мати схему зображену на рис.14, де:

$h_{\text{ц.в.}}$  - глибина занурення центра ваги бокової стінки під рівень вільної поверхні.

$l_{\text{ц.в.}}$  - положення центра ваги на стінці відносно вільної поверхні рідини;

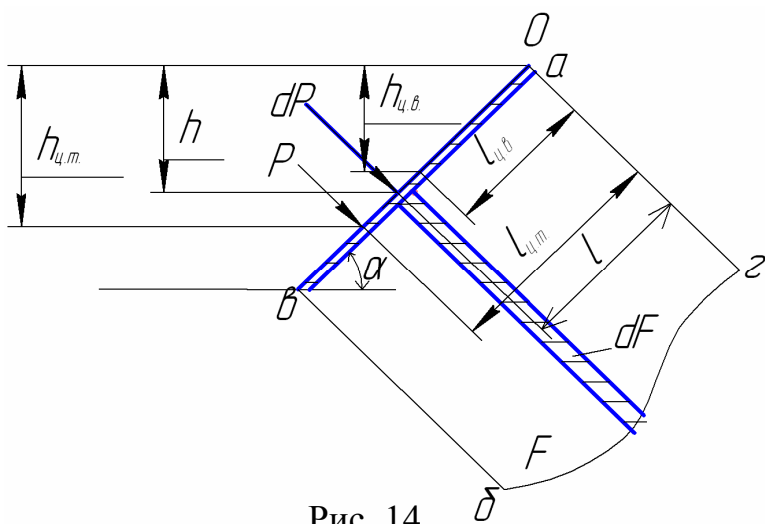


Рис. 14

$F$  – площа стінки, що занурена в рідину (або змочена поверхня стінки);

$dF$  – елементарна площа, кожна точка якої знаходиться на однаковій відстані від вільної поверхні рідини.

$h$  – глибина занурення елементарної площі  $dF$  під рівень вільної поверхні;

$dP$  – елементарна сила, що діє на елементарну площу  $dF$ , занурену на глибину  $h$  під

рівень вільної поверхні, тиск на якій  $p_0$ .

$l$  – відстань елементарної площі  $dF$  до ребра «ав» стінки «авбв».

На кожную точку елементарної поверхні  $dF$  діє тиск стовпа рідини  $h$ . Тоді елементарна сила  $dP$  дорівнює:

$$dP = \rho g h dF,$$

з урахуванням дії тиску на вільну поверхню  $p_0$ , яка передається за законом Паскаля в кожную точку елементарної поверхні  $dF$

$$dP = (p_0 + \rho g h) dF$$

Якщо поділити площу  $F$  на велику кількість елементарних площ, то на кожную елементарну площу  $dF$  буде діяти своя елементарна сила.

Тоді повна (результуюча) сила тиску  $P$  на всю площу  $F$  буде

$$P = \int_F dP = \int_F (p_0 + \rho g h) dF = p_0 F + \int_F \rho g l \sin \alpha \cdot dF = P_0 F + \rho g \sin \alpha \int_F l dF.$$

$\int_F l dF$  - статичний момент плоскої фігури відносно осі, яка не проходить

через центр ваги. Він дорівнює добутку площі стінки  $F$  на  $l_{\text{ц.в.}}$  відстань центру ваги цієї площі до верхнього ребра стінки  $ав$ .

Тоді

$$\int_F l dF = l_{у.с.} \cdot F$$

$$P = p_0 F + \rho g l_{у.с.} \cdot \sin \alpha \cdot F = p_0 F + \rho g h_{у.с.} \cdot F$$

при  $p_0 = p_{ат}$

$$P = \rho g h_{у.с.} \cdot F \quad (39)$$

Тобто, сила тиску на плоску стінку, занурену під кутом до горизонту дорівнює добутку площі цієї стінки на тиск стовпа рідини, відповідно глибині занурення центру ваги цієї стінки під рівень вільної поверхні.

Гідростатичний парадокс полягає в тому, що сила тиску на дно однакової площі в посудинах різних розмірів і форм, заповнених рідиною з однаковою густиною, на однакову висоту – однакова.

**Центр тиску** – це точка прикладення результуючої (повної) сили на площі стінки, що занурена у рідину.

Формулу для визначення центра тиску знайдемо, застосувавши теорему, яка говорить, що момент результуючої сили, яка діє на тверду плоску стінку дорівнює сумі моментів її складових. Припустимо, що результуюча сила прикладена нижче центра її ваги (рис.14).

Тоді, відповідно до теореми запишемо рівняння:

$$P \cdot l_{у.м.} = \int_F dP \cdot l, \quad (40)$$

де  $P \cdot l_{у.м.}$  – момент результуючої сили;

$\int_F dP \cdot l$  – сума моментів складових елементарних моментів ( $dP \cdot l$ ).

З формули 40 знаходимо  $l_{у.м.}$

$$l_{у.м.} = \int \frac{dP \cdot l}{P} = \frac{\rho g \int_F h \cdot dF \cdot l}{\rho g l_{у.с.} \sin \alpha \cdot F} = \frac{\rho g \sin \alpha \int_F l^2 dF}{\rho g \sin \alpha \cdot l_{у.с.} \cdot F};$$

де  $\int_F l^2 \cdot dF$  – момент інерції плоскої фігури відносно осі, що не проходить через центр ваги. Він дорівнює моменту інерції цієї фігури відносно осі, що проходить через центр ваги  $I_0$ , плюс добуток квадрата відстані  $l_{у.с.}^2$  від центра ваги фігури до осі, що не проходить через центр ваги на площу плоскої фігури ( $F$ ), тоді :

$$l_{у.м.} = \frac{I_0 + l_{у.с.}^2 \cdot F}{l_{у.с.} \cdot F} = \frac{I_0}{l_{у.с.} \cdot F} + l_{у.с.}, \quad (41)$$

тобто центр тиску завжди лежить нижче центра ваги.

Якщо стінка вертикальна, то  $l_{у.с.} = h_{у.с.}$ ,  $l_{у.м.} = h_{у.м.}$  і формула приймає наступний вигляд:

$$h_{у.м.} = h_{у.с.} + \frac{I_0}{h_{у.с.} \cdot F}, \quad (42)$$

де  $I_0$  і  $h_{у.с.}$  для різних форм плоских фігур приводяться у довідковій літературі.

Розглянемо простий приклад.

Визначити силу тиску на бокову плоску стінку  $ab$ , висотою  $h$  і шириною  $b$ . Ємність повністю заповнена рідиною (густиною  $\rho$ ), а також центр тиску на цю

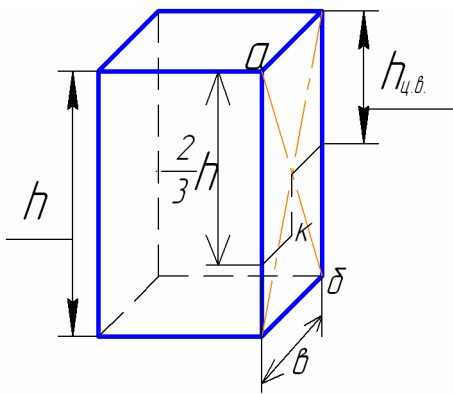


Рис. 15

стінку (рис.15).

Застосовуємо формулу для визначення сили тиску.  $P = \rho g h_{ц.б.} \cdot F$ , (де  $F=b \cdot h$ ;  $h_{ц.б.} = h/2$ )

$$\text{тоді } P = \rho g \frac{h}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} \rho g b \cdot h^2 .$$

Центр тиску, визначаємо за формулою (42) маючи на увазі, що ( $I_0 = bh^3/12$ )

$$h_{ц.м.} = \frac{h}{2} + \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h \cdot b \cdot h} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2}{3} h .$$

Тобто,  $h_{ц.м.}$  занурений на  $2/3 h$ , (в точці  $K$ ) під рівень вільної поверхні рідини.

### Визначення сили тиску і центра тиску на криволінійні стінки, що занурені у рідину.

Розглядаються криволінійні поверхні, що занурені у рідину, які мають рівнодіючі. До таких криволінійних поверхонь відносяться сфери і їх частини, циліндричні поверхні і їх частини.

Розглянемо частину криволінійної поверхні, що представляє четверту частину сфери (рис. 16).

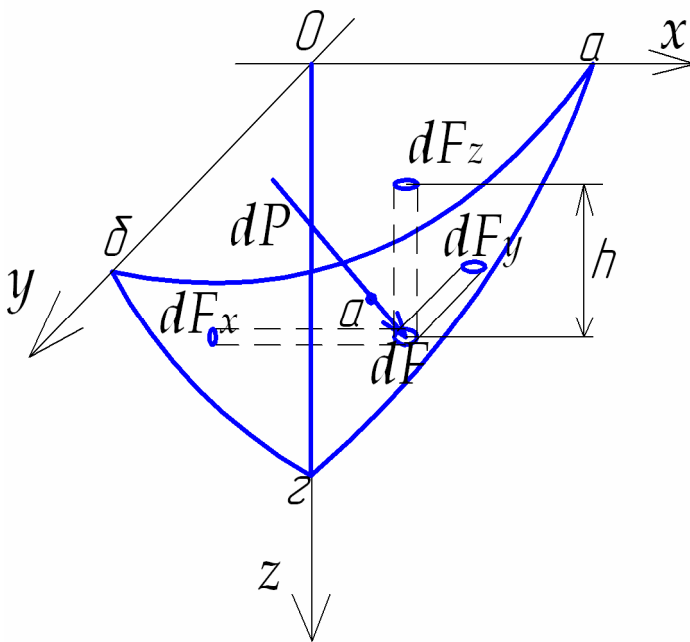


Рис. 16

Координати  $ox$ ,  $oy$  і  $oz$ . Проекція криволінійної поверхні на площину  $yoz$  буде площа „ $b \ 0 \ z$ ”. Проекція криволінійної поверхні на площину  $xoz$  – площа „ $a \ 0 \ z$ ”. Проекція криволінійної поверхні на площину  $xoy$  – площа „ $a \ 0 \ b$ ”. Перші дві проекції – вертикальні, третя – горизонтальна.

В кожній точці криволінійній поверхні ( $abga$ ), що занурена у рідину тиск різний, обумовлений глибиною занурення цих точок. Так як в межах елементарної поверхні ( $dF$ ) тиск однаковий, то можна визначити елементарну

силу тиску на цю елементарну площу, яка занурена на глибину  $h$  під рівень вільної поверхні (площина  $xoy$ )

$$dP = \rho g h dF \quad (43)$$

Елементарна сила направлена за нормаллю до елементарної площі  $dF$ . В координатній системі елементарна сила ( $dP$ ) розташована під певними кутами до осей координат. Тоді цю елементарну силу можна розкласти (спроєктувати) на складові відповідно осей координат, тобто

$$dP_x = \rho g h dF \cdot \cos(x, \hat{dP});$$

$$dP_y = \rho g h dF \cdot \cos(y, \hat{dP});$$

$$dP_z = \rho g h dF \cdot \cos(z, \hat{dP}).$$

$dF \cdot \cos(x, \hat{dP}) = dF_x$ , тобто  $dF_x$  – це проекція елементарної площі  $dF$  на площину „ $yOz$ ”, до якої  $dP_x$  діє за нормаллю і направлено вздовж осі „ $x$ ”;

$dF \cdot \cos(y, \hat{dP}) = dF_y$ ,  $dF_y$  – проекція  $dF$  на площину „ $xOz$ ”

$dP_y$  – направлена за нормаллю до площини „ $xOz$ ”

$dF_z = dF \cdot \cos(z, \hat{dP})$ ,  $dF_z$  – проекція  $dF$  на площину „ $xOy$ ”.

$dP_z$  – направлена за нормаллю до площини „ $xOy$ ” (рис.17).

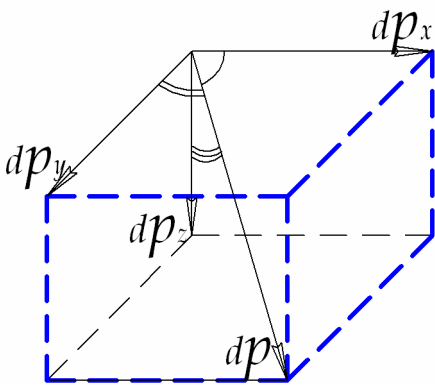


Рис. 17

Проекції елементарних сил на відповідні осі:

$$dP_x = \rho g h dF_x$$

$$dP_y = \rho g h dF_y$$

$$dP_z = \rho g h dF_z$$

Розглянемо елементарну силу  $dP_x$ , яка діє на проекцію елементарної криволінійної поверхні.  $dF_x$  – вертикальна елементарна площадка, яка лежить в площині  $yOz$ . Тобто, це відповідає випадку визначення сили, що діє на вертикальну площу і ця сила направлена за нормаллю до площини дії (рис.18).

Тоді, аналогічно формулі (39), отримаємо

$$P_x = \int_{F_x} \rho g h \cdot dF_x \quad P_x = \rho g h_{ц.в.} \cdot F_x, \quad (44)$$

де  $F_x$  – площа проекції криволінійної поверхні на вертикальну площину, „ $yOz$ ”;

$h_{ц.в.}$  – глибина занурення центра ваги площі  $F_x$  під рівень вільної поверхні рідини.

Таким же самим чином визначаємо складову  $P_y$

$$P_y = \int_{F_y} \rho g h \cdot dF_y \quad P_y = \rho g h_{ц.в.} \cdot F_y, \quad (45)$$

де  $F_y$  – площа проекції криволінійної поверхні на вертикальну площину, „ $xOz$ ”;

$h_{ц.в.}$  – глибина занурення центра ваги площі  $F_y$  під рівень вільної поверхні рідини.

$$\text{Визначаємо } P_z = \int_{F_z} \rho g h \cdot dF_z$$

$h \cdot dF_z = dV$  – елементарний об’єм рідини з елементарною площею  $dF_z$ , яка розташована на горизонтальній площині  $F_z$ .

$F_z$  – складається з сумарного значення  $dF_z$  зі своїми висотами  $h$ .

Тому  $\int_{F_z} \rho g h dF_z$  представляє собою весь об’єм рідини, який знаходиться між криволінійною поверхнею, двома вертикальними площинами ( $xOz$  і „ $yOz$ ”) і горизонтальною площиною „ $xOy$ ”.

Тобто,  $\int_{F_z} \rho g h \cdot dF_z = \rho g V = P_z$ ,

де  $V$  – об’єм тіла тиску, тобто це той об’єм рідини, який тисне на криволінійну поверхню.

Так як  $\rho g V = G$ ,

де  $G$  – вага тіла тиску.

Тоді  $P_z = \rho g V = G$ . (46)

$P_z$  - вертикальна складова результуючої  $P$ . Вона має направлення вниз, коли рідина налита в місткість і вверх, коли місткість занурена в рідину.

Оскільки знайдені складові  $P_x, P_y, P_z$  результуючої сили  $P$ , то остання визначається як

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \quad (47)$$

**Центр тиску результуючої „ $P$ ”** на криволінійну поверхню.

Центром тиску на криволінійну поверхню називається точка перетину лінії дії результуючої, яка обумовлена певними кутами між результуючою і складовими, з криволінійною поверхнею (точка  $A$ ). При цьому лінія дії результуючої повинна проходити через точку перетину ліній дій складових (точка  $a$ ) (рис. 19). Лінія дії  $P_z$  проходить через центр ваги  $F_z$  об’єму тіла тиску  $V$ .

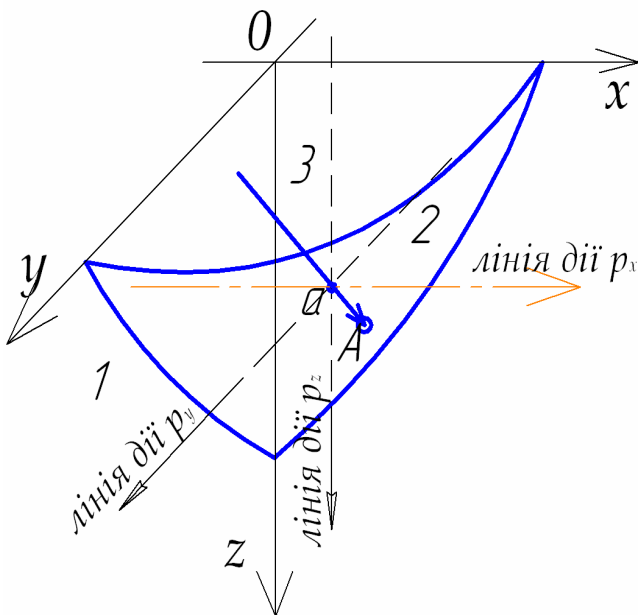


Рис. 19

**Визначення сили і центра тисків на циліндричну поверхню, занурену у рідину.**

Циліндрична поверхня має площину симетрії, тобто симетрично ділить циліндр (поверхню) на дві симетричні половини (рис. 20). В цій площині розташовується результуюча сила тиску.

Якщо початок координат взяти в точці „ $O$ ”, яка знаходиться в площині симетрії. Вісь „ $y$ ” направити за твірною циліндричної поверхні, то проекція результуючої на вісь  $y$  буде дорівнювати нулю. Тоді

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} \quad (48)$$



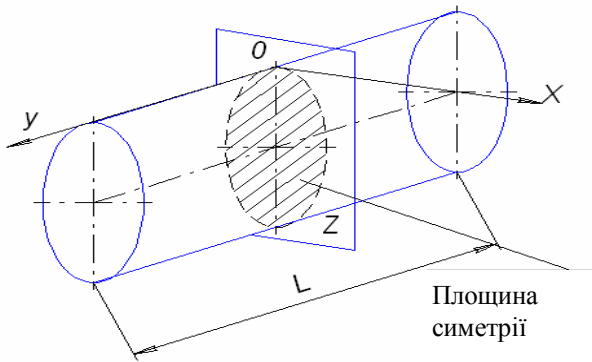


Рис. 20

Накреслимо площу поперечного перерізу циліндра, яка відповідає перетину площини симетрії з циліндром (площина симетрії нормальна до твірної циліндра). Уявимо, що циліндр повністю заповнений рідиною. Необхідно визначити результуючу силу  $P$ , яка діє на бокову стінку циліндра (праворуч або ліворуч, так як вони однакові, але мають протилежне направлення).

Принцип визначення складових результуючої сили загальний, що показано вище. Лінія дії  $P_x$  проходить через  $h_{ц.п.}$  (точка а), яка знаходиться на відстані  $I_0 / (h_{ц.в.} \cdot F_x)$  від осі циліндра, або на відстані  $2/3$  від верхньої точки циліндра. Лінія дії  $P_z$  проходить через центр ваги об'єму тіла тиску. В даному випадку через центр ваги половини кола (рис. 21).

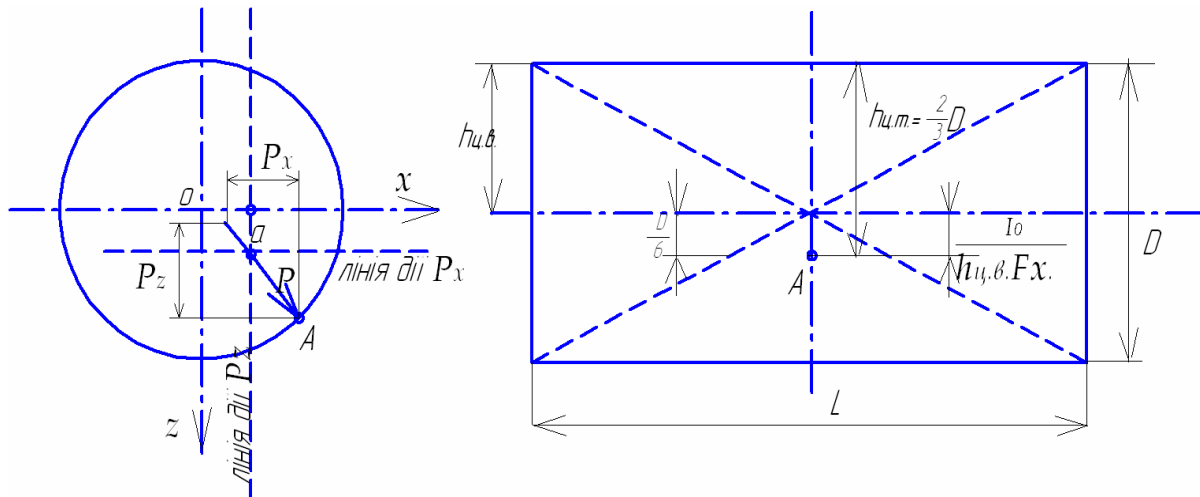


Рис. 21

$$P_x = \rho g h_{ц.в.} F_x,$$

де  $F_x$  – площа проекції бокової стінки циліндра на вертикальну площину, що проходить крізь вісь циліндра  $F_x = D \cdot L$ ,

$h_{ц.в.}$  – глибина занурення центра ваги площини  $F_x$  під рівень вільної поверхні;

$$P_z = \rho g V,$$

де  $V$  – об'єм тіла тиску, що сприймається боковою стінкою циліндра. Це об'єм рідини, що міститься між боковою стінкою циліндра і вертикальною площиною, що проходить через вісь циліндра.

$V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot L$ , м<sup>3</sup>. (Друга протилежна бокова стінка сприймає такий же самий об'єм)

$$P_z = \rho g V = G,$$

де  $G$  – вага тіла тиску, н.

Центр тиску є точка перетину результуючої з криволінійною (циліндричною боковою) поверхнею; при цьому результуюча сила, положення якої обумовлено певними кутами на площині, повинна пройти через точку перетину ліній дій складових ( $P_x$  і  $P_z$ ).

### Поверхні рівного тиску.

Визначення форм вільних поверхонь рідини в місткостях, які знаходяться в стані абсолютного і відносного спокою.

Поверхнею рівного тиску називається поверхня, в кожній точці якої тиск є величина стала.

Для визначення форми вільної поверхні виведемо відповідне рівняння, застосовуючи зведене рівняння системи диференціальних рівнянь Ейлера (23)

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

Так як  $p = \text{const}$ , то  $dp = 0$ , але  $\rho \neq 0$ , тоді

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (49)$$

Рівняння 49 є диференціальним рівнянням поверхонь рівного тиску.

**Визначення форми вільної поверхні рідини в місткості, яка (рідина) знаходиться в абсолютному спокої, тобто з масових сил на рідину діє тільки сила ваги. Прискорення сили ваги є „g” (рис.22).**

При  $X=0$ ;  $Y=0$ ;  $Z=-g$  з рівняння 49 отримаємо

$$-gdz = 0, \quad \text{або } \underline{z = \text{const.}}$$

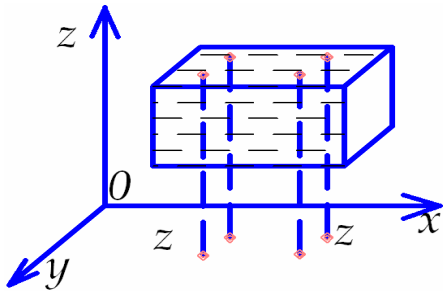


Рис. 22

Тобто будь-яка точка, що лежить на вільній поверхні рідини знаходиться на одній і тій же відстані від площини порівняння, яка є горизонтальною. Таким чином, форма вільної поверхні – горизонтальна.

**Форма вільної поверхні рідини, що знаходиться у циліндрі, який обертається разом з рідиною навколо вертикальній осі зі сталою кутовою швидкістю.**

Уявимо собі, що при обертанні циліндра з рідиною утворюється певна криволінійна форма вільної поверхні з вершиною на осі циліндра, де встановлено початок координат. Вісь „z” направлено вниз.

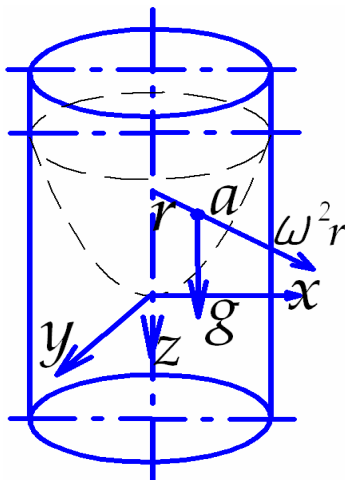


Рис. 23

Візьмемо на вільній поверхні рідини частинку рідини в точці „a”, яка обертається на радіус „r” від осі циліндра. На цю частинку, як і на всі інші, діють дві масові сили: сила ваги і відцентрова сила інерції, яким притаманні прискорення відповідно „g” і „ $\omega^2 r$ ”, які направлені „g” – вертикально вниз,  $\omega^2 r$  - горизонтально за радіусом (рис. 23).

Прискорення „g” проектується на вісь z зі знаком

(+), так як вісь  $z$  (прийнято у нашому випадку) направлено вниз, прискорення  $\omega^2 r$  проектується

на вісь  $x$ , як  $\omega^2 r \cdot \cos(\hat{r}, x) = X$  ;

на вісь  $y$ , як  $\omega^2 r \cdot \cos(\hat{r}, y) = Y$  .

Проекція радіуса „ $r$ ”, на якому обертається частинка рідини на вісь „ $x$ ” –  $x$ , проекція радіуса „ $r$ ” на вісь „ $y$ ” –  $y$ .

З рис. 24 видно, що:  $\frac{x}{r} = \cos(\hat{r}, x)$ ;  $\frac{y}{r} = \cos(\hat{r}, y)$  . Тоді:  $\omega^2 r \cdot \cos(\hat{r}, x) = \omega^2 x$  ;

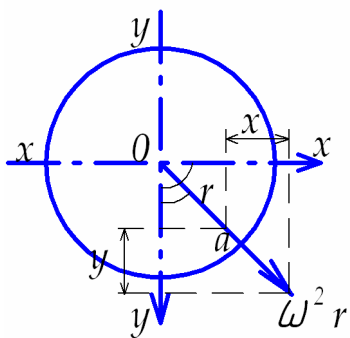


Рис. 24

$$\omega^2 r \cdot \cos(\hat{r}, y) = \omega^2 y$$

де  $x$  і  $y$  – проекції радіуса на відповідні осі.

З метою визначення форми вільної поверхні застосовуємо рівняння поверхонь рівного тиску в диференціальній формі.

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 .$$

Підставляємо визначені нами значення  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , в рівняння і отримаємо

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz = 0 .$$

Інтегралом цього диференціального рівняння буде:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} + gz = C . \quad (50)$$

Так як  $x^2 + y^2 = r^2$  рівняння (50) буде мати вигляд

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} + gz = C \quad (51)$$

Рівняння (51) показує, що поверхнями рівного тиску в цьому випадку є сімейство параболоїдів обертання.

Побудувати параболу можна прийнявши  $y = 0$  (рис. 25).

В цьому випадку рівняння (50) приймає вигляд

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + gz = C . \quad (52)$$

При  $x = 0$  і  $z = 0$   $C = 0$ .

Тоді

$$\frac{\omega^2 x^2}{2g} = -z$$

Задаючись значеннями  $x$  (від 0 до  $R$ ) одержуємо відповідні значення  $(-z)$ .

$h_{max}$  буде при  $x = R$

$$-z_{max} = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (53)$$

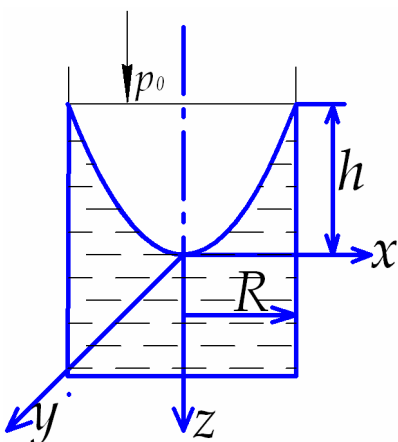


Рис. 25

де  $R$  – радіус циліндра,  $-z_{\max} = h$ ;  
 $h$  – висота воронки.

**Рівновага газу з урахування його стисливості** (у полі сили ваги).

Основне рівняння газостатики, враховуючи вплив стисливості газу ( $\rho \neq \text{const}$ ), дістанемо інтегруючи відоме диференціальне рівняння рівноваги

$$\int \frac{dp}{\rho} + g dz = 0,$$

яке має вигляд 
$$\int \frac{dp}{\rho} + g z = \text{const}. \quad (54)$$

Для обчислення інтеграла  $\int \frac{dp}{\rho}$  необхідно густину газу виразити безпосередньо через тиск  $\rho = f(p)$ .

Зміна стану газу може здійснюватись за ізотермічним законом

$$\left( \frac{p}{\rho} = \text{const} \right),$$

або за політропним законом

$$\left( \frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0^n} = \text{const} \right).$$

Інтегруючи рівняння для ізотермічного закону, тобто температура в усіх точках даного об'ємі газу зберігається сталою, дістанемо

$$g z + \frac{p}{\rho} \ln p = \text{const}. \quad (55)$$

Це рівняння газостатики відрізняється від основного рівняння гідростатики тим, що розподіл тиску в газі з урахуванням його стисливості в ізотермічних умовах відповідає на лінійному, а логарифмічному закону.

Зазначена різниця навіть при значній зміні висоти дуже невелика. Аналіз показує, що розподіл тиску повітря в полі сил тяжіння при ізотермічних умовах з похибкою не більше як 1% можна визначити так, начебто воно було нестисливою рідиною ( $\rho = \text{const}$ ) при зміні висоти в межах 1200 м.

Оскільки в задачах техніки газопостачання і вентиляції зустрічаються значно менші перепади висот ніж 1200 м, похибка при користуванні рівняннями гідростатики буде незначною, що й дає можливість застосовувати їх при вивченні закону рівноваги газу (повітря).

У випадку зміни стану газу за політропічним законам маємо

$$\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0^n} = \text{const}, \quad (56)$$

Звідки

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Інтегруючи рівняння (54)

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} + \int_{z_0}^z dz$$

і проводячи відповідні підстановки, дістанемо

$$\frac{n}{n-1} \cdot \frac{p}{\rho} + z = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} + z_0, \quad (57)$$

або, так як

$$\frac{p}{\rho} = RT \text{ і } \frac{p_0}{\rho_0} = RT_0 \quad (58)$$

дістанемо

$$\frac{n}{n-1} RT + z = \frac{n}{n-1} RT_0 + z_0. \quad (59)$$

Перше рівняння (57) визначає закон розподілення тиску, а друге (58) – закон розподілення температури.

Позначаючи в рівнянні (59) різницю  $z - z_0 = h$  і розв'язуючи це рівняння відносно  $T$ , дістанемо

$$T = T_0 - \frac{(n-1)g}{nR} \cdot h, \quad (60)$$

або

$$t = t_0 - g \frac{n-1}{nR} \cdot h, \quad (61)$$

де  $t$  – температура повітря на висоті  $h$ ;

$n$  – показник адіабати процесу;

$R$  – газова стала, Дж/кг град. (287 для повітря).

При  $t_0 = 0$ ;  $n = 1,4$ ;  $R = 287$ ;  $g = 9,81$ .

$t = -0,01h$ .

З цього рівняння випливає, що температура повітря зменшується за направленням знизу вгору за лінійним законом, зменшуючись приблизно на  $1^{\circ}\text{C}$  через кожні 100 м. за висотою.

## 2. ГІДРОГАЗОДИНАМІКА

**Гідрогазодинаміка** вивчає закони, яким підпорядковується рідина (краплинна, чи газоподібна), що рухається. Спочатку розглянемо закони руху рідини зі сталою густиною. До таких рідин відносяться краплини і газу, при умові, що зміною густини при їх русі можна знехтувати.

Згідно теорії Ейлера розглядаються частинки рідини, що проходять через будь-яку фіксовану точку в потоці. При цьому швидкість частинок, гідродинамічний тиск, густина є неперервними функціями координат і часу.

Рух рідини може бути розподілено на два основних види – неусталений і усталений.

**Неусталений рух** відбувається коли частинки рідини, що проходять через фіксовану точку в потоці, мають різні швидкості в різні моменти часу. Прикладом неусталеного руху є витікання рідини крізь отвір при змінному напорі.

**Усталений рух** має місце коли частинки рідини, проходячи через фіксовану точку в потоці, не змінюють швидкість. Прикладом усталеного руху може бути витікання рідини крізь отвір при сталому напорі.

Усталений рух поділяється на рівномірний і нерівномірний.

**Рівномірний рух** відбувається коли швидкість не змінюється вздовж руху рідини (рух рідини в циліндричній трубі).

**Нерівномірний** – коли швидкість змінюється вздовж руху рідини (рух рідини в дифузорі).

**Безнапірним** називається рух потоку рідини з вільною поверхнею (рух води в каналах, річках).

**Напірним** називається рух потоку рідини без вільної поверхні (рух рідини в суцільно заповнених трубах).

### Струминна модель потоку

В кожній точці потоку рідини можна визначити величину і напрямлення швидкості і отримати **векторне поле** швидкостей, але це не дає можливості виконувати гідродинамічні розрахунки щодо гідравлічних систем (трубопроводів, насосів та ін.).

З метою отримання необхідних залежностей для гідравлічних розрахунків потоків в трубах, каналах, витікання рідини крізь отвори і насадки розглянемо струминну модель потоку. Елементами струминної моделі потоку є лінія течії, трубки течії (поверхня трубки течії), елементарна струминка.

**Лінія течії** – це така уявна лінія в потоці рідини, дотичні в кожній точці якої співпадають з напрямленням векторів швидкостей частинок рідини, розташованих в цих точках. При усталеному русі потоку (внаслідок сталості величини і напрямлення швидкості в кожній точці) траєкторія частинок рідини співпадає з лінією течії. Лінії течії не перетинаються між собою, що виходить з самого визначення поняття ліній потоку.

Розглянемо потік рідини при усталеному русі. Візьмемо в потоці точку 1 і проведемо через цю точку лінію течії (рис. 26 а).

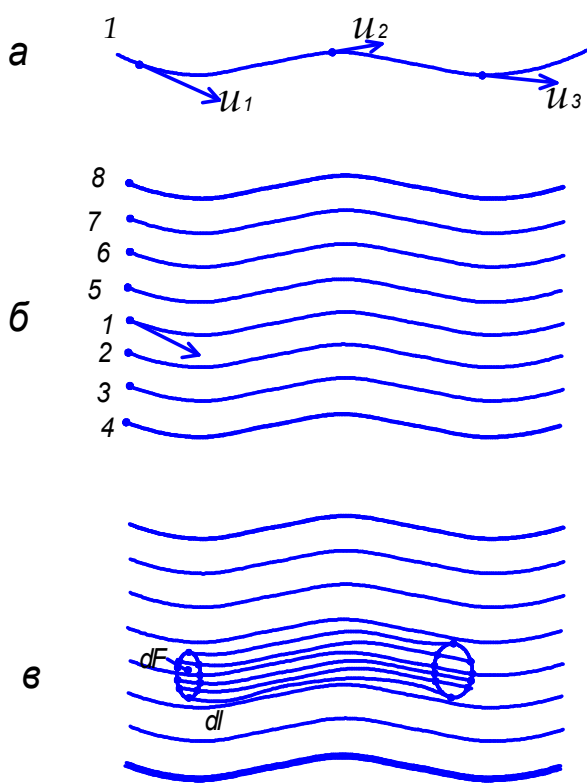


Рис. 26 (а, б, в)

Біля точки 1 (рис. 26, б) виділимо точки 2, 3, 4, 5, 6, 7 і так далі. Через ці точки також проведемо лінії течії, які між собою не перетинаються. Тобто весь потік рідини можна уявити як сукупність ліній течій (рис. 26 б). Проведемо в потоці, що складається із сукупності ліній течій елементарний замкнений контур  $dl$ , через кожену точку якого проходять лінії течії. Сукупність ліній течії, що проходять через кожену точку елементарного замкненого контуру  $dl$  представляє собою **трубку течії**. **Поверхня трубки течії** не прониклива, тобто в середину трубки течії і назовні з неї рідина не може проникати, так як лінії течії не перетинаються.

**Елементарна струминка** представляє собою сукупність ліній течії, що проходять через кожену точку елементарної площі  $dF$ , що обмежена елементарним замкненим контуром  $dl$  (рис. 26, в). Тобто це вся рідина, що

рухається в трубці течії.

**Живий переріз** елементарної струминки. Переріз елементарної струминки нормальний до її ліній течії називається живим. Коли (на певних ділянках) лінії течії паралельні або майже паралельні, то живий переріз буде плоским і називається **поперечним перерізом**.

На ділянках, де лінії течії (також елементарні струминки) не паралельні між собою і мають певний кут розходження (рис.27, переріз 3-3) живий переріз буде **криволінійним**.

**Плавнозмінним** рухом називається рух рідини, що відбувається на ділянках, де лінії течії паралельні, або майже паралельні між собою і віссю труби.

Оскільки площі поперечних перерізів елементарних струминок мають диференціальні розміри, то в кожних точках елементарної площі  $dF$  швидкості руху  $u$  – однакові. Але в суміжних елементарних струминках швидкості будуть різні. Наприклад, плавнозмінний рух здійснюється на ділянках в циліндричних трубах (див. рис. 27, ділянка між перерізом 1-1, 2-2).

**Елементарна витрата** рідини  $dQ$ , що протікає крізь поперечний переріз елементарної струминки. Об'єм рідини, що протікає крізь поперечний переріз елементарної струминки за одиницю часу називається об'ємною витратою рідини  $dQ$ .

Доведемо, що об'ємна витрата рідини елементарної струминки дорівнює добутку площі поперечного перерізу  $dF$  на швидкість руху частинок в цьому перерізі

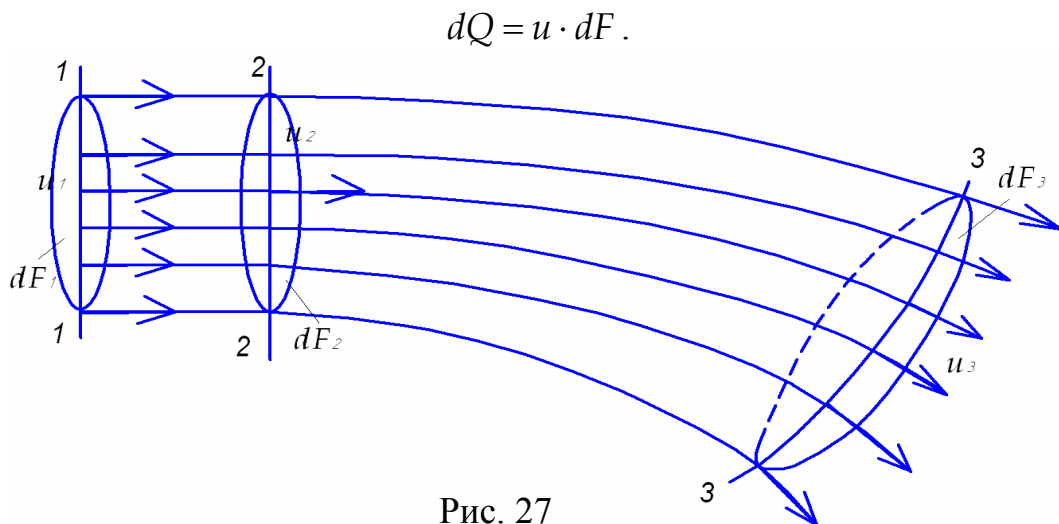


Рис. 27

Припустимо, що в перерізі 1-1 (рис. 27) швидкість руху частинок рідини в елементарній струминці –  $u$ . Ця швидкість однакова для всіх частинок рідини, що проходять через переріз 1-1. Тоді через деякий час  $dt$  частинки рідини, що знаходяться в перерізі 1-1 рухаючись зі швидкістю  $u$  перемістяться в переріз 2-2, подолав шлях  $dS$ . Отже, за час  $dt$  через поперечний переріз елементарної струминки  $dF$  пройде кількість рідини, що дорівнює об'єму  $dF \cdot dS$ . Тоді елементарна об'ємна витрата рідини буде

$$dQ = \frac{dS \cdot dF}{dt} = \frac{u \cdot dt \cdot dF}{dt} = u \cdot dF$$

$$dQ = u \cdot dF \tag{62}$$

Для газоподібної рідини масова витрата рідини буде

$$dM = \rho \cdot u \cdot dF$$

**Рівняння нерозривності** (суцільності) руху рідини в елементарній струминці. Оскільки поверхня елементарної струминки є поверхня трубки течії, яка непрониклива, то масова витрата рідини в будь-яких перерізах вздовж елементарної струминки є величина стала. Тоді

$$dm_1 = dm_2 = \dots = dm_n, \tag{63}$$

$$\text{або } \rho_1 \cdot u_1 \cdot dF_1 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot dF_2 = \dots = \rho_n \cdot u_n \cdot dF_n$$

Для двох перерізів газоподібної рідини

$$\rho_1 u_1 \cdot dF_1 = \rho_2 u_2 dF_2 ,$$

де  $\rho_1$  і  $\rho_2$  – густина газу в першому і другому перерізах.

Для краплинної рідини  $\rho_1 = \rho_2$ . Тоді рівняння нерозривності буде мати наступний вигляд:

$$dQ_1 = dQ_2 = \dots = dQ_n, \tag{64}$$

для двох перерізів 1-1 і 2-2

$$u_1 dF_1 = u_2 dF_2.$$

Звідки,

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{dF_2}{dF_1}, \tag{65}$$

Тобто, швидкості в двох перерізах обернено пропорційні площам поперечних перерізів елементарній струминки.



**Потік рідини** представляє собою сукупність елементарних струминок, щільно притиснутих одна до одної (рис. 31). В будь-яких перерізах, проведених на ділянках 1-1 чи 2-2 з плавномінім рухом витрата рідини потоку дорівнює сумарному значенню елементарних витрат, що мають окремі елементарні струминки. Тоді об'ємна витрата рідини потоку крізь його живий переріз  $F$  визначається як

$$Q = \int_F dQ = \int_F u dF. \quad (66)$$

В цьому рівнянні під знаком інтеграла входить швидкість частинок рідини в елементарній струминці  $u$ , яка змінюється в живому перерізу потоку. Так як ще не відомий точний аналітичний закон розподілення швидкостей в живому перерізі потоку, то для інтегрування рівняння (66) вводиться поняття середньої швидкості  $v$ . Тоді  $Q = \int_F v \cdot dF = v \cdot F$ . Звідки

$$v = \frac{\int_F u dF}{F} = \frac{Q}{F} \quad (67)$$

**Середня швидкість** – це така уявна, однакова у всіх точках живого перерізу потоку, при якій крізь цей переріз здійснюється та сама витрата, що й при дійсному розподілу швидкостей.

**Рівняння нерозривності** в гідравлічній формі для двох перерізів потоку, як що вважати, що між ними немає відведення або підведення рідини, і при умові усталеного руху, можна написати аналогічно рівнянням для елементарної струминки:

для стисливої рідини:

$$\rho v_1 F_1 = \rho_2 v_2 F_2 \quad (68)$$

і для нестисливої рідини

$$v_1 F_1 = v_2 F_2, \quad (69)$$

тобто ( $Q_1 = Q_2$ )

Об'ємні витрати рідини в будь-яких перерізах потоку є величина стала.

З рівняння (69) виходить, що швидкості потоку в перерізах обернено пропорційні відповідним площам поперечних перерізів.

Тобто 
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{F_2}{F_1} \quad (70)$$

### **Диференціальні рівняння руху ідеальної рідини.**

Розглянемо рух елементарного об'єму рідини у вигляді паралелепіпеда, подумки виділеного нами з потоку ідеальної рідини.

Рівняння руху ідеальної рідини можна одержати з диференціальних рівнянь рівноваги (спокою) такого ж самого елементарного об'єму рідини, якщо, згідно принципу Д'аламбера, до діючих сил (масових і поверхневих) приєднати сили інерції (див. рис. 3 і рівняння (22)). Тоді сума проекцій всіх сил, включаючи сили інерції на відповідні осі повинна дорівнювати нулю.

Сили інерції в проекціях на відповідні осі, віднесені до одиниці маси (як і всі сили, прикладені до елементарного об'єму, що знаходяться в стані спокою)

ввійдуть в рівняння руху відповідно до осей зі знаком мінус:  $I_x = -\frac{du_x}{dt}$ ;

$$I_y = -\frac{du_y}{dt}; I_z = -\frac{du_z}{dt}.$$

Тоді система диференціальних рівнянь для рухомої частинки рідини за час  $dt$  в проекціях на відповідні осі буде мати наступний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Ця система рівнянь встановлює зв'язок між проекціями масових сил, швидкостями, тиском і густиною рідини і називається системою диференціальних рівнянь Л. Ейлера. Вони є основою для вивчення самих головних питань гідродинаміки.

Якщо розглядати рух реальної рідини, тоді додатково до розглянутих сил додаються сили тертя. В результаті отримуємо систему диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса.

**Рівняння Бернуллі** для елементарної струминки ідеальної рідини. Для виведення цього рівняння застосовуємо систему диференціальних рівнянь Ейлера (71). Оскільки проекції прискорень  $\frac{du_x}{dt}$ ;  $\frac{du_y}{dt}$ ;  $\frac{du_z}{dt}$  — повні

диференціали і є функціями координат і часу ( $x, y, z, t$ ), то їх необхідно записати через часткові похідні. Тоді система рівнянь записується так:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

(так як, наприклад, для осі "x"

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

і в свою чергу:  $\frac{dx}{dt} = u_x$ ;  $\frac{dy}{dt} = u_y$ ;  $\frac{dz}{dt} = u_z$ ).

Аналогічно буде і для інших осей (як написано вище).

Для усталеного руху  $\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$ ;  $\frac{\partial u_y}{\partial t} = 0$ ;  $\frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$ , тоді система рівнянь (72),

запишеться так:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Помножимо перше рівняння даної системи на  $dx$ , причому рівняння ліворуч множимо на  $dx$ , а праворуч на  $u_x \cdot dt$ ; друге — на  $dy$  і третє — на  $dz$ .

Система диференціальних рівнянь буде:

$$\left. \begin{aligned} Xdx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= u_x \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x \cdot dt + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y \cdot dt + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \cdot dt \right) \\ Ydy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy &= u_y \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x \cdot dt + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y \cdot dt + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \cdot dt \right) \\ Zdz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= u_z \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x \cdot dt + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y \cdot dt + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \cdot dt \right). \end{aligned} \right\}$$

Так як  $u_x \cdot dt = dx$ ;  $u_y \cdot dt = dy$ ;  $u_z \cdot dt = dz$ , то вирази в дужках будуть повними диференціалами  $du_x$ ;  $du_y$ ;  $du_z$ . Тоді

$$\left. \begin{aligned} Xdx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= u_x du_x \\ Ydy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy &= u_y du_y \\ Zdz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= u_z du_z \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Далі складемо дані рівняння за вертикаллю (в стовпчик), причому  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  введемо під диференціал

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{du_x^2}{2} + \frac{du_y^2}{2} + \frac{du_z^2}{2}.$$

В дужках маємо повний диференціал тиску  $dp$ , а ліворуч  $\frac{d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}{2}$ , що дорівнює  $\frac{du^2}{2}$ . Тоді

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} dp - \frac{du^2}{2} = 0 \quad (75)$$

Розглянемо випадок, коли з масових сил на рідину в елементарній струминці діє тільки сила ваги, яка має прискорення "g" земного тяжіння. Тобто:  $X = 0$ ;  $Y = 0$ ;  $Z = -g$ .

Тоді рівняння (75) запишеться  $-gdz - \frac{dp}{\rho} - \frac{du^2}{2} = 0$ .

Поділимо це рівняння на  $(-g)$  і дістанемо:

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + \frac{du^2}{2g} = 0. \quad (76)$$

Рівняння (76) називається рівнянням Бернуллі в диференціальній формі. Воно застосовується як для газів (при  $\rho \neq \text{const}$ ) так і для рідин, для яких  $\rho = \text{const}$ .

Для краплинної рідини (і газів з  $\rho = \text{const}$ ) інтеграл рівняння (76) буде

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = C. \quad (77)$$

Для двох перерізів вздовж елементарної струминки ідеальної рідини рівняння Бернуллі буде мати наступний вигляд

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}, \quad (78)$$

де всі величини мають розмірність довжини (метри стовпа рідини), м.ст.р.

Рівняння Бернуллі розглядається відносно площини порівняння, яка проводиться нижче перерізів, або через нижній переріз.

$z_1, z_2$  – з геометричної точки зору представляють відстань центрів ваги відповідних поперечних перерізів до площини порівняння, а з енергетичної – питомі потенціальні енергії положення;

$\frac{p_1}{\rho g}$  і  $\frac{p_2}{\rho g}$  – з геометричної точки зору представляють п'єзометричні напори

(напори стовпчиків рідини в п'єзометричних трубках, які створюють відповідні тиски  $p_1$  і  $p_2$  на осі елементарної трубки, або труби). З енергетичної – питомі потенціальні енергії тиску;

$\frac{u_1^2}{2g}$  і  $\frac{u_2^2}{2g}$  – з геометричної точки зору представляють швидкісні напори, а з

енергетичної – питомі кінетичні енергії, якими володіє рідина, що проходить через перший і другий перерізи.

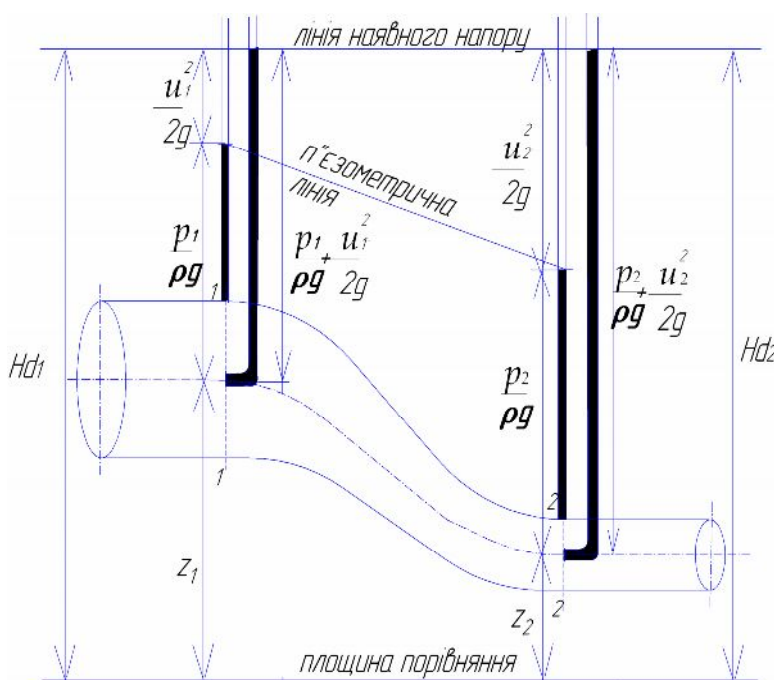


Рис. 28

Сума трьох напорів в будь яких перерізах вздовж елементарної струминки ідеальної рідини  $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$  відносно площини порівняння називається повним гідродинамічним напором (позначається  $H_d$ ) і є сталою величиною, тобто  $H_{d1} = H_{d2}$ .

Проілюструємо це на рис. 28.

В потоці рідини подумки виділимо елементарну струминку, яка розташована на осі труби. В кожному поперечному перерізі (на ділянках з плавномінім

рухом) встановимо по дві тонкі скляні трубки. Перша – п'єзометрична, друга – гідродинамічна. Гідродинамічна трубка (як видно на рис. 28) проходить в середину елементарної струминки, кінець якої загнутий на  $90^\circ$  і розташований на осі струминки, отвором назустріч потоку.

Якщо в перерізі  $1-1$  тиск  $p_1$ , то в п'єзометричній трубці рідина підніметься на висоту  $\frac{p_1}{\rho g}$ .

Одночасно в гідродинамічній трубці (загнутий кінець якої співпадає з віссю п'єзометра) рідина підніметься на висоту  $(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g})$ , так як на кінець гідродинамічної трубки діє не тільки тиск  $p_1$  а і кінетична енергія частинок рідини, яка перетворюється в потенціальну енергію тиску.

В другому перерізі на величину п'єзометричного напору  $\frac{p_2}{\rho g}$  буде впливати перехід частини геометричного напору  $z_1$  в п'єзометричний (у нашому випадку він збільшується на величину  $z_1 - z_2$  і в той же самий час зменшується на величину  $\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$  у зв'язку зі збільшенням швидкісного напору у другому перерізі за рахунок перетворення частини п'єзометричного напору  $\frac{p_2}{\rho g}$  у швидкісний (за законом нерозривності руху рідини  $u_2 = u_1 \frac{dF_1}{dF_2}$ ).

Як видно з рівняння (78) і рис. (28), повний гідродинамічний напір в першому перерізі  $H_{d1}$  дорівнює повному гідродинамічному напору в другому перерізі  $H_{d2}$ , тобто  $H_{d1} = H_{d2}$ .

Рівняння Бернуллі для елементарної струминки **реальної рідини** приймає наступний вигляд

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + (h_{em}^{1-2})' \quad (79)$$

де  $(h_{em}^{1-2})'$  – втрати напору при русі реальної рідини в елементарній струминці від першого до другого перерізів.

Втрати напору  $(h_{em}^{1-2})'$  виникають за рахунок наявності сил тертя на поверхнях суміжних елементарних струминок, які рухаються з різними швидкостями.

Як видно з рівняння Бернуллі (79) і рис 29, повний гідродинамічний напір в другому перерізі  $H_{d2}$  менший за  $H_{d1}$  на величину втрат напору  $(h_{em}^{1-2})'$  між цими перерізами, тобто  $H_{d1} - H_{d2} = (h_{em}^{1-2})'$ .

Швидкісний напір в другому перерізі той же самий що і при русі ідеальної рідини, так як на  $u_2$  впливають тільки  $dQ$  і  $dF_2$ , а вони – сталі величини.

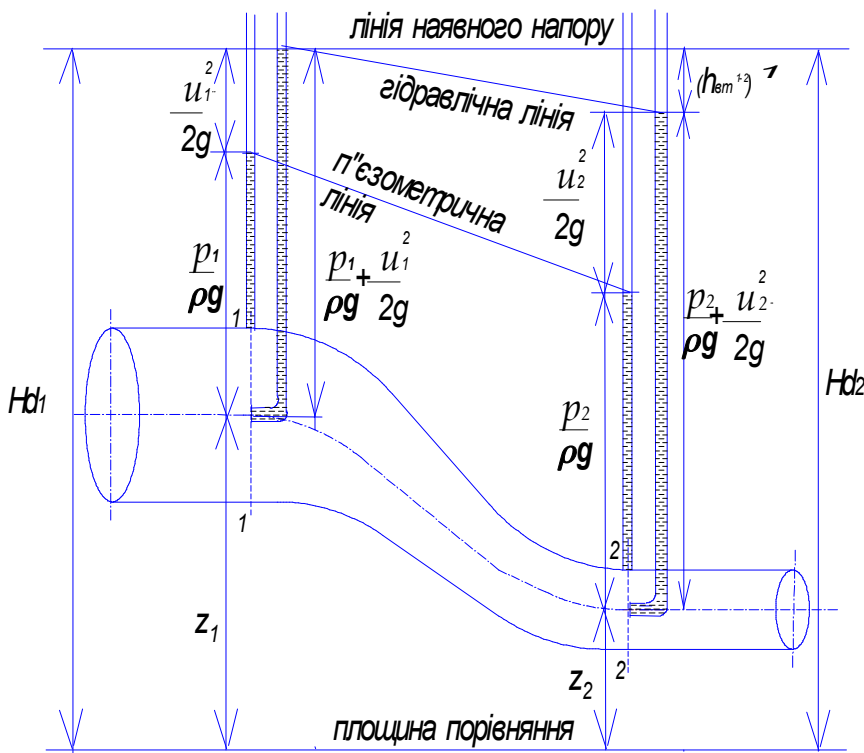


Рис. 29

**Властивість живих перерізів** на ділянках з плавномінім рухом потоку рідини.

**Перша властивість.** На ділянках з плавномінім рухом рідини живий переріз буде плоский оскільки лінії течії паралельні між собою і нормальні в кожній точці до площини живого перерізу і називаються площею поперечного перерізу. Площа поперечного перерізу (в циліндричній трубі)

нормальна до твірної циліндричної поверхні.

**Друга властивість.** У площі поперечного перерізу гідродинамічний тиск за вертикаллю підпорядковується основному рівнянню гідростатики (рис 30), тобто

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} = const$$

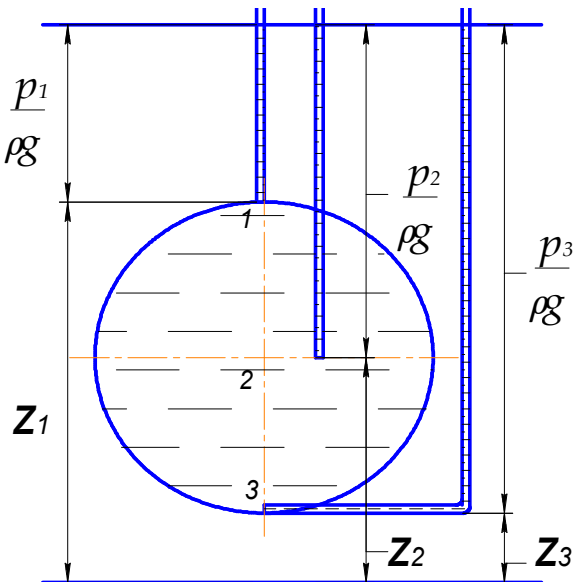


Рис 30

Доведемо другу властивість. Якщо координатна вісь  $x$  направлена вздовж осі потоку (циліндричної труби), то проекція складових векторів швидкості  $u_y$  і  $u_z$  в будь-яких точках на ділянках з плавномінім рухом на осі  $y$  і  $z$  будуть дорівнювати нулю, а вектор складової  $u_x$  буде співпадати з напрямом координати  $x$ . Тобто

$$u_x = u; \quad u_y = 0; \quad u_z = 0.$$

Тоді система диференціальних рівнянь для рухомої частини рідини на ділянках з плавномінім рухом на площині  $y$   $o$   $z$  (в площі поперечного перерізу) буде

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Два останніх рівняння показують, що гідродинамічний тиск в живому перерізі на ділянках з плавно змінним рухом підпорядковуються **основному рівнянню гідростатики**.

### Рівняння Бернуллі для потоку нестисливої рідини.

Проведемо живі перерізи 1-1 і 2-2 в потоці реальної рідини на ділянках з плавно змінним рухом, які перетинають всі елементарні струминки, що складають цей потік (рис. 31). Виділимо одну елементарну струминку з площами поперечних перерізів  $dF_1 > dF_2$  і запишемо рівняння Бернуллі для двох перерізів 1-1 і 2-2 в елементарній струминці реальної рідини.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + (h_{em}^{1-2})',$$

де величина  $z + \frac{p}{\rho g}$  в першому і другому перерізах представляють питомі потенціальні енергії положення і тиску;

величини  $\frac{u^2}{2g}$  в першому і другому перерізах представляють питомі кінетичні енергії рідини в елементарній струминці;

$(h_{em}^{1-2})'$  – втрати питомої енергії, що виникають за рахунок сил тертя на поверхнях суміжних елементарних струминок.

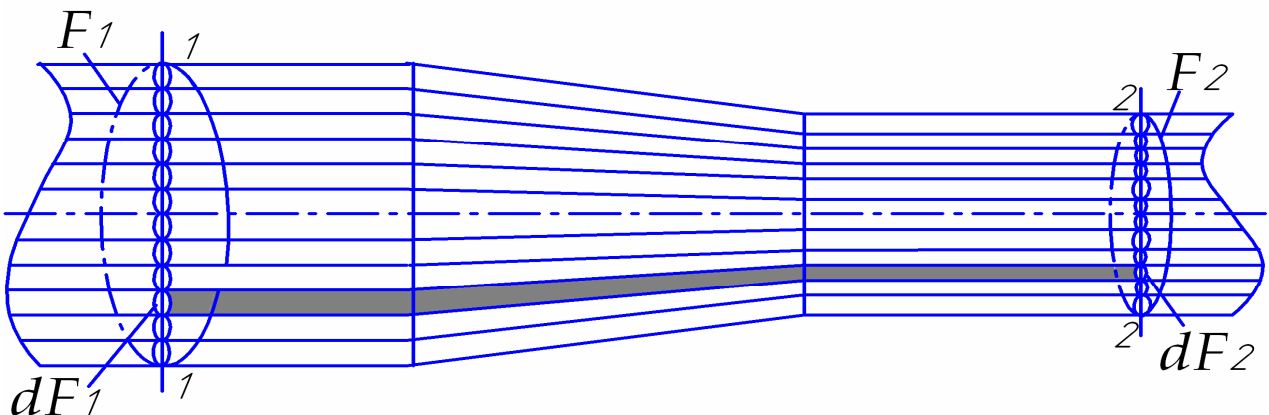


Рис 31.

Так як потік складається з сукупності елементарних струминок, то рівняння Бернуллі для цілого потоку реальної рідини можна дістати шляхом сумування

повних енергій всіх елементарних струминок, що складають потік, і втрат енергій, що виникають між сукупними елементарними струминками.

Помножимо всі величини, що складають рівняння Бернуллі для елементарної струминки реальної рідини на елементарну вагову витрату рідини  $\rho g dQ$  і враховуючи, що  $dQ = u dF$ , дістанемо рівняння Бернуллі для елементарної струминки (81), де  $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) \rho g dQ$  характеризує повну потенціальну енергію відносно вибраної площини порівняння;

$\left(\frac{u^2}{2g}\right) \rho g dQ$  – характеризує повну кінетичну енергію рідини в елементарній струминці;

$(h_{em}^{1-2})' \rho g dQ$  – повні витрати енергії, що виникають за рахунок сил тертя на поверхнях суміжних елементарних струминок (на поверхні одної елементарної струминки). Тоді:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) \rho g u_1 dF_1 + \frac{u_1^2}{2g} \rho g u_1 dF_1 = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) \rho g u_2 dF_2 + \frac{u_2^2}{2g} \rho g u_2 dF_2 + (h_{em}^{1-2})' \rho g u_2 dF_2. \quad (81)$$

Для отримання рівняння Бернуллі потоку реальної рідини необхідно проінтегрувати це рівняння за відповідними площами поперечних перерізів  $F_1$  і  $F_2$ .

Тобто, необхідно визначити три інтеграла наступного виду:

$$\int_F \left(z + \frac{p}{\rho g}\right) \rho g u dF ; \quad \int_F \frac{u^2}{2g} \rho g u dF ; \quad \int_F (h_{em}^{1-2})' \rho g u dF ;$$

$$\int_F \left(z + \frac{p}{\rho g}\right) \rho g u dF = \left(z + \frac{p}{\rho g}\right) \rho g v dF = \left(z + \frac{p}{\rho g}\right) \rho g Q ;$$

так як  $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$  – стала величина в перерізах з плавномінімним рухом і інтеграл

$$\int_F u dF = \int_F v dF = Q .$$

Інтеграл  $\int_F \frac{u^2}{2g} \rho g u dF = K_o$  – кінетична енергія потоку рідини, що розрахована, враховуючи дійсний розподіл швидкостей;



Інтеграл  $\int_F \frac{u^2}{2g} \rho g u dF$  можна проінтегрувати, якщо уявити собі, що швидкість руху рідини в кожній точці поперечного перерізу однакова, яка називається середньою швидкістю "v" в даному поперечному перерізу. Тобто інтеграл  $\int_F \frac{u^2}{2g} \rho g u dF$  можна представити як  $\int_F \frac{v^2}{2g} \rho g v dF$ . Тоді цей інтеграл буде дорівнювати  $\frac{v^2}{2g} \rho g v F = \frac{v^2}{2g} \rho g Q$ .

Позначимо  $K_v = \frac{v^2}{2g} \rho g Q$  – кінетична енергія потоку, що визначена за середньою швидкістю.

Відношення кінетичної енергії потоку, порахованої за дійсним розподілом швидкості у даному перерізі до кінетичної енергії потоку, порахованої за середньою швидкістю v, позначається через коефіцієнт  $\alpha$ . Тоді

$$\frac{K_\partial}{K_v} = \alpha, \quad (82)$$

$\alpha$  враховує нерівномірність розподілу швидкостей в живому перерізі.

Коефіцієнт  $\alpha$  називається коефіцієнтом кінетичної енергії, або коефіцієнтом Каріоліса.

Для ламінарного режиму  $\alpha = 2$ ;

Для турбулентного режиму  $\alpha = 1,05 \dots 1,1$ ;

$$K_\partial = \alpha K_v, \quad K_\partial = \alpha \frac{v^2}{2g} \rho g Q.$$

В інженерній практиці для турбулентного режиму часто приймають  $\alpha = 1$ .

Інтеграл  $\int_F (h_{\partial m}^{1-2})' \rho g u dF$  визначає суму витрат енергій при русі всіх елементарних струминок, що складають потік від перерізу 1-1 до перерізу 2-2.

За аналогією поняття про середню швидкість вводимо поняття про *середню витрату енергії* однакову для всіх елементарних струминок потоку, які перетинаються перерізами 1-1 і 2-2.

Тоді

$$\int_F (h_{\partial m}^{1-2})' \rho g u dF = h_{\partial m}^{1-2} \rho g v F,$$

де  $h_{\partial m}^{1-2}$  – втрати напору при русі потоку рідини від 1 до 2 перерізів.

Тоді проінтегроване рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини має вигляд:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) \rho g Q + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \rho g Q = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) \rho g Q + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \rho g Q + h_{\text{вм}}^{1-2} \rho g Q \quad (83)$$

Віднесемо повну енергію потоку до одиниці ваги, тобто поділимо кожен складову рівняння на  $\rho g Q$ . В результаті одержимо

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{\text{вм}}^{1-2} \quad (83)$$

Рівняння (84) є рівнянням Бернуллі для потоку реальної рідини, де кожна складова вимірюється в м ст. рідини.

В рівнянні Бернуллі втрати напору на подолання гідравлічних опорів  $h_{\text{вм}}$ , що мають місце при усталеному русі рідини, складаються з *втрат напору по довжині*  $h_l$  і *втрат напору* при проходженні рідини *крізь пристрої* (засувки, крани, повороти, розширення, звуження, сітки зворотні клапани і т.ін.), що встановлені на трубопроводі  $h_{\zeta}$  (місцеві опори). Необхідні розрахунки величин  $h_l$  і  $h_{\zeta}$  будуть наведені далі в окремому розділі.

Правила застосування рівняння Бернуллі:

1. рівняння Бернуллі записується для робочої ділянки трубопроводу, на кінцях якої відомі всі величини, що входять в рівняння, крім однієї, яку треба визначити;

2. перерізи 1-1 і 2-2 проводять на кінцях робочої ділянки, де лінії течії проходять паралельно одна одній, тобто на прямолінійних ділянках потоку (циліндрична труба);

3. якщо робоча ділянка має на своїх кінцях вільну поверхню (або дві), то переріз (чи перерізи) проводять по вільній поверхні (при цьому можуть бути невеликі неточності, якими можна знехтувати);

4. перерізи нумерують за рухом рідини;

5. площину порівняння проводять через нижній переріз, тоді одна з величин  $z$  випадає з рівняння, а друга – буде додатною;

6. якщо трубопровід горизонтальний, тоді площину порівняння проводять через вісь трубопроводу (при цьому  $z_1 = z_2 = 0$ );

7. остання складова рівняння  $h_{\text{вм}}^{1-2}$  враховує всі втрати напору між проведеними перерізами 1-1 і 2-2.

Якщо при розв'язанні інженерних задач є дві невідомі величини, то додатково застосовується рівняння нерозривності потоку в гідравлічній формі.

**Гідравлічний ухил** – це втрата напору по довжині на певній ділянці трубопроводу, яка припадає на одиницю довжини.

На рис. 32 зображений горизонтальний циліндричний трубопровід, на якому проведені два поперечних перерізи 1-1 і 2-2, відстань між ними  $l$ . В перерізах встановлені п'єзометричні і гідродинамічні трубки. Площина порівняння проведена через вісь трубопроводу.

Лінія наявного напору проходить через вільну поверхню рідини у гідродинамічній трубці, що встановлена у першому перерізі (горизонтальна лінія).

Рівняння Бернуллі для даного випадку буде (при  $z_1=z_2=0$ )

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_l;$$

В циліндричному трубопроводі  $v_1 = v_2$ , тоді

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = h_l.$$

Тобто, різниця тисків у перерізах 1-1 і 2-2 в горизонтальному трубопроводі діаметром  $d$  дорівнює втратам напору  $h_l$  за довжиною  $l$ .

Гідравлічний ухил буде

$$i = \frac{h_l}{l}. \quad (85)$$

Як бачимо на рис. 32 гідравлічна лінія (або лінія повного напору) і п'езометрична лінія для циліндричного трубопроводу паралельна одна одній.

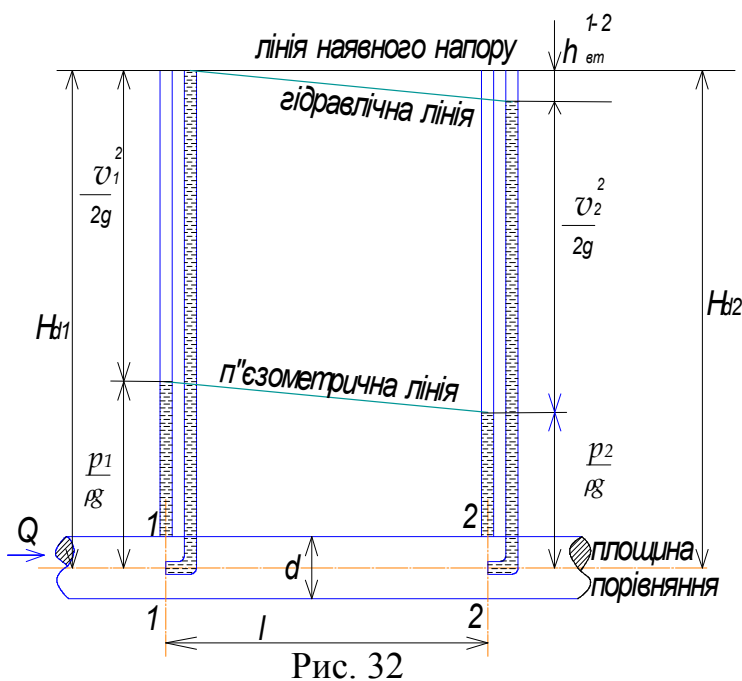


Рис. 32

П'езометрична лінія може спадати, а може і підніматися (як буде показано далі) в залежності від конструктивних розмірів відрізків, з яких складається трубопровід.

Відстані між лініями наявного напору і гідравлічною представляють собою втрати напору.

**Геометричний (енергетичний) зміст рівняння Бернуллі для потоку реальної рідини при усталеному русі** полягає в тому, що сума повного напору в

першому перерізі  $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}$  відносно площини порівняння завжди більша

суми повного напору в другому перерізі на величину втрат напору (енергії), що виникають при русі рідини між ними, тобто  $H_{d1} > H_{d2}$  на величину  $h_{em}^{1-2}$ .

Рівняння Бернуллі демонструє перехід одного виду напору (енергії) в інший. Так розглянемо рис. 33, 34, де показані труби, що складена з двох відрізків різних діаметрів. Відповідно до проведених перерізів у п'єзометричних і гідравлічних трубках встановлюються певні стовпчики рідини (у п'єзометричних –  $\frac{p}{\rho g}$ , у гідродинамічних трубках –  $\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$ ). Оскільки на рис. 34 і рис. 35 трубопроводи розташовані горизонтально, то  $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$ . Тоді покази гідродинамічних трубок будуть відповідати повному гідродинамічному напору  $H_d$ .

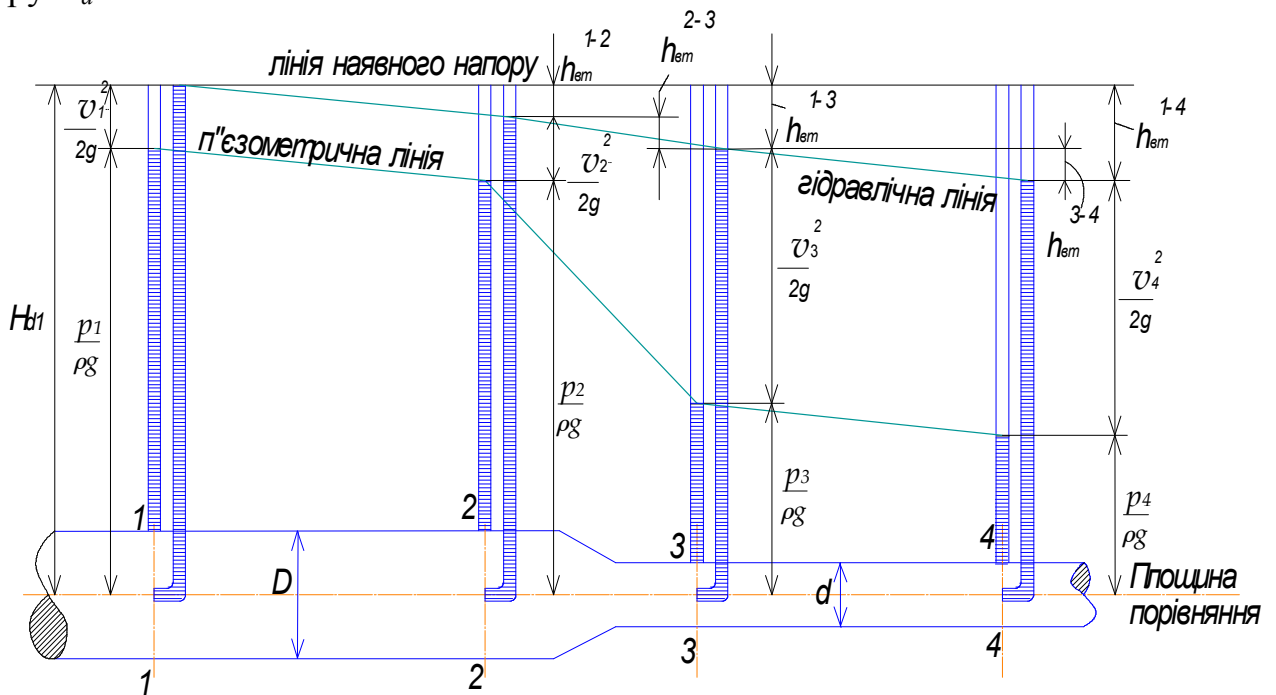


Рис. 33

З рівняння Бернуллі можна записати незалежно від того, що на рис. 33, 34  $d < D$  повні гідродинамічні напори переходячи від перерізу до перерізу, зменшуються на величину втрат напору, тобто

$$H_{d1} > H_{d2}; \quad H_{d3} > H_{d4}; \quad H_{d1} - H_{d2} = h_{em}^{1-2}; \quad H_{d2} - H_{d3} = h_{em}^{2-3}; \quad H_{d3} - H_{d4} = h_{em}^{3-4}.$$

Як показано на рис. 33 і рис. 34 між перерізами 1-1 і 2-2, а також 3-3 і 4-4 гідравлічні і п'єзометричні лінії розташовані паралельно одна одній тому, що рух рідини відбувається на циліндричних відрізках, де швидкості (швидкісні напори) однакові на протязі їх довжин.

Між перерізами 2-2 і 3-3 на рис. 33 відбувається перехід частини п'єзометричного напору (питомої потенціальної енергії) в частину швидкісного напору (кінетичної енергії) і в той же час п'єзометричний напір в перерізі 3-3 ще зменшується на величину втрат напору на подолання гідравлічного опору при проходженні потоку через звуження. На рис. 34 між перерізами 2-2 і 3-3 здійснюється розширення потоку, при цьому швидкість потоку зменшується від  $v_2$  до  $v_3$ . Тут відбувається перехід частини швидкісного напору (питомої

кінетичної енергії) в п'єзометричний напір (питому потенціальну енергію тиску) і в той же час п'єзометричний напір в перерізі 3-3 зменшується на величину місцевого опору (розширення потоку).

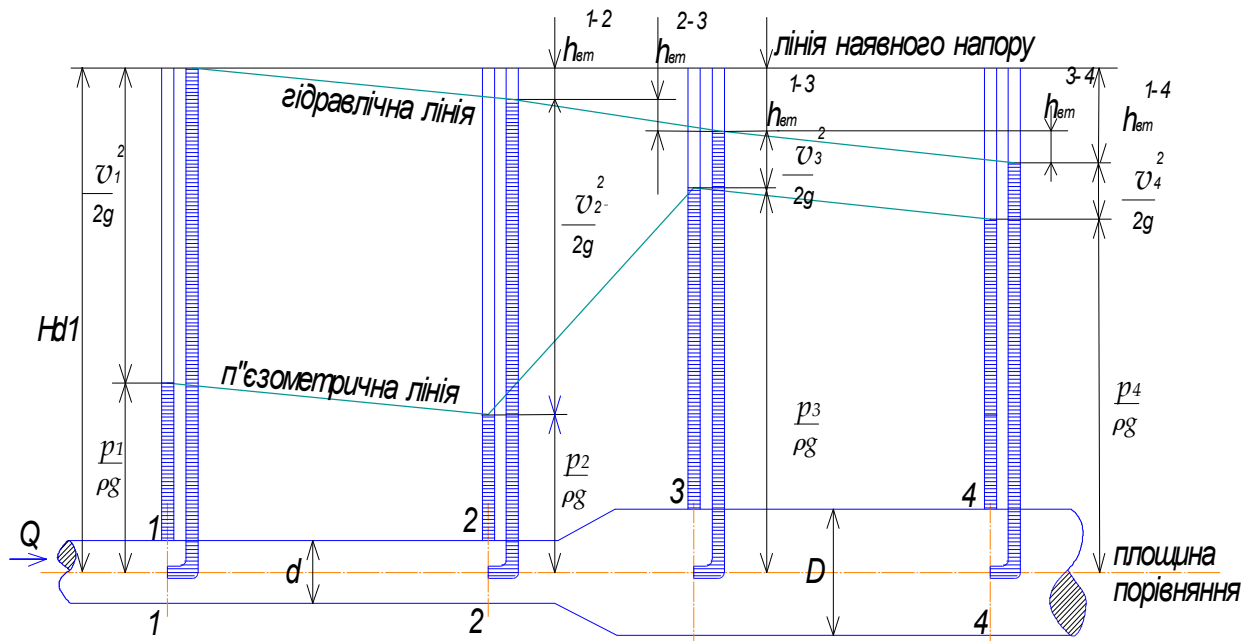


Рис. 34

**Приклад застосування рівняння Бернуллі сумісно з рівнянням нерозривності потоку.**

Труба Вентурі застосовується для вимірювання витрати рідини і являє собою плавно збіжно-розбіжну металеву вставку з фланцями на кінцях. Вона вставляється в певному місці на трубопроводі. Збіжна частина витратоміра виконується за формою струменя, який стискається від  $d_1$  діаметра труби до  $d_2$  діаметра циліндричної звуженої частини певної невеликої довжини. Після звуженої частини труба плавно розширюється до діаметра  $d_3$ , який з'єднується за допомогою фланців з трубопроводом (рис.35). Перед трубою Вентурі і на звуженій ділянці труби Вентурі встановлюються два п'єзометри (або диференціальний манометр).

Через точки приєднання першого і другого п'єзометрів проведемо поперечні перерізи 1-1 і 2-2.

При русі рідини в трубі Вентурі в перерізах 1-1 і 2-2 будуть відповідно тиски  $p_1$  і  $p_2$  і швидкості –  $v_1$  і  $v_2$ .

У вибраних перерізах п'єзометричні трубки показують різницю

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \Delta h.$$

Як відомо витрата рідини в трубопроводі визначається за формулою  $Q = v \cdot F$ . При швидкості  $v_1$  витрата рідини  $Q = v_1 \cdot F_1$ .

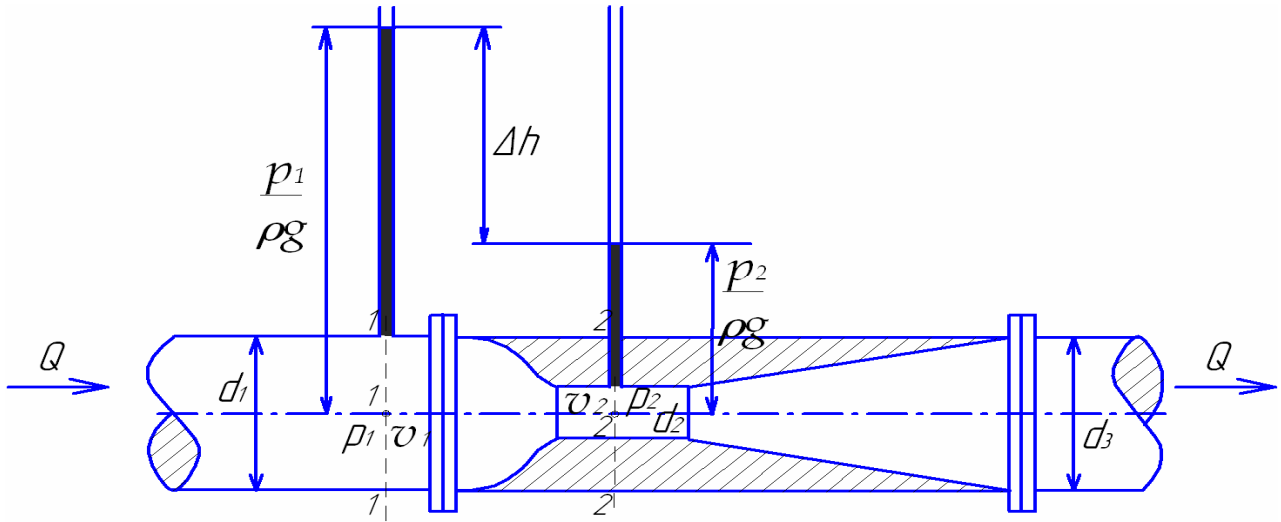


Рис. 35

Для визначення  $v_1$ , при відомих  $F_1$  і  $F_2$ , а також  $\frac{p_1}{\rho g}$  і  $\frac{p_2}{\rho g}$ , застосовується рівняння Бернуллі, яке пов'язує між собою п'єзометричні і швидкісні напори в різних перерізах

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + (h^{1-2}_{\text{втрати}})'$$

Оскільки труба горизонтальна, то  $z_1 = z_2 = 0$  (площина порівняння проходить через вісь труби). Втратами напору між перерізами 1-1 і 2-2 нехтуємо, так як відстань між ними мала. Тоді

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g};$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}; \quad \text{звідки} \quad \Delta h = \frac{v_1^2}{2g} \left( \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 \right) \quad (86)$$

Позначимо  $\frac{F_2}{F_1} = m$  ( $m$  – коефіцієнт стиснення потоку). З рівняння нерозривності потоку для двох означених перерізів можна записати, що

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{F_2}{F_1} = m. \quad \text{Тоді рівняння (86) буде}$$

$$\Delta h = \frac{v_1^2}{2g} \left( \frac{F_2^2}{F_1^2} - 1 \right), \quad \text{або} \quad \Delta h = \frac{v_1^2}{2g} \left( \frac{1}{m^2} - 1 \right), \quad \text{звідки} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{1}{m^2} - 1}}.$$

$$\text{Так як } Q_{\text{в.в.}} = v_1 \cdot F_1, \quad \text{тоді} \quad Q_{\text{в.в.}} = \sqrt{\frac{2gF_1^2}{\frac{1}{m^2} - 1}} \cdot \sqrt{\Delta h}$$

де  $Q_{\text{в.в.}}$  – витрата рідини, що визначається за даними витратоміра Вентурі (в.в.);

$$\sqrt{\frac{2gF_1^2}{\frac{1}{m^2} - 1}} \quad \text{залежить тільки від сталих величин } (d_1 \text{ і } d_2)$$

Тоді  $\sqrt{\frac{2gF_1^2}{\frac{1}{m^2}-1}}$  = С є сталою величиною, яка називається **сталою вен турі** і

витрати рідини визначаються за формулою

$$Q_{в.в.} = C \sqrt{\Delta h} \quad (87)$$

Знаючи  $\Delta h$  і сталу С знаходимо відповідну величину  $Q_{в.в.}$ .

Застосування труби Вентурі для визначення дійсного значення  $Q_{в.в.}$  вводиться поправочний коефіцієнт  $\alpha$ , який представляє собою відношення дійсної витрати рідини (визначається дослідним шляхом) до  $Q_{в.в.} = C \cdot \sqrt{\Delta h}$ .

$$\text{Тоді } Q_{в.в.} = \alpha C \cdot \sqrt{\Delta h}. \quad \alpha = \frac{Q_{г.г.}}{Q_{в.в.}} \quad (88)$$

### Основне рівняння рівномірного руху

Рівномірний рух рідини, як правило, відбувається в трубопроводах, повітропроводах, каналах.

Гідрравлічні розрахунки трубопроводів, повітропроводів, каналів полягають у визначенні гідрравлічних опорів, які, в свою чергу залежать від режимів руху рідини. В кожному з режимів (ламінарний і турбулентний) є свої закономірності між геометричними і гідродинамічними параметрами, які дають можливість знайти певні залежності для визначення втрат напорів за довжиною

і місцевих опорів. Основою для знаходження цих залежностей є основне рівняння рівномірного руху. Виділимо подумки відсік потоку рідини в циліндричному трубопроводі, в якому здійснюється рівномірний рух (рис. 36).

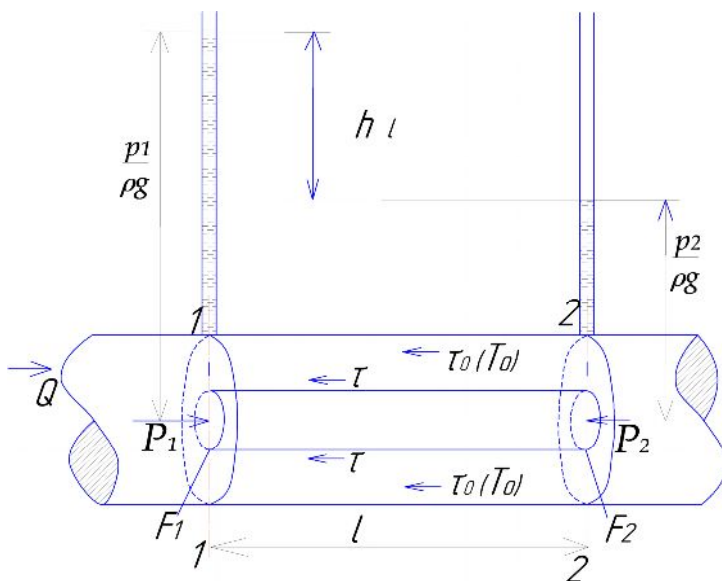


Рис. 36

На границях відсіку проведемо поперечні перерізи 1-1 і 2-2. Відстань між перерізами – l. В поперечних перерізах встановимо п'єзометри, які показують

п'єзометричні напори  $(\frac{p_1}{\rho g}$  і  $\frac{p_2}{\rho g})$ ,

різниця яких буде  $h_l$ .

При  $z_1 = z_2 = 0$ ;  $F_1 = F_2 \rightarrow v_1 = v_2$ , які в рівнянні Бернуллі скорочуються.

$$\text{Тоді } \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = h_l.$$

Згідно принципу Даламбера при рівномірному русі рідини сили діючі на відсік рідини будуть дорівнювати силам опорів, що виникають при русі в цьому відсіку. Для цього руху характерна відсутність сил інерції.

На виділений об'єм рідини діють такі зовнішні сили: нормальні до живих (поперечних) перерізів сили тиску  $P_1=p_1 \cdot F_1$  і  $P_2=p_2 \cdot F_2$  і дотичні сили опору  $T$ , прикладені до бокових поверхонь відсіку. Напрявлені сили опору в бік, протилежний рухові. Позначимо напруження від цих сил, що діють на нерухомій внутрішній поверхні труби і потоком через  $\tau_0$ , а змочений периметр живого перерізу – через  $\chi$ . Змочений периметр – це лінія стикання рідини зі стінкою. Тоді поверхня, де діють дотичні сили опору, що обумовлені наявністю сил тертя, дорівнюватиме  $\chi \ell$ , а сама сила  $T_0 = \tau_0 \cdot \chi \cdot \ell$ .

Спроекуємо зазначені сили на вісь руху

$$P_1 - P_2 = T_0 \quad (89)$$

або  $p_1 \cdot F - p_2 \cdot F = \tau_0 \cdot \chi \cdot \ell$ .

Поділивши це рівняння на  $F\rho g$ , дістанемо

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{\tau_0 \chi \ell}{\rho F g};$$

далі підставляємо замість  $\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = h_\ell$ ;

$\frac{\chi}{F} = \frac{1}{R}$ , де  $R$  — гідравлічний радіус ( $R$ — відношення площі поперечного

перерізу потоку до довжини змоченого периметра  $R = \frac{F}{\chi}$ ) і поділимо рівняння

на  $\ell$ .

Тоді  $\frac{h_\ell}{\ell} = \frac{\tau_0}{\rho} \cdot \frac{1}{Rg}$ , так як  $\frac{h_\ell}{\ell} = i$ , отримаємо

$$\frac{\tau_0}{\rho} = R \cdot i \cdot g \quad (90)$$

Останнє рівняння є основним рівнянням рівномірного руху.

Подібно до викладеного вище можна скласти рівняння рівноваги для виділеного відсіку всередині рідини, радіус якого  $r_0$ . Тоді в рівняння рівномірного руху (90) замість напруження біля стінки  $\tau_0$  ввійде напруження сил опору  $\tau$  між стичними поверхнями рідини радіуса  $r$ , що діють на циліндричній поверхні. Замість  $R$  підставимо  $R = \frac{\pi r^2}{2 \pi r} = \frac{1}{2} r$ .

Тоді  $\frac{\tau}{\rho} = \frac{1}{2} g r i$ , або

$$\tau = \frac{1}{2} \rho g i \cdot r, \quad (91)$$

де  $\tau$  – напруження сил опору в точці на радіусі  $r$  від осі.

Позначимо  $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_*$ , де  $u_*$  – динамічна швидкість, м/с.



Оскільки дотичні напруги на стінці труби  $\tau_0 = \frac{1}{2} \rho g i \cdot r_0$ , то дотичні напруження в точці на радіусі  $r$  будуть  $\tau = \frac{1}{2} \rho g i \cdot r$ . Звідки

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{r}{r_0}.$$

Отже, дотичні напруження по перерізу круглої труби розподіляються за лінійним законом.

Величина дотичних напружень перш за все залежить від режимів руху рідини.

### Режими руху рідини

Спостереження показують, що при русі рідини можливі дві різні форми руху – ламінарний і турбулентний.

**Ламінарним** (шаровим) режимом руху рідини називається такий рух, при якому окремі частинки рідини переміщуються за прямолінійними траєкторіями паралельно до стінок і одна одної. Можна сказати, що рідина в круглій трубі рухається концентричними кільцевими шарами, які не перемішуються один з одним.

**Турбулентним** рухом рідини називається такий рух, при якому поряд із загальним поступальним рухом мають місце і поперечні переміщення частинок, тобто у всьому потоці відбувається процес безперервного перемішування частинок рідини.

Турбулентний потік своїми властивостями різко відрізняється від ламінарного. Перш за все це стосується закону гідравлічного опору в трубах.

Вперше англійський дослідник О. Рейнольдс, виконавши велику кількість дослідів, встановив, що перехід від ламінарного режиму течії до турбулентного, і навпаки, від турбулентного до ламінарного, в круглих трубах, визначається чотирма фізичними величинами: середньою швидкістю течії  $v$ , діаметром труби  $d$ , в'язкістю  $\mu$  і густиною рідини  $\rho$ . За допомогою цих чотирьох величин необхідно скласти вираз, який характеризував би режим руху рідини і був би придатний до рідин різної густини і в'язкості, що рухається з різними швидкостями в трубах різних діаметрів. Застосувавши метод розмірностей, до сказаного вище, можна знайти вид формули з точністю до безрозмірного числового коефіцієнта. Цей безрозмірний коефіцієнт є критерієм режиму руху рідини, який називається числом **Рейнольдса**  $Re$ , тобто величина

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu}, \quad (93)$$

де  $l$  – характерний розмір потоку.

При напірному русі за характерний розмір звичайно приймається внутрішній діаметр труби  $d$ . В інших випадках – гідравлічний радіус, або приведений діаметр  $d_{np}$ . Таким чином число Рейнольдса для труб круглого перерізу має вигляд

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}. \quad (94)$$

Дослідні дані Рейнольдса показують наявність трьох областей: ламінарної (рис. 37) – лінія  $AK$ , турбулентної – лінія  $BC$  і нестійкої – лінія  $KB$ , що розташована між  $K$  і  $B$ .

На рис. 37 по осі абсцис відкладені числа  $Re$ , по осі ординат — гідравлічний уклон  $i$ . На побудованих (на основі дослідних даних) лініях точки  $K$  відповідає нижній критичний  $Re_{кр}^H$ ; точки  $B$  — верхній критичний  $Re_{кр}^B$ . Всі точки, що розташовані нижче точки  $K$  відносяться до ламінарного режиму; а вище точки  $B$  — до турбулентного.

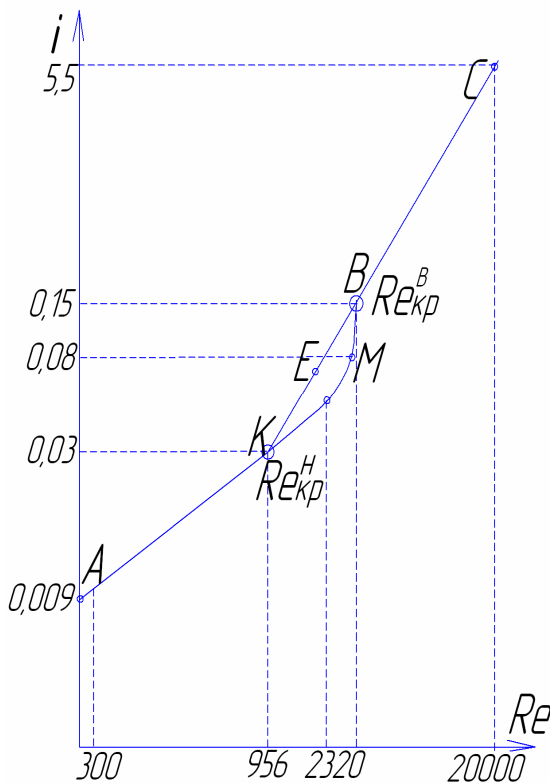


Рис. 37

Якщо швидкості змінюються від малих до великих, тоді ламінарний режим може утримуватись до точки  $M$  і далі (на ділянці  $MB$ ) ламінарний режим переходить в турбулентний до точки  $B$ . При переході від ламінарного руху до турбулентного положення точки  $M$  залежить від багатьох випадкових причин (умови входу в трубу, шорсткості стінок труби, наявності або відсутності початкових збурень рідини в місткості, звідки відбувається витікання, конвекційних течій і т.ін.) і вона (точка  $M$ ) може змінювати своє положення на відріжку  $KMB$ , тобто число  $Re$  може бути зменшене, або, навпаки ламінарний режим буде затягнутий. О. Рейнольдсом встановлено, що критичне число  $Re_{кр}$ , яке відмежовує ламінарний режим руху від турбулентного для круглих труб дорівнює  $Re_{кр} = 2300$ .

При  $Re > 2300$  рух буде турбулентним, при  $Re < 2300$  — ламінарним.

Точніші досліди показують, що в межах зміни  $Re = 2000 \div 4000$  відбувається періодична зміна турбулентного і ламінарного режимів. Тобто існує так звана зона перемінної турбулентності, нестійкий турбулентний режим.

Професором Тепловим А.В. встановлено, що нижнє (в точці  $K$ ) критичне число Рейнольдса  $Re_{кр}^H = 956$ . Тобто ламінарний режим буде стійким при  $Re \leq 956$ .

Верхнє  $Re_{кр}^B$  може змінюватись у значних межах (до 14000).

Зазначені дані стосуються рівномірного руху рідини і газу в трубах. При нерівномірному русі вплив на величину  $Re_{кр}$  справляє характер зміни швидкостей вздовж течії. Так, у звужуваних трубах  $Re_{кр}^H$  зростає і може бути понад 20000 для труб круглого перерізу. Навпаки, в трубах, що розширюються перехід від турбулентного режиму до ламінарного може настати при  $Re_{кр}^H < 2000$ .

Отже, при проектуванні турбулентного режиму руху необхідно щоб число  $Re$  було  $> 14000$ ; при проектуванні ламінарного —  $Re$  повинно бути  $< 956$ . В трубопроводах систем опалення, вентиляції, газопостачання, теплопостачання, водопостачання (газотепловодопостачання) та ін. рух, як правило, завжди турбулентний.

### Закони ламінарного руху рідини

**Закон розподілу швидкостей** в поперечному перерізі круглої труби.

З метою визначення закону зміни швидкості в поперечному перерізі круглої труби скористуємося формулою Ньютона про внутрішнє тертя в рідині

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}, \quad (95)$$

де  $\tau$  — дотичне напруження між двома шарами (або частинками) рідини, на певному радіусі від осі труби;

$\mu$  — динамічний коефіцієнт в'язкості;

$\frac{du}{dr}$  — градієнт швидкості;

Знак мінус (в формулі 95) означає, що градієнт швидкості зменшується від осі труби до стінок.

З другого боку така ж сама величина дотичної напруги на радіусі  $r$  від осі труби визначається за допомогою основного рівняння рівномірного руху, тобто  $\tau = \frac{1}{2} \rho g i r$ , де  $i$  — гідравлічний ухил.

Тоді 
$$\frac{1}{2} \rho g i r = -\mu \frac{du}{dr},$$

де  $du$  — зміна швидкості між сукупними частинками (шарами) рідини.

Звідси 
$$du = -\frac{\rho g i}{2\mu} r dr,$$

тоді невизначений інтеграл буде

$$u = -\frac{\rho g i}{4\mu} r^2 + C,$$
 де  $C$  — стала інтегрування.

Знаходимо  $C$  з положення, що на стінці труби швидкість дорівнює нулю. Якщо позначимо  $r_0$  — відстань від осі до стінки труби, то при  $r = r_0$   $u = 0$ .

Тоді 
$$0 = -\frac{\rho g i}{4\mu} r_0^2 + C,$$
 або 
$$C = \frac{\rho g i}{4\mu} r_0^2;$$
 звідки:

$$u = \frac{\rho g i}{4\mu} (r_0^2 - r^2); \quad (96)$$

Формула (96) встановлює залежність швидкості в будь-яких точках поперечного перерізу від геометричних і гідродинамічних параметрів потоку і називається формулою Стокса.

З формули виходить, що швидкості при ламінарному русі розподіляються за параболічним законом. Крива розподілу є симетрична парабола (рис. 38, а).

Графічне зображення розподілу дотичних напружень в поперечному перерізі круглої труби [з формули ( $\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{r}{r_0}$ )] показано на рис. 38, б. На осі при  $r = 0$

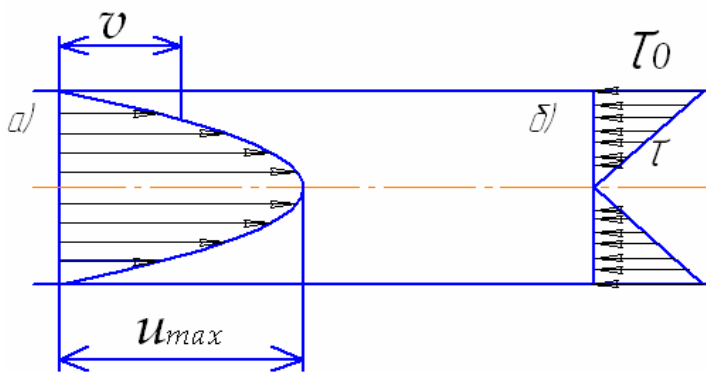


Рис. 38

$$u = u_{\max}$$

$$u_{\max} = \frac{\rho g i}{4\mu} r_0^2 \quad (97)$$

**Витрата рідини**, що здійснюється в поперечному перерізі круглої труби від геометричних і гідродинамічних параметрів потоку.

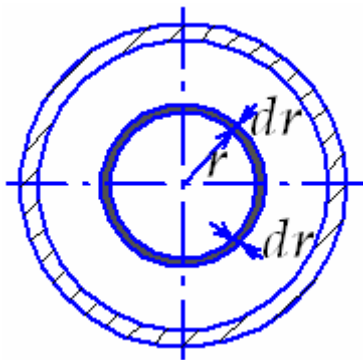


Рис. 39

В поперечному перерізі виділимо елементарну площу у вигляді кільця з радіусами  $r$  і  $r+dr$  (рис. 39). Елементарна витрата рідини крізь це кільце буде

$$dQ = u \cdot dF = u \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Підставляючи значення швидкості (96) в точці на радіусі  $r$  поперечного перерізу дістанемо.

$$dQ = \frac{\rho g i}{4\mu} (r_0^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr$$

Для визначення повної витрати рідини крізь поперечний переріз труби в межах зміни  $r$  від нуля до радіуса труби  $r_0$  інтегруємо вираз ( $dQ$ ).

$$Q = \int_0^{r_0} \frac{\rho g i \cdot 2\pi r \cdot dr}{4\mu} r_0^2 - \int_0^{r_0} \frac{\rho g i \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot r^2}{4\mu} = \frac{2\pi\rho g i}{2 \cdot 4\mu} r_0^4 - \frac{\pi\rho g i}{8\mu} r_0^4 = \frac{\pi\rho g i}{8\mu} r_0^4 T$$

обто

$$Q = \frac{\pi\rho g i}{8\mu} r_0^4 \quad (98)$$

Формула (98) встановлює залежність витрати рідини від геометричних і гідродинамічних параметрів потоку.

**Середня швидкість** в поперечному перерізі круглої труби радіусом  $r_0$  визначається як  $v = \frac{Q}{F}$

$$v = \frac{\pi\rho g i r_0^4}{8\mu\pi r_0^4} = \frac{\rho g i}{8\mu} r_0^2 \quad (99)$$

Порівнюючи величини середньої швидкості з максимальною

$$\frac{v}{u_{\max}} = \frac{\rho g i r_0^2}{8\mu} \cdot \frac{4\mu}{\rho g i r_0^2} = \frac{1}{2}$$

дістанемо, що середня швидкість в двічі менша за максимальну, тобто

$$v = \frac{1}{2} u_{\max} \quad (100)$$

## Закон залежності втрати напору за довжиною від геометричних і гідродинамічних параметрів потоку

Втрата напору за довжиною труби може бути визначена застосовуючи формулу (99).

Представимо цю формулу в залежності від діаметра трубопроводу

$$v = \frac{\rho g i}{32 \mu} d^2 .$$

В формулі  $i$  (гідрравлічний уклон або втрата напору, що приходить на одиницю довжини труби). Тоді втрата напору на довжині  $l$  буде

$$i \cdot l = \frac{32 \mu v l}{\rho g d^2} \quad (101)$$

З формули (101) видно, що втрата напору за довжиною при ламінарному режимі залежить від швидкості  $v$  в першій степені.

Помножимо чисельник і знаменник на  $2v$

$$h_\ell = \frac{2 \cdot 32 \mu l v v}{d \rho v d g^2}, \text{ і виконавши певне групування чисел дістанемо}$$

наступний вираз

$$h_\ell = \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g},$$

де  $\frac{\mu}{v d \rho} = \frac{1}{\text{Re}}$ ,  $\frac{64}{\text{Re}} = \lambda$  – коефіцієнт опору тертя за довжиною круглої труби.

Тоді

$$h_\ell = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (102)$$

Формула 102 була отримана Дарсі і Вейсбахом і одержала назву формулою Дарсі – Вейсбаха. Вона є основною трубопровідною формулою і показує залежність втрат напору за довжиною від геометричних і гідродинамічних параметрів потоку.

Залежності для визначення  $u$ ,  $Q$ ,  $v$  і  $h_\ell$  не точні на початковій ділянці труби, де здійснюється стабілізація параболічного профілю швидкостей. Довжина цієї ділянки  $L_{\text{поч}}$  залежить від  $Re$  і  $d$  і знаходиться за формулою Шиллера

$$L_{\text{поч}} = 0,029 \text{ Re} \cdot d \quad (103)$$
$$L_{\text{поч}}^{\text{макс}} \cong 60d$$

## Турбулентний рух рідини

Переважає більшість течій, які зустрічаються в техніці є турбулентними. Заміри показують, що в кожній точці при усталеному русі вектор швидкості неперервно змінюється.

Швидкість у даній точці турбулентного потоку, що заміряна в даний момент часу, називається **миттєвою**.

Уявимо потік рідини в якому через будь-яку фіксовану точку, (точка А) за деякий відрізок часу ( $T_2 - T_1$ ) проходять різні частинки рідини з різними

векторами швидкостей (рис. 40). Якщо спроектувати проекції цих векторів на вісь руху рідини дістанемо типову картину зміни проекції векторів в часі.

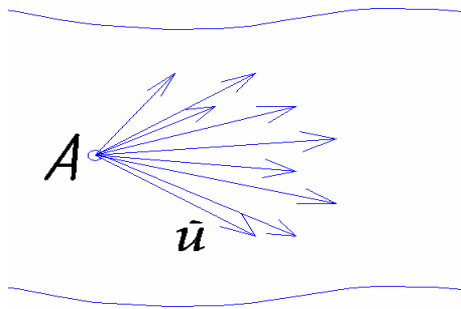


Рис. 40

На рис. 41 показано зміну проекцій миттєвих швидкостей на вісь руху (пульсаційна крива), що проходять за певний відрізок часу ( $T_2 - T_1$ ) різні частинки рідини крізь точку  $A$ . Проекції векторів швидкостей  $\bar{u}_1$  і  $\bar{u}_2$  – це проекції векторів в дану мить. З рис. 41 видно, що миттєві вектори швидкостей неперервно пульсують, тобто змінюються біля деякої середньої величини, яка називається **вектором осередненої швидкості  $\bar{u}_{осер.}$** .

Графічно цей вектор осередненої швидкості виражається висотою прямокутника  $\bar{u}_{осер.}$  рівновеликої площі, замкненої між пульсаційною кривою, віссю абсцис і двома ординатами, відповідно початковому  $T_1$  і кінцевому  $T_2$  моментами спостереження.

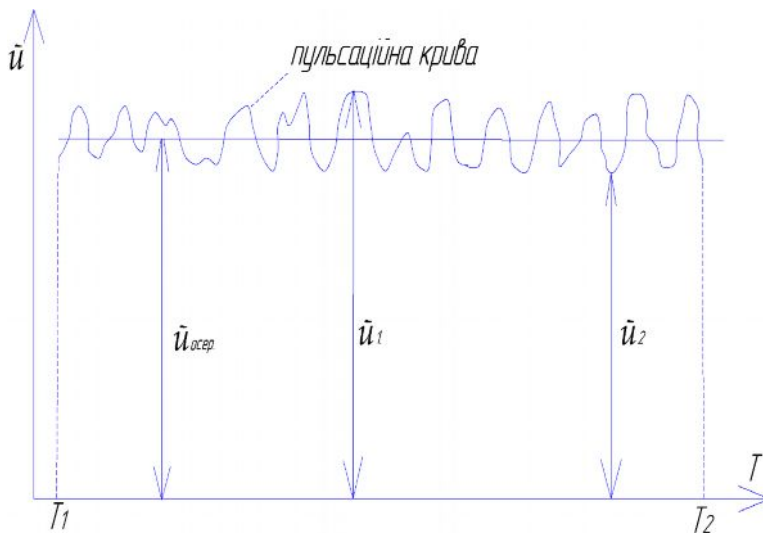


Рис. 41

**Осередненою** швидкістю називається швидкість у даній точці, середня за деякий проміжок часу. Вона визначається залежністю

$$\bar{u}_{осер.} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\bar{u}}{T_2 - T_1} \cdot dt.$$

Проміжок часу ( $T_2 - T_1$ ) повинен бути таким, щоб осереднена швидкість мало відрізняється від швидкості, що отримана за значний час.

Як правило, ( $T_2 - T_1$ ) коливається в межах 2-5

хвилин в залежності від певних умов проведення дослідів.

Поняття осередненої швидкості вперше було запропоновано Буссінеском (1867р) і розвинене Рейнольдсом. За допомогою цього поняття дійсний турбулентний потік з хаотичним переміщенням частинок рідини, замінюють уявною моделлю потоку, як сукупності елементарних струминок, швидкості яких представляють вектори осереднених швидкостей, які паралельні осі і одна одній, тобто хаотичний рух частинок рідини замінений на фіктивно паралельно струминний рух. А це означає, що до турбулентного потоку можна застосовувати рівняння Бернуллі.

### Пристінний шар і ядро течії

При турбулентному русі рідини, як показують дослідження, біля стінки труби існує загальмований стінкою дуже тонкий шар рідини, який називається **пристінним шаром  $\beta_{ш}$** .

Величина пристінного шару залежить від в'язкості і швидкості рідини, тобто від числа Re.

Користуючись методом аналізу розмірностей визначимо  $\beta_u$ . Як відомо

$$\beta_u = A(v, \gamma) \quad (105)$$

або, приймаючи степеневу залежність маємо

$$\beta_u = A v^a \gamma^b, \quad (106)$$

де  $A, a, b$  – деякі константи.

Рівняння (106) записане через розмірності буде мати наступний вигляд

$$T^0 L^1 = L^a T^a L^{2b} T^b, \quad (107)$$

де  $T^0 = 1$

В рівнянні (107) розмірність ліворуч повинна дорівнювати розмірності праворуч, що відбувається при рівності степенів при однакових символах ( $T, L$ ).

$$\begin{aligned} 0 &= -a - b \\ 1 &= a + 2b \end{aligned}$$

З цієї системи рівнянь, отримуємо:

$$a = -1, \quad b = 1.$$

Підставляючи значення  $a = -1$  і  $b = 1$  з урахуванням сталого коефіцієнта  $A$  в рівняння (106) дістанемо:

$$\beta_u = A \frac{\gamma}{v} \quad (108)$$

Тобто, зі збільшенням швидкості руху рідини, при незмінній в'язкості, величина пристінного шару зменшується. В межах пристінного шару рідина рухається за законом ламінарного режиму. Величина пристінного шару дуже мала. Вона коливається від 0,05...1 мм. За пристінним шаром рухається ядро турбулентного потоку.

### Закон розподілу швидкості в ядрі потоку

На основі дослідів, проведених В. Фрічем, в ядрі течії градієнт швидкості залежить тільки від двох величин: динамічної швидкості  $u_*$  і відстані  $y$  до стінки (від точки на кривій розподілу швидкості до стінки труби). Тобто

$$\frac{du}{dy} = f(u_*, y), \quad (109)$$

Градієнт швидкості  $\frac{du}{dy}$  можна знайти скориставшись методом аналізу розмірностей. Приймаючи степеневу залежність в рівнянні (109), дістанемо

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{K} u_*^m \cdot y^n \quad (110)$$

де  $\frac{1}{K}, m, n$  — деякі константи.

Запишемо рівняння (110) через розмірності:

$$L^0 T^{-1} = L^m T^m L^n$$

З цієї рівності маємо:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= m+n \\ -1 &= -m \end{aligned} \right\}$$

Звідки:  $m = 1; n = -1$ .

При отриманих значеннях  $m$  і  $n$  рівняння (110) приймає вигляд:

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{K \cdot y}. \quad (111)$$

Тоді зміна швидкості в ядрі потоку буде

$$du = \frac{u_*}{K} \frac{dy}{y}.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$u = \frac{u_*}{K} \ln y + C \quad (112)$$

формула (112) показує, що закон розподілу швидкості в ядрі турбулентного потоку — **логарифмічний**, що підтверджується експериментами.

**Епюра розподілу швидкості** в поперечному перерізі турбулентного потоку.

З формули (112) для циліндричної труби після певних перетворень можна дістати залежності для визначення середньої і максимальної швидкостей в ядрі турбулентного потоку, а також знайти залежність положення вектора осередненої швидкості в ядрі потоку від стінки труби до певної точки, де розташовується цей вектор.

Середня швидкість:

$$v = u_{\max} - 1,5 \frac{u_*}{K}; \quad (113)$$

вектор осередненої швидкості

$$\bar{u} = v + 5,09 u_* \lg \frac{y}{r} + 3,32 u_*; \quad (114)$$

вектор максимальної швидкості

$$\bar{u}_{\max} = u - \frac{u_*}{K} \ln \frac{yv}{r}; \quad (115)$$

$$y_v = 0,223r, \quad (116)$$

де  $r$  – радіус труби

$y_v$  – відстань від стінки до точки, де знаходиться вектор середньої швидкості. Тоді епюра розподілу осереднених швидкостей в поперечному перерізі буде мати наступний вигляд:

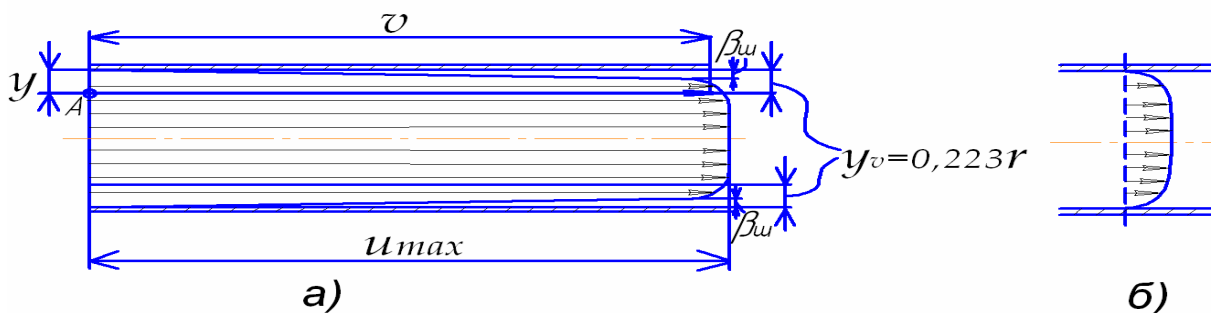


Рис. 42



Як видно з рис. 42.а всі вектори швидкостей є осереднені. Вони розташовані паралельно осі і один одному. Тобто, як було сказано раніше, хаотичний рух частинок рідини в ядрі турбулентного потоку перетворений у фіктивно паралельно струминний рух.

В пристінному шарі зміна швидкості частинок рідини відповідає ламінарному закону. Якщо величина пристінного шару менша за висоту виступів шорсткості внутрішньої поверхні труби, то ядро турбулентного потоку займає весь переріз труби (рис. 42 б).

**Втрати напору за довжиною труби при турбулентному русі рідини** визначається залежністю

$$h_l = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}.$$

Тобто, по формі такою ж самою як і для ламінарного режиму. Але „ $\lambda$ ” (коефіцієнт опору тертя за довжиною) при турбулентному режимі розраховуються за іншими закономірностями, при яких, як буде видно далі,  $h_l$  буде залежати від швидкості потоку не в першій степені, тому що  $\lambda$ , як показують досліди, є величина, яка в першу чергу залежить від матеріалу і стану внутрішньої поверхні труби, а також від співвідношення еквівалентної шорсткості  $\Delta_{екв}$  внутрішньої поверхні, діаметра труби величини пристінного шару  $\beta_{ш}$ , який, в свою чергу, змінюється від зміни швидкості руху рідини.

Шорсткість може бути рівномірно-зернистою, рівномірно-хвилястою, нерівномірно-зернистою, нерівномірно-хвилястою. До того ж вона характеризується не тільки розмірами, а й формою виступів.

Тому за розрахункову шорсткість беруть не середню абсолютну величину виступів  $\Delta$ , а так звану еквівалентну шорсткість, яка приводиться у відповідних довідниках  $\Delta_{екв}$ . Ця величина не заміряється, а одержується гідравлічним способом на дослідній установці для квадратичної зони гідравлічних опорів.

Еквівалентною шорсткістю називається така уявна подібна до рівномірно – зернистої шорсткості, однакова по всій довжині трубопроводу, при якій втрати напору на одиницю довжини будуть такими ж самими, як і при дійсній шорсткості.

З метою визначення коефіцієнта опору тертя за довжиною при турбулентному русі розглянемо так звані **зони гідравлічних опорів**.

**Перша зона – зона гідравлічно гладких труб.** Ця зона відбувається при малих числах  $Re$ , яким відповідає саме більше значення пристінного шару. При цьому пристінний шар покриває виступи шорсткості, тобто  $\beta_{ш} > \Delta_{екв}$  (рис.43. 1).

З одного боку  $\beta_{ш} > \Delta_{екв}$ , а з другого  $\beta_{ш} = A \frac{v}{v}$ . З цієї нерівності

$A \frac{v}{v} > \Delta_{екв}$  випливає, що симплекс  $\frac{v \Delta_{екв}}{v} < A$ . Дослідами встановлено, що для гідравлічно-гладкої зони гідравлічних опорів  $A = 63$ . Звідси, якщо симплекс  $\frac{v \Delta_{екв}}{v} < 63$ , то внутрішня поверхня труби – гідравлічно-гладка, для якої характерно  $\lambda = f(Re)$ . Ця залежність визначаються рядом формул:

а)  $\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$  - формула Стокса (рекомендується для випадків коли  $Re < 10^5$ )

б)  $\lambda = (1,8 \lg Re - 1,5)^{-2}$  - формула Конакова (рекомендується для випадків коли  $Re > 10^5$ ). Також рекомендуються і інші формули.

Для гідравлічно гладких труб втрати напору за довжиною залежить від швидкості в степені 1,75 ( $v^{1,75}$ ).

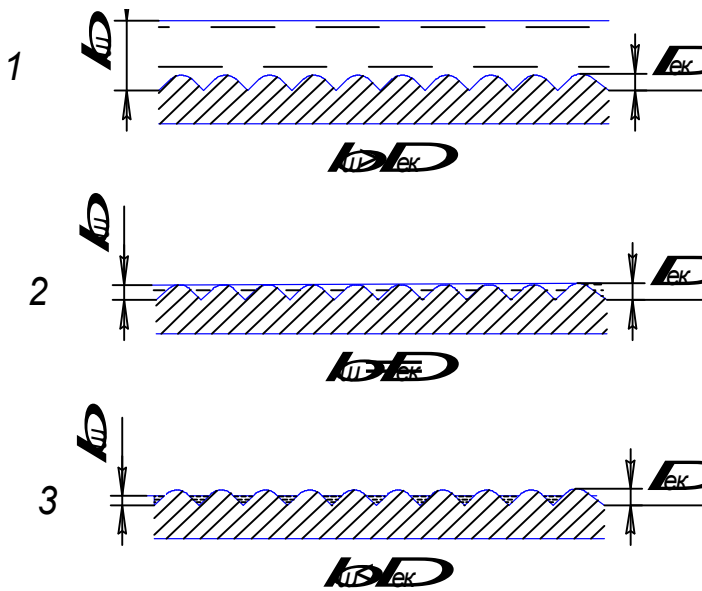


Рис. 43

**Друга зона – перехідна зона гідравлічних опорів.** В цій зоні  $\beta_{ui} \approx \Delta_{ек}$ . (рис.43. 2). Тобто, при збільшенні швидкості руху рідини в трубі пристінний шар зменшується до такої величини (згідно формули  $\beta_{ui} \approx A \frac{v}{v}$ ), що торкається виступів шорсткості, при цьому симплекс  $63 < \frac{v\Delta}{v} < 1260$ . В цій зоні  $\lambda = f(Re, \bar{\Delta})$  коефіцієнт опору тертя залежить не тільки від  $Re$ , але і від відносної шорсткості  $\bar{\Delta}$ , так як рідина в пристінному шарі між виступами шорсткості ще рухається в

ламінарному режимі і в цей же час ядро турбулентного потоку чіпляється за виступи шорсткості, при цьому виникають часткові збурення, що впливає на величину  $\lambda$  ( $\bar{\Delta}$  відносна шорсткість, яка дорівнює відношенню абсолютної шорсткості до діаметра труби, тобто  $\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{d}$ ).

Для визначення  $\lambda$  в перехідній зоні рекомендується формула Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left( \bar{\Delta} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}$$

В цій зоні втрати напору за довжиною залежить від швидкості в степені від 1,75 до 2,0 (1.85). і її прийнято називати доквадратичною зоною гідравлічних опорів.

**Третя зона гідравлічних опорів** відповідає випадку коли  $\beta_{ui} < \Delta_{ек}$  і називається **зоною гідравлічно шорстких труб**. Тут збільшення швидкості рідини (в порівнянні з доквадратичною зоною) приводить до зменшення величини  $\beta_{ui}$ , при якій пристінний шар знаходиться між виступами шорсткості і ця величина значно менша за  $\Delta_{ек}$  (рис. 43. 3). Тобто, в цій зоні  $\beta_{ui} < \Delta_{ек}$  і з іншого боку  $\beta_{ui} = A \frac{v}{v}$ . Тоді, симплекс

$$\frac{vd}{v} > A.$$

Дослідами встановлено, що для зони гідравлічно-шорстких труб  $A > 1260$ .

Таким чином при  $\frac{v\Delta}{\nu} > 1260$  внутрішня поверхня труби називається гідравлічно-шорсткою. При цьому  $\lambda = f(\bar{\Delta})$  і не залежить від  $Re$ . В цій зоні втрати напору за довжиною залежать від швидкості в другій степені ( $v^2$ ). Тому зона гідравлічно шорстких труб називається квадратичною зоною гідравлічних опорів.

Оскільки в зоні гідравлічно-шорстких труб число  $Re$  має велике значення, то в формулі Альтшуля ( $\frac{68}{Re}$ ) значно менше ніж ( $\frac{\Delta}{d}$ ) і величиною ( $\frac{68}{Re}$ ) можна знехтувати. Тоді розрахункова формула для третьої зони буде  $\lambda = 0,11(\bar{\Delta})^{0,25}$  (формула Шифринсона). Також для цієї зони гідравлічних опорів є формули інших авторів для визначення  $\lambda$ .

Наведений матеріал стосується течії рідин в трубах круглого перерізу, яка найчастіше зустрічається на практиці. Але на хлібокомбінатах, елеваторах у вентиляційних системах, в сантехніці застосовують, крім труб круглого перерізу інші форми перерізів (квадратні, прямокутні; в нагрівальних приладах – еліптичні перерізи і т.ін.) (рис. 44).

Для визначення в трубах некруглого перерізу числа  $Re$  і  $h_l$  замість  $d$  діаметра труби приймається гідравлічний радіус  $R$ . При цьому числа  $Re$  і їх критичні значення будуть іншими.

Для гідравлічного розрахунку трубопроводів некруглого перерізу застосовують поняття еквівалентного діаметра, який дорівнює

$$d_{екв} = 4R = \frac{4F}{x}. \quad (117)$$

За допомогою величини  $d_{екв}$  визначають втрати напору за формулою Дарсі-Вейсбаха, а також інші характеристики руху як і для круглих труб. Тобто, трубопровід довільної форми замінюють круглою, якому властивий такий самий гідравлічний опір, місцеві опори і втрати напору.

**Місцеві втрати напору** в трубопроводах і каналах виникають в місцях перешкод на шляху руху рідини. До місцевих опорів належить: запірні

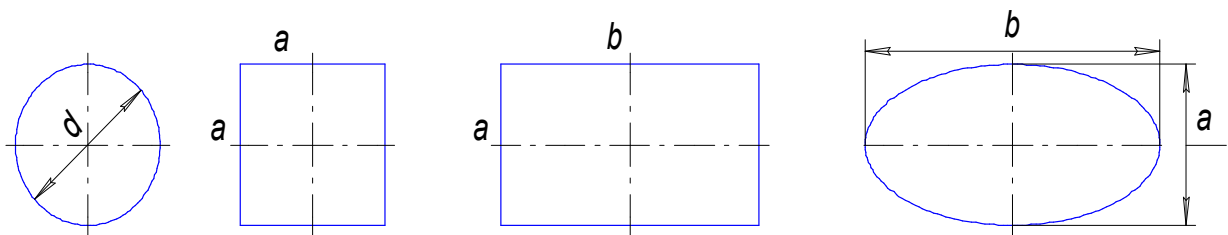


Рис. 44

$$R = \frac{d}{4}$$

$$R = \frac{a}{4}$$

$$R = \frac{a \cdot b}{2(a + b)}$$

$$R = \frac{a \cdot b}{\frac{3}{2}(a + b) - \sqrt{a \cdot b}}$$

$$d_e = d$$

$$d_e = a$$

$$d_e = \frac{2a \cdot b}{a + b}$$

$$d_e = \frac{4a \cdot b}{\frac{3}{2}(a + b) - \sqrt{a \cdot b}}$$

арматура (вентилі, засувки, крани, клапани), фасонні частини трубопроводів (коліна, раптові і поступові, розширення і звуження, трійники, хрестовини та ін.), сітки, фільтри і багато інших пристроїв.

Утворення вихрових зон і поява в деяких конструкціях місцевих опорів вторинних течій, різка зміна конфігурацій живих перерізів зі зміною швидкостей в конкретних конструкціях приводять до виникнення втрат напору (рис. 45).

При ламінарному русі рідини вихрові зони не виникають. У цьому випадку місцеві опори є наслідком значних змін швидкості, що утворюються геометрією місцевої перешкоди рухові.

В основному режим руху рідини в місцевих перешкодах – турбулентний і відповідає квадратичної зони гідравлічних опорів.

Кожна конструкція (тип) місцевого опору характеризується коефіцієнтом місцевого опору  $\zeta$ .

Втрати напору при проходженні рідини через місцевий опір визначається за формулою

$$h_{м.о.} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (118)$$

де  $\frac{v^2}{2g}$  – швидкісний напір за місцевим опором.

Дослідами встановлено, що величини коефіцієнтів місцевих опорів при ламінарному режимі і перехідному режимах руху залежать від  $Re$ . Загальний вигляд цієї залежності

$$\zeta = \frac{A}{Re^x}, \quad (119)$$

де  $A$  і  $x$  - коефіцієнт, що залежить від виду місцевого опору і умов руху рідини.

При турбулентному русі рідини коефіцієнт  $\zeta$  не залежить від  $Re$  і є характеристикою даного місцевого опору.

В абсолютній більшості коефіцієнти місцевих опорів визначаються дослідним шляхом (крім коефіцієнта місцевого опору при раптовому розширенні потоку). У довідниках значення  $\zeta$  даються для квадратичної зони турбулентного режиму, тобто вони сталі для даного виду місцевого опору.

В промисловій практиці рідини рухаються в більшості випадків турбулентно, тому втрати напору (енергії) в трубопроводах сталого діаметру з значною кількістю місцевих опорів визначаються залежністю

$$h_{м.о.} = \sum \zeta \frac{v^2}{2g}, \quad (120)$$

де  $\sum \zeta$  – сума коефіцієнтів місцевих опорів,  
 $v$  – швидкість рідини в трубі сталого діаметру.

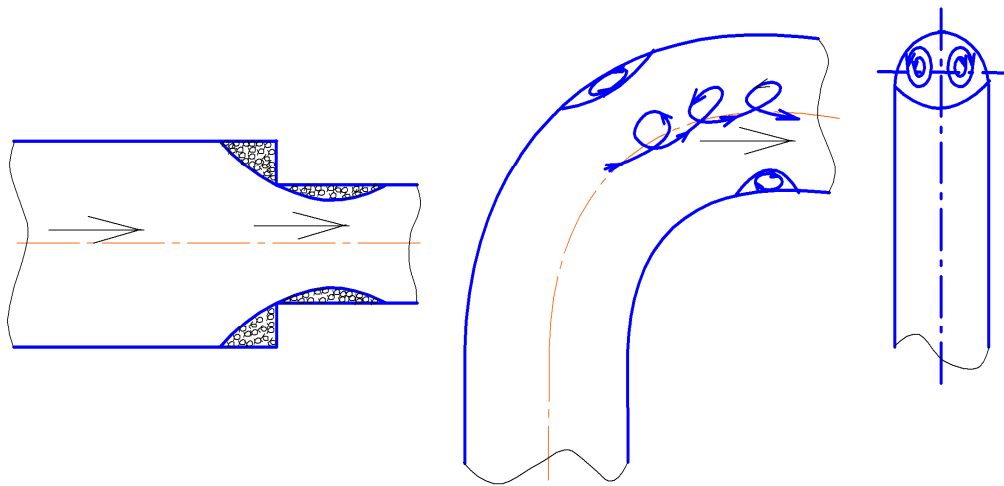


Рис. 45

**Еквівалентна довжина трубопроводу** це така його довжина, на якій втрати напору  $h_{л_{екв}}$  будуть дорівнювати втратам напору на даному місцевому опорі.

Тобто 
$$h_{л_{екв}} = h_{м.о.}, \text{ або}$$

$$\lambda \frac{l_{екк}}{d} \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

звідки 
$$l_{екв} = \zeta \frac{d}{\lambda}, \text{ м.} \quad (120)$$

У довідниках приводяться еквівалентні довжини трубопроводів, які відповідають певним місцевим опорам. Значення коефіцієнтів місцевих опорів відносяться до стабілізованих (вирівняних) потоків. Але у коротких трубопроводах, де місцеві опори розташовані близько один від одного, потік надходить до наступного опору не досить вирівнюваним, внаслідок чого втрати у цих опорах, а також їх сума будуть іншими, ніж при розташованні цих самих опорів на великій відстані один від одного. (Дані про взаємний вплив місцевих опорів теж наводиться у довідника)

**Середня швидкість і витрата рідини в трубопроводах і каналах будь-якої форми (для квадратичної зони турбулентного потоку).**

Формулу Дарсі-Вейсбаха представимо через гідравлічний радіус ( $d=4R$ ) з урахуванням сталості  $\lambda$  коефіцієнта опору тертя за довжиною. Тобто, труба (потік) буде знаходитись при русі рідини в квадратичній зоні гідравлічних опорів. Тоді

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{4R} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{\lambda}{8g} \frac{l}{R} \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{h_l}{l} = i = \frac{\lambda}{8g} \frac{v^2}{R}.$$

Звідки

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \cdot \sqrt{R \cdot i}, \quad (122)$$

де  $\sqrt{\frac{8g}{\lambda}} = C$  - стала величина,

$i$  – гідравлічний ухил;

$R$  – гідравлічний радіус.

$$\text{Тоді} \quad v = C \cdot \sqrt{Ri} \quad (123)$$

Стала величина  $C$  називається коефіцієнтом Шезі.  $C = f(\bar{\Delta})$ , тобто цей коефіцієнт залежить від відносної шорсткості. Якщо  $C = f(\bar{\Delta}, Re)$ , то  $C \neq const$ . Формула (123) застосовується для визначення середньої швидкості потоку в трубах і каналах будь-якої форми при рівномірному русі і називається формулою Шезі.

Для визначення коефіцієнта Шезі зручно користуватись формулою Н.Павловського

$$C = \frac{1}{n} R^y, \quad (124)$$

де  $n$  - коефіцієнт шорсткості поверхні каналу, або внутрішньої поверхні трубопроводу.

$y$  – показник степені при гідравлічному радіусі.

Орієнтовно для сталевих труб  $n$  можна приймати в межах 0,01 - 0,013;

$y$  визначається за наступними формулами

$$y = 1,3\sqrt{n} \quad \text{при } R > 1;$$

$$y = 1,5\sqrt{n} \quad \text{при } R < 1.$$

Широке застосування для визначення  $C$  знайшла формула Манінга

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}. \quad (125)$$

Існує залежність, що встановлює зв'язок між коефіцієнтом шорсткості  $n$  і абсолютною величиною еквівалентної шорсткості  $\Delta_{екв}$ .

$$n = \frac{\Delta_e^{0,2}}{19,6} \quad \text{— формула проф. В.Гончарова}$$

$$i n \cong 0,0395\sqrt[6]{\Delta_e} \quad \text{— формула проф. В.Лобачева.}$$

**Витрати рідини в трубопроводах і каналах** легко знайти, знаючи середню швидкість руху і площу поперечного перерізу потоку

$$Q = F \cdot v = FC\sqrt{R \cdot i}. \quad (128)$$

Так як  $FC\sqrt{R}$  для турбулентного руху величина стала, то

$$Q = K \cdot \sqrt{i}, \quad (129)$$

де  $K$  – витратомірна характеристика трубопроводу.

З формули (129) визначаємо  $i = \frac{Q^2}{K^2}$  помноживши це рівняння на  $l$ , дістанемо:

$$h_l = \frac{Q^2}{K^2} \cdot l \quad (130)$$

Як правило ця формула застосовується при гідравлічних розрахунках каналів.

Початкову ділянку турбулентної течії можна розрахувати за формулою Г.Філіппова

$$L_{\text{поч}} = \frac{2,45}{\sqrt{\lambda}} \cdot d, \quad (131)$$

де  $L_{\text{поч}}$  - довжина початкової ділянки, на якій закінчується формування кола осереднених швидкостей.

### 3. ГІДРАВЛІЧНІ РОЗРАХУНКИ ТРУБОПРОВОДІВ

Трубопроводи підрозділяються на прості і складні, на короткі і довгі.

**Простим трубопроводом** називається трубопровід, що складається з труб одного або декількох діаметрів, розташованих в одну лінію і такі, що не мають відгалужень.

Прості трубопроводи можуть бути короткими і довгими.

**Короткими** називаються трубопроводи порівняно невеликої довжини, у яких місцеві втрати напору є достатньо істотними, складаючи не менше 5-10% (і більше) втрати напору за довжиною. Прикладами коротких трубопроводів можуть бути: всмоктувальна лінія насоса, бензопровід, що надає паливо з бензобака в карбюратор, сифонний трубопровід та ін.

**Довгими трубопроводами** називаються трубопроводи, що мають значну протяжність, в яких втрати напору за довжиною є основними, місцеві втрати в них складають до 5% втрат за довжиною. Прикладами довгих трубопроводів можуть бути трубопроводи для транспортування нафтопродуктів на значні віддалі, трубопроводи водопровідних мереж, тобто магістральні.

**Складні трубопроводи**, це трубопроводи з відгалуженими. Вони бувають тупикові, паралельно-розгалужені, кільцеві.

Трубопроводи можуть бути з **транзитною, шляховою і змішаною витратами рідини.**

Гідравлічний розрахунок простого (короткого і довгого) припускає наявність діаметра  $d$ , довжини  $L$  трубопроводу, також наявності напору  $H$  (тиску) для здійснення (як правило) технологічно заданої витрати рідини  $Q$ . Практично одну з цих величин, при наявності останніх необхідно визначити.

Знання і уміння застосовувати для конкретних умов рівняння Бернуллі і закону нерозривності потоку, а також, відповідно до режимів руху рідини знаходження втрат напору (тиску) в залежності від зон гідравлічних опорів, дають можливість визначити будь-які невідомі в задачі параметри.

**Гідравлічний розрахунок простого (і водночас) короткого трубопроводу.**

**Приклад 1.** Визначити показання вакуумметра, встановленого на вході у відцентровий насос. Витрата рідини  $Q$ , довжина  $L$ , і діаметр  $d_{\text{вс}}$  всмоктувального трубопроводу, температура рідини, еквівалентна шорсткість внутрішньої поверхні труби  $\Delta_{\text{екв}}$ , висота всмоктування (відстань від вільної поверхні всмоктувальної місткості до осі насоса)  $H_{\text{вс}}$  – відомі. Схема всмоктувального трубопроводу з насосом і всмоктувальної ємності і всіма іншими позначеннями, необхідними для розрахунку приведені на рис. 46.

З метою визначення показання вакуумметра застосуємо рівняння Бернуллі. Для чого проведемо перерізи 1-1 і 2-2 на кінцях робочої ділянки, а також площину порівняння. Робоча ділянка, на якій здійснюється процес всмоктування, знаходиться між перерізами 1-1, що проведений через потік в трубі відповідно вільної поверхні рідини у всмоктувальній ємності, і перерізом 2-2, що проходить через точку, де встановлений вакуумметр (перед входом в насос).

Рівняння Бернуллі записується для двох перерізів 1-1 і 2-2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{\text{вс}},$$

де  $z_1$  – відстань (за вертикаллю) від центра ваги поперечного перерізу 1-1 до площини порівняння, яка проводиться через нижній переріз, тобто 1-1.

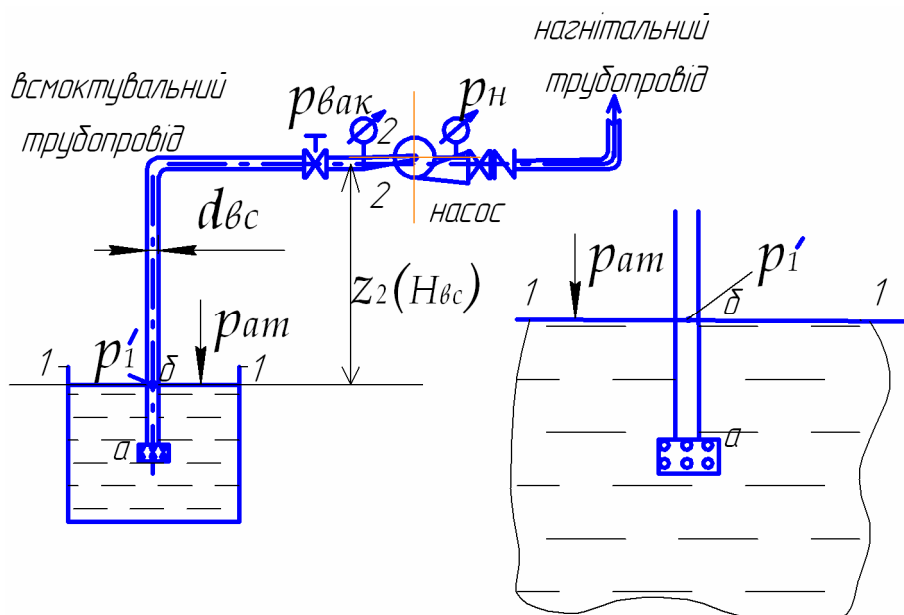


Рис. 46

Абсолютний тиск в трубі в перерізі 1-1  $P_1$  ( $\frac{p_1}{\rho g}$  – п'езометричний напір в

цьому перерізі, м ст.рідини)  $\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_{at}}{\rho g} - h_i^{a-b} - h_{c.z.k.}$ , де

$h_i^{a-b}$  – втрата напору на довжині а-б

$h_{c.z.k.}$  – втрата напору при проходженні рідини через сітку зі зворотнім клапаном;

$z_1=0$ , так як переріз 1-1 співпадає з площиною порівняння;

$z_2$  – відстань (за вертикаллю) від центра ваги поперечного перерізу труби в другому перерізі до площини порівняння

$$z_2 = H_{\text{вс}}$$

$v_1$  і  $v_2$  – швидкості рідини відповідно в перерізах 1-1 і 2-2;

так як труба по всій довжині однакова, то  $v_1 = v_2$

$(h_{\text{вс}}^{1-2})'$  - втрати напору між перерізами 1-1 і 2-2;



$$(h_{\text{вм}}^{1-2})' = h_1^{1-2} + h_{\frac{\text{пов}}{90^0}}^{\text{вс}} + h_{\text{зас}}^{\text{вс}} ;$$

де  $h_1^{1-2}$  – втрати напору по довжині між перерізами 1-1 і 2-2;

$h_{\frac{\text{пов}}{90^0}}^{\text{вс}}$  – втрата напору на повороті (поворот плавний на  $90^0$ );

$h_{\text{зас}}^{\text{вс}}$  – втрата напору при проходженні рідини крізь засувку.

Підставимо всі ці дані в рівняння Бернуллі

$$\frac{p_{\text{ам}}}{\rho g} - h_e^{a-b} - h_{\text{с.з.к}}^{\text{вс}} + \frac{v_{\text{вс}}^2}{2g} = H_{\text{вс}} + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_{\text{вс}}^2}{2g} + h_e^{1-2} + h_{\frac{\text{пов}}{90^0}}^{\text{вс}} + h_{\text{зас}}^{\text{вс}} .$$

Представимо це рівняння у такому вигляді

$$\frac{p_{\text{ам}}}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = H_{\text{вс}} + (h_e^{1-2} + h_e^{a-b}) + h_{\text{с.з.к}}^{\text{вс}} + h_{\frac{\text{пов}}{90^0}}^{\text{вс}} + h_{\text{зас}}^{\text{вс}}$$

де  $p_2$  – абсолютний тиск у другому перерізі

$$p_2 = p_{\text{вс}}; \quad p_{\text{вс}} < p_{\text{ам}};$$

$h_1^{1-2} + h_1^{a-b} = h_1^{\text{вс}}$  – втрата напору по всій довжині всмоктувальної труби (від сітки зі зворотнім клапаном до вакуумметра)

$h_{\text{с.з.к}}^{\text{вс}} + h_{\frac{\text{пов}}{90^0}}^{\text{вс}} + h_{\text{зас}}^{\text{вс}} = \sum h_{\text{м.о.}}^{\text{вс}}$  – сума втрат напору при проходженні рідини через

місцеві опори на всмоктувальній лінії

$$\sum h_{\text{м.о.}}^{\text{вс}} = \left( \zeta_{\text{с.з.к}}^{\text{вс}} + \zeta_{\frac{\text{пов}}{90^0}}^{\text{вс}} + h_{\text{зас}}^{\text{вс}} \right) \frac{v_{\text{вс}}^2}{2g} = \sum \zeta_{\text{вс}} \cdot \frac{v_{\text{вс}}^2}{2g} .$$

Так як

$$\frac{p_{\text{ам}} - p_{\text{вс}}}{\rho g} = \frac{p_{\text{вак}}}{\rho g} ,$$

то

$$\frac{p_{\text{вак}}}{\rho g} = H_{\text{вс}} + h_1^{\text{вс}} + \sum h_{\text{м.о.}}^{\text{вс}} ,$$

або

$$\frac{p_{\text{вак}}}{\rho g} = H_{\text{вс}} + \left( \lambda_{\text{вс}} \frac{l_{\text{вс}}}{d} + \sum \zeta_{\text{вс}} \right) \frac{v_{\text{вс}}^2}{2g} . \quad (132)$$

Тобто, показання вакуумметра представляє собою суму висоти всмоктування і всіх гідравлічних опорів по довжині всмоктувального трубопроводу.

$\lambda_{\text{вс}}$  – розраховується, як показано раніше.

$\sum \zeta_{\text{вс}}$  – вибираються в довідниках відповідно до діаметра трубопроводу.

**Гідравлічний розрахунок довгого (він же простий) трубопроводу.**

**Приклад 2.** Застосовуючи рівняння Бернуллі, визначити показання манометра, а також повний напір, що повинен створювати насос, працюючи на систему всмоктувального і нагнітального трубопроводів, при заданих наступних параметрах:

$Q$  – витрата рідини в трубопроводі,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;

$H_H$  – висота нагнітання (від осі насоса до кінця нагнітального трубопроводу),  $\text{м}$ ;

$L_H$  – довжина нагнітального трубопроводу, м;  
 $d_H$  – діаметр нагнітального трубопроводу, м;  
 $z$  – відстань від вільної поверхні рідини в нагнітальній ємності до її дна,  
 м;

$P_{вс}$  – тиск рідини на вході в насос, Па;

(в даній задачі місцевими опорами нехтувати не будемо).

При застосуванні рівняння Бернуллі розглянемо два випадки (рис. 47):

1. вихід рідини з нагнітального трубопроводу здійснюється під рівень рідини ( $z$ ) в нагнітальній ємності.
2. вихід рідини з нагнітального трубопроводу здійснюється в атмосферу.

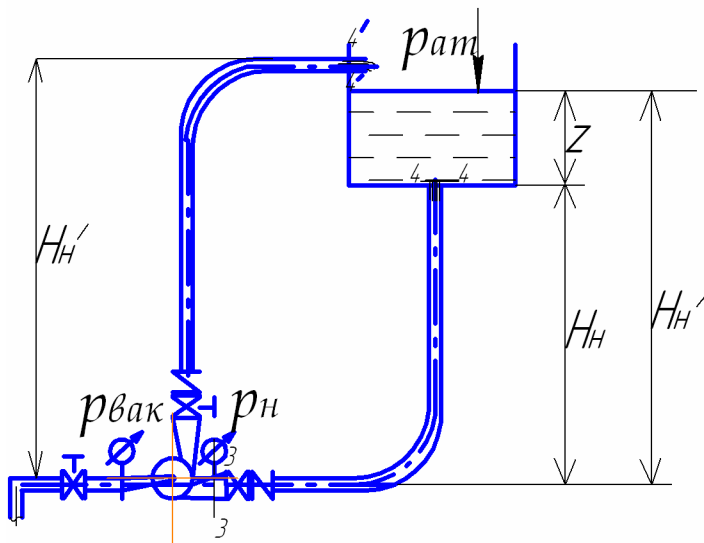


Рис. 47

**Перший випадок.** Оскільки рівняння Бернуллі складається для двох перерізів потоку рідини, то третій (3-3) переріз проводимо через точку приєднання манометра на виході рідини з насоса (в кінці нагнітального патрубку, перед засувною із зворотнім клапаном), а четвертий 4-4 – на виході рідини з кінця нагнітального трубопроводу, який знизу приєднується до нагнітальної ємності і знаходиться під напором стовпа

рідини  $z$ . В загальному вигляді рівняння Бернуллі буде мати вигляд

$$z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} = z_4 + \frac{p_4}{\rho g} + \frac{v_4^2}{2g} + (h_{\text{вт}}^{3-4})',$$

де  $z_3 = 0$  (оскільки площина порівняння проведена через центр ваги труби в перерізі 3-3)

$p_3 = p_n$  – абсолютний тиск в перерізі 3-3, де приєднаний манометр;

$v_3$  – швидкість рідини в перерізі 3-3;

$v_4$  – швидкість рідини в перерізі 4' – 4';

$(h_{\text{вт}}^{3-4})'$  – витрати напору по довжині і місцеві опори між 3 і 4 перерізами

(на виході з труби під рівень рідини  $\zeta_{\text{вт}} = 1$ ),

$$\begin{aligned} (h_{\text{вт}}^{3-4})' &= h_l'' + h_{\text{зас}} + h_{\text{зв.кк}} + h_{\text{нов}} + h_{\text{вих}} = \lambda_H \frac{l_H}{d_H} \frac{v_H^2}{2g} + (\zeta_{\text{зас}} + \zeta_{\text{зв.кк}} + \zeta_{\text{вих}}) \frac{v_H^2}{2g} = \\ &= \left( \lambda_H \frac{l_H}{d_H} + \sum \xi_{\text{м.о.}} \right) \frac{v_H^2}{2g}, \end{aligned}$$

де  $h_l''$  – втрати напору за довжиною, м.в.ст.;

$h_{зас}, h_{зб.к}, h_{пов}, h_{вих}$  – втрати напору при проходженні рідини крізь відкриту засувку, зворотній клапан, поворот труби на  $90^0$ , при виході рідини під рівень.

$\frac{p_4}{\rho g}$  – тиск рідини в перерізі 4-4;

$$\frac{p_4}{\rho g} = \frac{p_4'}{\rho g} + z$$

$p_4'$  – абсолютний тиск на вільній поверхні рідини в нагнітальній місткості.

Так як  $H_H = H_H' - z$ ,  $v_3 = v_4$ , то рівняння Бернуллі можна записати наступним чином

$$\frac{p_3^{abc}}{\rho g} = H_H + \frac{p_4}{\rho g} + h_{\theta m}^{3-4},$$

$$\frac{p_3^{abc}}{\rho g} = H_H' - z + \frac{p_4'}{\rho g} + z + h_{\theta m}^{3-4}.$$

Так як  $p_4' = p_{am}$  тоді

$$\frac{p_3^{abc} - p_{am}}{\rho g} = H_H' + h_{\theta m}^{3-4},$$

або

$$\frac{p_3^{надл}}{\rho g} = H_H' + h_{\theta m}^{3-4}. \quad (133)$$

Тобто, надлишковий напір  $\left(\frac{p_3}{\rho g}\right)^{надл}$  є показанням манометра.

**Другий випадок.** Рідина з кінця нагнітальної труби виходить в атмосферу. В цьому випадку переріз 3-3 проводимо через точку приєднання манометра, а переріз 4'-4' через поперечний переріз потоку рідини на виході з трубопроводу в атмосферу (рис 47).

Рівняння Бернуллі для двох перерізів буде

$$z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} = z_4' + \frac{p_4'}{\rho g} + \frac{(v_4')^2}{2g} + (h^{3-4})'$$

Площина порівняння проходить через переріз 3-3.

Тоді  $z = 0$ ;  $p_3 = p_n^{abc}$ ;  $v_3 = v_4'$ ;  $z_4' = H_H'$ ;  $p_4' = p_{am}$ ; на рис. 47 переріз 4'-4' майже співпадає з вільною поверхнею рідини у нагнітальній місткості;

$h_{\theta m}^{3-4}$  – втрати напору між перерізами (3-3) і (4-4).

Підставимо отримані дані в рівняння Бернуллі

$$\frac{p_3^{abc}}{\rho g} = H_H + \frac{p_{am}}{\rho g} + (h_{\theta m}^{3-4})',$$

(так як  $p_{abc} - p_{am} = p_{надл}$ ) то

$$\frac{p_n^{надл}}{\rho g} = H_H + (h^{3-4})'.$$

Тобто, як в першому випадку, так і в другому вид формули однаковий. Але треба мати на увазі, що в першому випадку коефіцієнт місцевого опору виходу рідини з труби під рівень дорівнює одиниці, а в другому (так як вихід рідини в атмосферу) – нулю. Крім того, при складання рівняння Бернуллі в першому випадку переріз 4-4 проведений через потік рідини на виході із труби. Якщо четвертий переріз провести по вільній поверхні рідини в нагнітальній ємності, то швидкість  $v_4 = 0$  і кінцевий результат мав би вигляд

$$\frac{P_n^{\text{надл}}}{\rho g} = H_n + h_w^{3-4} - \frac{v_H^2}{2g}, \text{ що не відповідає дійсності.}$$

Повний напір, що повинен створювати насос працюючи на дану систему всмоктувального і нагнітального трубопроводів, здійснюючи задану витрату рідини, визначається як різниця енергій, якими володіє потік на виході і вході насоса. Тобто

$$H = E_{\text{вих}} - E_{\text{вх}}. \quad (135)$$

$$E_{\text{вих}} = \frac{p_n^{\text{абс}}}{\rho g} + \frac{v_n^2}{2g}; E_{\text{вх}} = \frac{p_{\text{вх}}^{\text{абс}}}{\rho g} + \frac{v_{\text{вх}}^2}{2g}.$$

Тоді

$$H = \left( \frac{p_n^{\text{абс}}}{\rho g} - \frac{p_{\text{вх}}^{\text{абс}}}{\rho g} \right) + \frac{v_n^2 - v_{\text{вх}}^2}{2g}; \quad (136)$$

Так як 
$$\frac{p_n^{\text{абс}}}{\rho g} = \frac{p_n^{\text{надл}}}{\rho g} + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} \quad \text{і} \quad (137)$$

$$\frac{p_{\text{вс}}^{\text{абс}}}{\rho g} = \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} - \frac{p_{\text{вак}}}{\rho g}, \quad (138)$$

тоді підставивши в рівняння (136) значення (137) і (138) отримаємо

$$H = \frac{p_n^{\text{надл}}}{\rho g} + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} - \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} + \frac{p_{\text{вак}}}{\rho g} + \frac{v_n^2 - v_{\text{вс}}^2}{2g},$$

$$H = \frac{p_n}{\rho g} + \frac{p_{\text{вак}}}{\rho g} + \frac{v_n^2 - v_{\text{вс}}^2}{2g}.$$

Якщо  $v_{\text{вс}} = v_n$ , то 
$$H = \frac{p_n^{\text{надл}}}{\rho g} + \frac{p_{\text{вак}}}{\rho g}. \quad (139)$$

Тобто, повний напір, що повинен створювати насос дорівнює сумарному значенню показань манометра і вакуумметра.

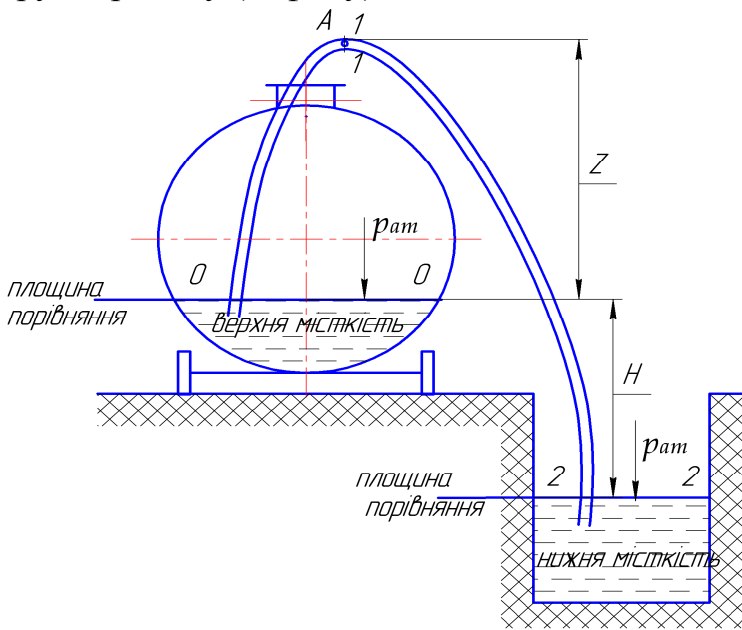
Примітка: Якщо  $p_{\text{вс}}^{\text{абс}} > p_{\text{ат}}$ , тоді повний напір 
$$H = \frac{p_n^{\text{абс}} - p_{\text{вс}}^{\text{абс}}}{\rho g}, \text{ або}$$

$$H = \frac{p_n^{\text{надл}} - p_{\text{вс}}^{\text{надл}}}{\rho g}.$$

### Гідравлічний розрахунок сифонного трубопроводу (рис. 48).

Сифонним називаються короткий трубопровід, по якому рухається рідина з верхньої ємності в нижню через перешкоду. Особливістю сифона є його властивість піднімати рідину на висоту  $z$  вище вільної поверхні рідини верхньої ємності. Принцип дії сифона полягає у створенні вакууму в самій високій точці сифона, що створює різницю тисків між атмосферним тиском на вільній

поверхні ємності і тиском, який відповідає вакууму в найвищій точці *A* трубопроводу (сифону).



**Рис. 48**

Гідрравлічний розрахунок сифонного трубопроводу полягає у визначенні граничного (максимально допустимого) значення висоти сифона *z*, при якій мінімальний тиск в перерізі, що проходить через саму високу точку в сифоні повинен бути більше тиску насиченої пари рідини при даній температурі ( $p_{min} \geq p_t$ ).

Застосовуючи рівняння Бернуллі для перерізів 0-0 і 1-1 відносно площини порівняння, що проходить по вільній поверхні рідини верхньої

місткості (цистерни) будемо мати:

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_{\theta m}^{0-1}, \text{ де } z_0 = 0; p_0 = p_{atm}; v_0 \approx 0; z_1 = z; v_1 = \frac{Q}{F}.$$

Максимально допустима висота буде при виконанні умови  $p_1 \geq p_t$ .

Тоді, підставивши всі значення для двох перерізів у рівняння Бернуллі і, розв'язавши його відносно *z* дістанемо

$$z_{\max}^{\text{доп}} \leq \frac{p_{atm} - p_t}{\rho g} - h_{\theta m}^{0-1} - \frac{v_1^2}{2g} \quad (140)$$

$z_{\max}^{\text{доп}}$  як правило не більше 7-8 м.

Витрата рідини, що здійснюється в сифонному трубопроводі, розраховується за формулою для коротких трубопроводів.  $Q = \mu F_{mp} \cdot \sqrt{2gH}$ .

Доведемо це, застосувавши рівняння Бернуллі для перерізів 0-0 і 2-2 відносно площини порівняння, яка проходить через переріз 2-2.

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{\theta m}^{0-2}$$

Для перерізу 0-0:  $z_0 = H; p_0 = p_{at}; v_0 = 0$ ;

для перерізу 2-2:  $z_2 = 0; p_2 = p_{at}; v_2 = 0$ ;

$$h_{\theta m}^{0-2} = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v_{mp}^2}{2g} = \zeta_{\text{сист}} \cdot \frac{Q^2}{F_{mp}^2 \cdot 2g}$$

Підставляючи ці дані в рівняння Бернуллі і одержуємо:  $H = h_{\theta m}^{0-2}$ ,

$$H = \zeta_{\text{сист}} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{Q^2}{F_{mp}^2}, \text{ звідки}$$

$$Q = \sqrt{\frac{I}{\zeta_{\text{сист}}}} \cdot F_{\text{тр}} \cdot \sqrt{2gH} = \mu \cdot F_{\text{тр}} \sqrt{2gH} \quad (141)$$

де  $\mu = \sqrt{\frac{I}{\zeta_{\text{сист}}}}$  – коефіцієнт витрати рідини для конкретного трубопроводу;

$F_{\text{тр}}$  – площа поперечного перерізу трубопроводу;

$H$  – наявний напір (відстань між вільними поверхнями рідини у верхній і нижній місткостях).

$\zeta_{\text{сист}}$  – коефіцієнт опору системи.

**Втрати напору в трубопроводах зі змішаною, шляховою і транзитною витратами рідини.**

**Транзитною** називається витрата рідини  $Q_{\text{тр}}$ , яка транзитом проходить по всій довжині трубопроводу  $L$  з витратною характеристикою  $K$ .

**Шляховою** називається витрата рідини  $Q_{\text{ш}}$ , яка рівномірно розподіляється по всій довжині трубопроводу. Наприклад: подача води на охолодження в градильнях; робота магістрального трубопроводу вздовж вулиці міста та ін.

**Змішаною** називається витрата рідини  $Q_{\text{зм}}$ , коли частина витрати  $Q_{\text{тр}}$  транзитом проходить по всій довжині і здійснюється в кінці трубопроводу, а друга частина рівномірно відбирається на шляху по всій довжині трубопроводу; тобто:  $Q_{\text{зм}} = Q_{\text{тр}} + Q_{\text{ш}}$  (рис. 49).

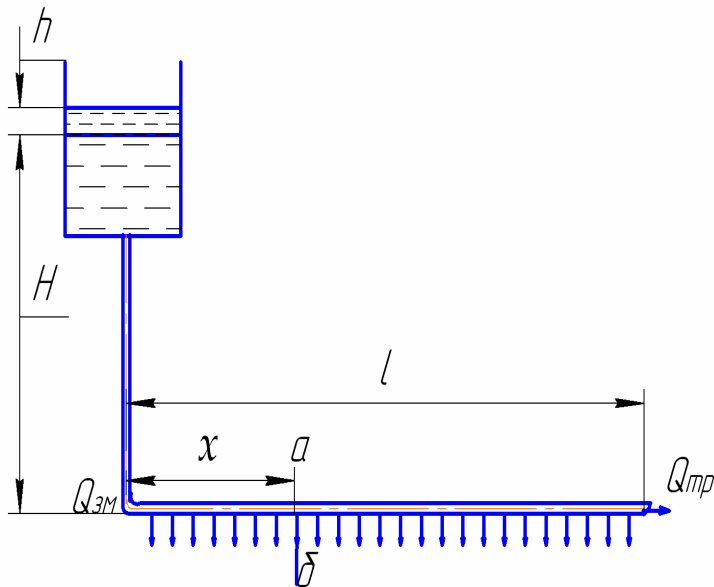


Рис. 49

Через довільно вибраний переріз  $a-b$  на відстані від початку горизонтальної частини трубопроводу  $x$  при здійсненні змішаної витрати рідини проходить певна об'ємна витрата  $Q_x$ .

$$Q_x = Q_{\text{тр}} + Q_{\text{ш}} - \frac{Q_{\text{ш}}}{l} \cdot x,$$

де  $\frac{Q_{\text{ш}}}{l} \cdot x$  – витрата рідини на довжині труби  $x$ .

Втрата напору на одиницю довжини для переріза  $a-b$  буде

$$i_x = \frac{Q_x^2}{K^2}, \text{ або}$$

$$i_x = \frac{\left( Q_{\text{тр}} + Q_{\text{ш}} - \frac{Q_{\text{ш}}}{l} x \right)^2}{K^2}.$$

На безмежно малій ділянці трубопроводу  $dx$  втрата напору буде

$$dh_x = i_x \cdot dx = \left[ \frac{\left( Q_{mp} + Q_{uu} - \frac{Q_{uu}}{l} x \right)^2}{K^2} \right] \cdot dx,$$

або

$$dh_x = \left[ \frac{(Q_{mp} + Q_{uu})^2}{K^2} - \frac{2Q_{uu}}{lK^2} (Q_{mp} + Q_{uu})x + \frac{Q_{uu}^2}{l^2 K^2} \right] \cdot dx.$$

Для визначення повної втрати напору по всій довжині трубопроводу останній вираз проінтегруємо в межах зміни  $x$ , тобто від 0 до  $l$ . Після відповідних математичних перетворень, втрата напору при змішаній витраті  $Q_{зм}$  буде

$$h_{зм} = \frac{l}{K^2} \cdot \left( Q_{mp}^2 + Q_{mp} \cdot Q_{uu} + \frac{1}{3} Q_{uu}^2 \right), \text{ м ст.р.} \quad (142)$$

Ця формула є загальною для трьох випадків витрат рідини.

Так, якщо  $Q_{mp} = 0$ ,

### **ТО БУДЕ ЗДІЙСНЮВАТИСЬ ТІЛЬКИ ШЛЯХОВА ВИТРАТА РІДИНИ. ПРИ ЦЬОМУ**

$$h_{uu} = \frac{1}{3} \frac{Q_{uu}^2}{K^2} \cdot l, \text{ м. ст. рідини.}, \quad (143)$$

Тобто, втрата напору при шляховій витраті складає 1/3 втрати напору при проходженні рідини в кількості  $Q_{uu}$  транзитом по цьому ж самому трубопроводі довжиною  $l$  з витратною характеристикою  $K$ .

#### **Основи техніко-економічного розрахунку трубопроводів.**

Вибір найвигіднішого діаметра трубопроводу залежить від визначеної найвигіднішої швидкості руху рідини. Якщо величину швидкості прийняти малою при заданій витраті рідини, то трубопровід вийде відносно великого діаметра ( $d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}}$ ). При цьому втрати напору (енергії) на подолання

гідравлічних опорів в трубопроводі будуть відносно малими ( $h_{\delta m} = \zeta_{сум} \cdot \frac{v^2}{2g}$ ), що

в свою чергу, приведе до зменшення споживаної потужності насосів. Вони будуть низьконапірними. Але збільшення діаметру труб збільшує його будівельну вартість.

При зменшенні діаметра труб – зменшується їх будівельна вартість, але збільшується втрати напору (енергії) при здійсненні тієї ж самої витрати рідини в трубопроводі. Насоси при цьому будуть високонапірними, що приводить до збільшення споживаної потужності насосів. Також збільшується експлуатаційні витрати високонапірних насосних станцій.

Таким чином, щоб вибрати найвигідніший діаметр трубопроводу необхідно провести техніко-економічне порівняння ряду варіантів (для різних діаметрів), які повинні враховувати всі фактори, що впливають на вартість як капітальних споруджень (трубопроводу і насосних станцій) так і всіх експлуатаційних затрат, пов'язаних з роботою насосних установок і трубопроводів.

Якщо всі капітальні затрати спорудження трубопроводної системи  $K_{mp}$  і насосної станції (разом з насосами)  $K_H$  з урахуванням їх вартості, що приходяться на один рік (термін експлуатації насосної станції і трубопроводів складає 10...15 років), то сумарне їх значення буде  $(\frac{K_{mp}}{t} + \frac{K_H}{t})$ . Всі експлуатаційні затрати, що пов'язані з роботою трубопроводу  $E_{mp}$  (ремонт, амортизація, обслуговування) і експлуатаційні затрати, що пов'язані з роботою насосної установки  $E_H$  (споживана енергія, ремонт, амортизація, обслуговування), що порашовані за один рік, то їх сумарні затрати для прийнятого (одного) діаметра трубопроводу буде  $E_{mp} + E_H$ . Сумарне значення капітальних (перерахованих на один рік роботи насосної установки) і експлуатаційних затрат становить

$$C = \frac{K_{mp}}{t} + \frac{K_H}{t} + E_{mp} + E_H, \text{ грн.} \quad (144)$$

Таким же чином проводять розрахунки для інших, близьких до порашованого, діаметрів трубопроводу (наприклад: 100, 150, 200, 250, 300, 350 мм).

Діаметр трубопроводу, для якого величина  $C$  буде найменшою, є діаметром економічно найвигіднішим.

### Гідравлічні характеристики трубопроводів.

Гідравлічні характеристики трубопроводів представляють собою графічну залежність втрат напору в трубопроводах при зміні витрат рідини в них. Аналітична залежність втрат напору в трубах в залежності від витрати рідини є

$$h_{\text{вн}} = z + \zeta_{\text{сисн}} \cdot \frac{Q^2}{F_{mp}^2 \cdot 2g},$$

$$\text{або} \quad h_{\text{вн}} = z + \frac{l}{K^2} \cdot Q^2.$$

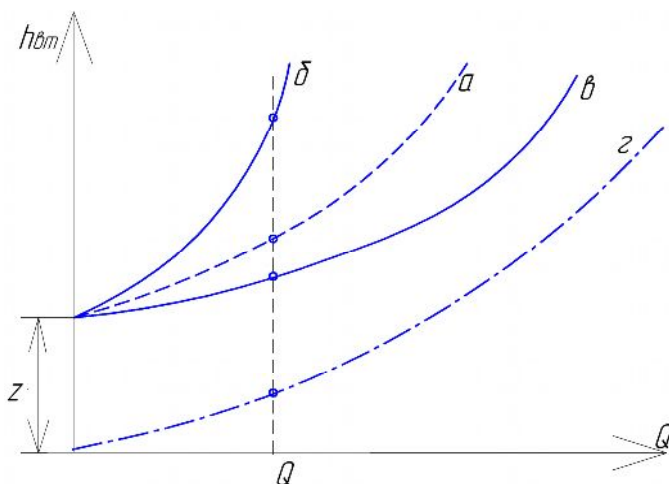


Рис. 50

На рис. 50 представлені різні типи гідравлічних характеристик трубопроводів: а) гідравлічна характеристика середньої пологості при наявності  $z$ ;  
 б) крута гідравлічна характеристика при наявності  $z$ ;  
 в) полого-теж при наявності  $z$ ;  
 г) середньої пологості для горизонтального трубопроводу (при  $z=0$ ).

Як видно з рис. 50 при однакових витратах найбільші втрати відповідають крутій характеристиці, найменші – пологій. Це пояснюється тим, що при однакових довжинах труб діаметри їх різні: для крутої характеристики – самий



менший, для пологої – самий великий.

### Гідравлічні розрахунки елементів складних трубопроводів.

**Вплив елементів складних трубопроводів**, що входять в систему нагнітального трубопроводу, на показання манометра, встановленого на виході з насоса.

До елементів складного трубопроводу відносяться: просте відгалуження (вилка), відгалуження від основного трубопроводу в різних точках (тупиковий трубопровід); паралельне роз'єднання і з'єднання основного трубопроводу; кільцевий трубопровід.

Характерним для гідравлічних розрахунків складних трубопроводів (крім рівняння Бернуллі) є рівність напорів в точках відгалуження для всіх гілок(одної або декілька). Також – рівність напорів точках з'єднання потоків в один магістральний (рис. 51 а, б).

В точці  $A$  і  $A'$  напір однаковий для всіх гілок. Точки розгалуження і з'єднання трубопроводів називаються вузловими точками.

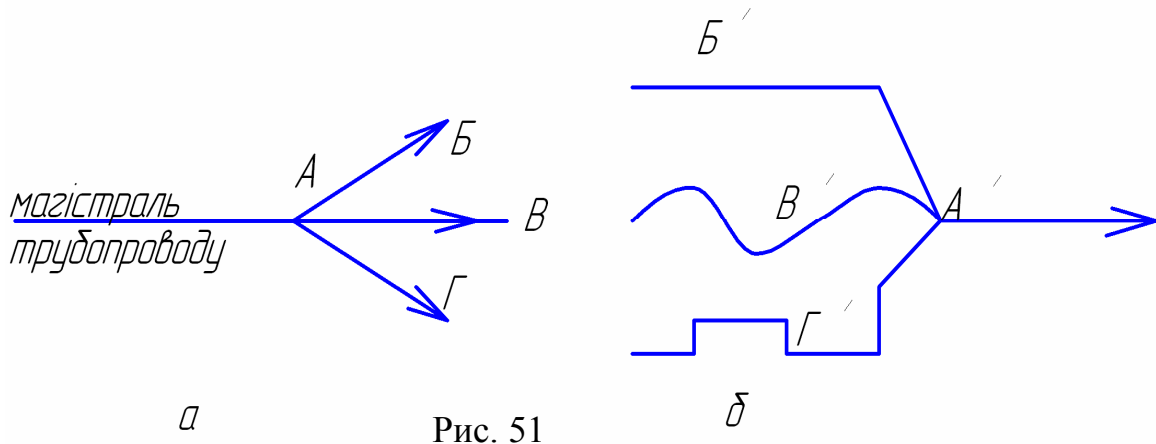


Рис. 51

#### Просте відгалуження (вилка).

**Приклад 1.** Для горизонтального трубопроводу з розгалуженням в точці  $A$  на дві однакою довжини гілки, з однаковими витратними характеристиками  $K$  ( $K_1 = K_2$ ) і однаковими тисками на кінцях відгалужень  $B$  і  $B$  ( $p_B = p_B = p_{atm}$ ) (рис. 52). Відомі також  $K$ ,  $l$ ,  $Q$  – для магістрального трубопроводу і  $q_1 = q_2$  – витрати рідини для двох гілок.

Гідравлічний опір, який зустрічає рідина при русі від точки  $H$  (де встановлений манометр) до точки  $A$  буде  $\frac{Q^2}{K^2} l$ . Якщо відомий тиск в точці  $A$ , то показ манометра в точці  $H$  буде

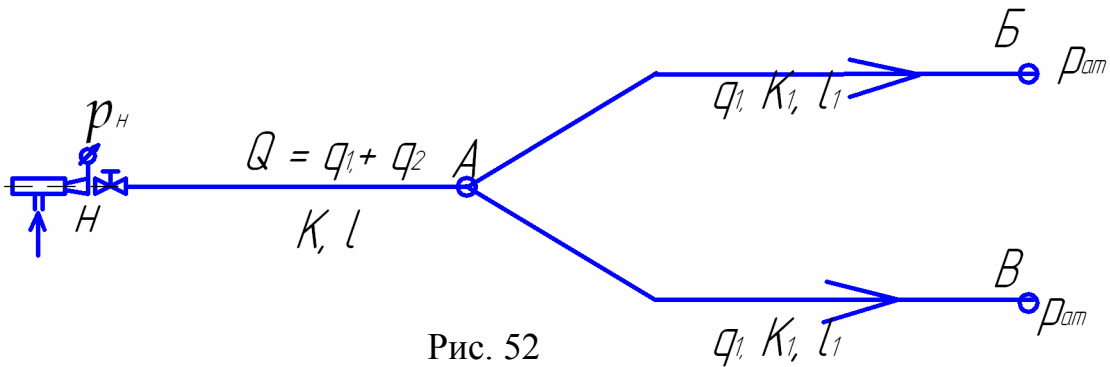


Рис. 52

$$\frac{p_H}{\rho g} = h_{вт}^{M-A} + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{Q^2}{K^2} l + \frac{p_A}{\rho g}. \quad (145)$$

Напір у вузловій точці  $A$  для двох гілок  $A-B$  і  $A-B$  є однаковим. Тоді

$$\frac{p_A}{\rho g} = h_{вт}^{A-B}, \quad \frac{p_A}{\rho g} = h_{вт}^{A-B}, \quad \text{тобто } h_{вт}^{A-B} = h_{вт}^{A-B},$$

$$\text{або } \frac{q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2.$$

З умови прикладу  $K_1 = K_2$ ,  $l_1 = l_2$ ;

тоді  $q_1 = q_2$ ; тобто  $q_1 = \frac{Q}{2}$ ;  $q_2 = \frac{Q}{2}$ .

Покази манометра на виході з насоса визначаються:

$$\frac{p_H}{\rho g} = \frac{Q^2}{K^2} l + \frac{q_1^2}{K_1^2} l_1, \quad \text{або } \frac{p_H}{\rho g} = \frac{Q^2}{K^2} l + \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2.$$

**Приклад 2.** Чи зміниться показання манометра, якщо в умовах попереднього прикладу в кінці гілки  $A-B$  замість тиску  $p_{ат}$  прийняти

$$p_B > p_{ат}.$$

В цьому випадку  $h_{вт}^{A-B} = h_{вт}^{A-B}$ , але

$$h_{вт}^{A-B} = \frac{q_1^2}{K_1^2} l_1 + \frac{p_B}{\rho g}; \quad h_{вт}^{A-B} = \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2.$$

Якщо  $q_1 = q_2$ , то для рівності  $\frac{q_1^2}{K_1^2} l_1 + \frac{p_B}{\rho g} = \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2$

необхідно: або зменшити довжину гілки  $l_1$  до  $l_1'$ , настільки, щоб різниця

$$\text{між } \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2 - \frac{q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{P_B}{\rho g};$$

або збільшити  $K_1$  ( $K_1 = F \sqrt{R} \cdot C$ ), тобто збільшити діаметр трубопроводу  $d_1$  (при цьому збільшиться  $F_1$  і  $\sqrt{R}$ ) настільки щоб різниця

$$\text{між } \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2 - \frac{q_1^2}{(K_1')^2} l_1 = \frac{P_B}{\rho g}.$$

Показання манометра в цьому випадку теж буде

$$\frac{p_H}{\rho g} = \frac{Q^2}{K^2} l + \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2. \quad (149)$$

В той же час

$$\frac{q_2^2}{K_2^2} l_2 = \frac{q_1^2}{(K_1')^2} l_1 + \frac{p_B^{надл}}{\rho g}. \quad (150)$$

Тобто  $\frac{P_H}{\rho g}$  не зміниться по зрівнянню з показанням у прикладі 1.

**Приклад 3.** Для тих же самих умов, що в прикладі 1, але  $q_1 \neq q_2$  і невідомі

величини; також  $\frac{p_B}{\rho g} > \frac{p_B^{ам}}{\rho g}$ .

Відомо, що  $K_1 = K_2$ ;  $l_1 = l_2$ ;  $p_B = p_{ам}$ ;  $Q = q_1 + q_2$ .

Щоб визначити  $\frac{P_H}{\rho g}$  необхідно визначити тиск в точці  $A$ , який знаходиться з умов, що в точці  $A$  тиск для двох гілок  $A-B$  і  $A-B$  однаковий, також відомо, що загальні втрати напорів однакові для різних гілок  $h_{вт}^{A-B} = h_{вт}^{A-B}$ . Для знаходження  $h_{вт}^{A-B}$  і  $h_{вт}^{A-B}$  необхідно знати  $q_1$  і  $q_2$ .

$$h_{вт}^{A-B} = \frac{q_1^2}{(K_1')^2} l_1 + \frac{p_B}{\rho g}; \quad h_{вт}^{A-B} = \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2 \quad (151)$$

З метою визначення  $q_1$  і  $q_2$  скористаємось графоаналітичним методом. Для чого побудуємо гідравлічні характеристики трубопроводів для гілки  $A-B$  і гілки  $A-B$  і їх сумарну характеристику (при однакових  $h_{вт}^{A-B} = h_{вт}^{A-B}$  відкладається сумарні величини  $q_1 = q_2$  (рис. 53).

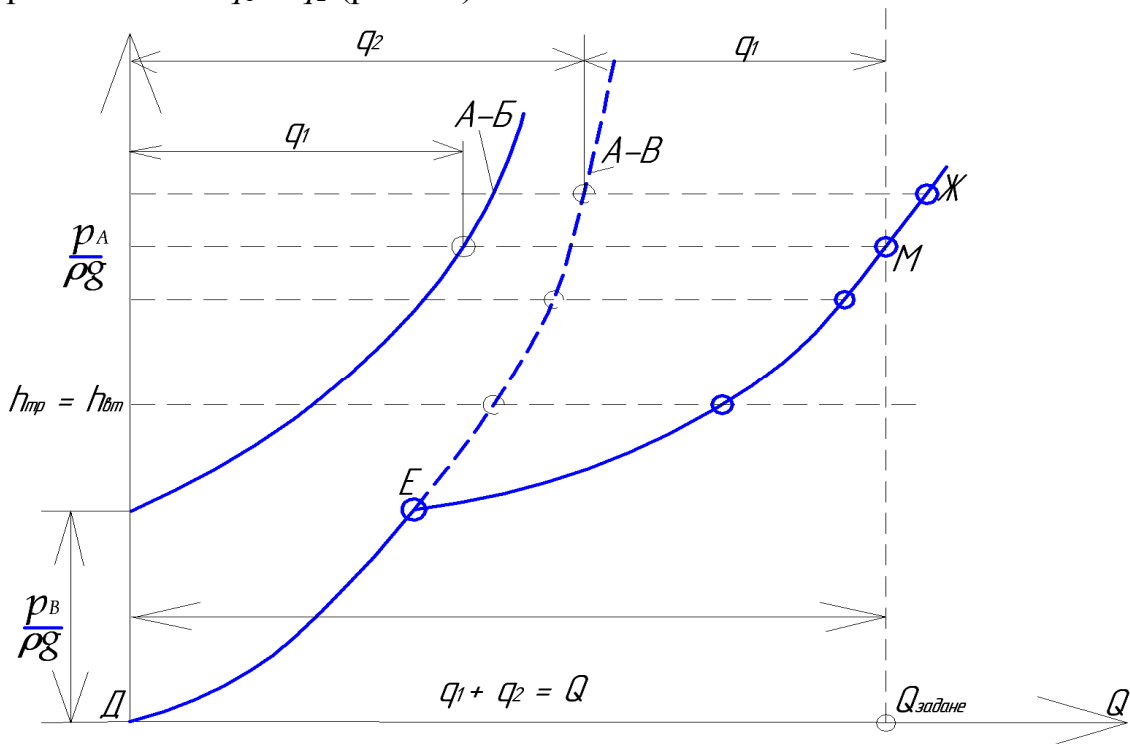


Рис. 53

Крива лінія *ДЕЖ* є сумарною гідравлічною характеристикою трубопроводів (гілок) *А-Б* і *А-В*.

Відкладаємо на осі абсцис (вісь *Q*) задане значення витрати рідини  $Q=q_1+q_2$ , яку повинен здійснювати насос. В точці *А* (рис. 52) ця витрата рідини розподіляється на  $q_1$  (для гілки *А-Б*) і на  $q_2$  (для гілки *А-В*).

Від заданого значення *Q* проводимо вертикаль до перетину з сумарною гідравлічною характеристикою *Е-Ж* (точка *М*). Від точки *М* проводимо горизонталь, яка перетинає гідравлічні характеристики трубопроводів *А-Б* і *А-В* при сталому напорі  $h_A$ , який дорівнює втратам напору в гілках *А-Б*, або *А-В*. ( $h_{вт}^{A-B} = h_{вт}^{A-B}$ ). Напір  $h_A$  є напором в точці *А*.

$$h_A = h_{мп}^{A-B}, \text{ або } h_A = h_{мп}^{A-B};$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = \frac{(q_1^2)'}{(K_1')^2} l_1 + \frac{p_B}{\rho g} = \frac{(q_2^2)'}{K_2^2} l_2$$

З рис. 53 визначаємо графічно в певному масштабі  $q_1$  і  $q_2$ .

Тоді показання манометра  $\frac{p_H}{\rho g} = \frac{Q^2}{K^2} l_1 + \frac{p_A}{\rho g}$  (153)

Примітка. У випадках  $K_1 \neq K_2$ ;  $l_1 \neq l_2$ ;  $p_B \neq p_{ат}$  і  $p_B \neq p_{ат}$ ; при розташуванні точки *Б* вище точки *А* на певну висоту, принцип гідравлічного розрахунку залишається таким самим як в прикладі 3.

**Тупиковий трубопровід** – це магістральний трубопровід з відгалуженням в різних точках. (рис. 54).

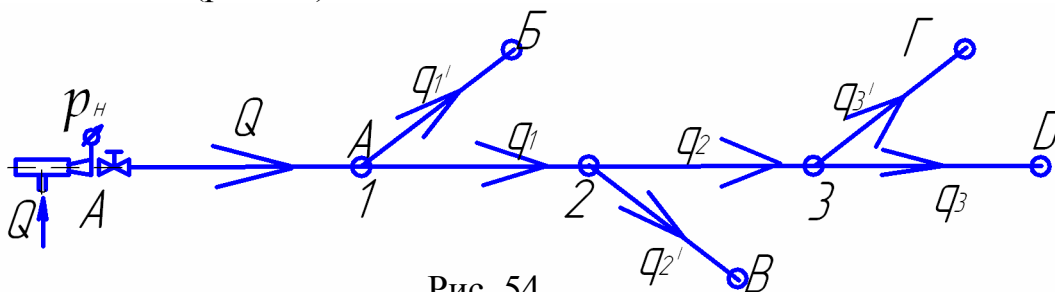


Рис. 54

$$q_1 = Q - q_1'; \quad q_2 = q_1 - q_2'; \quad q_3 = q_2 - q_3';$$

Точки 1, 2, 3 – вузлові точки.

Точки Б, В, Г, Д – тупикові точки з певними відомими витратами рідини ( $q_1', q_2', q_3'$ ).

Оскільки у вузлових точках 3, 2, 1 напори однакові для двох гілок, то для визначення показання манометра, встановленого на виході рідини з насоса достатньо визначити втрати напорів на ділянках 3-Д; 2-3; 1-2; А-1. Сумарні втрати напорів на цих ділянках покаже манометр, встановлений в точці А.

Тобто  $\frac{p_H}{\rho g} = h_{вт}^{3-Д} + h_{вт}^{2-3} + h_{вт}^{1-2} + h_{вт}^{А-1}$ ,

що представляє собою втрати напору в магістральному трубопроводі, що складений з послідовно з'єднаних ділянок з різними витратами рідини. Тоді

$$\frac{p_H}{\rho g} = \frac{q_3^2}{K_3^2} l_3 + \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2 + \frac{q_1^2}{K_1^2} l_1 + \frac{Q^2}{K^2} l. \quad (154)$$

Відгалуження 1-Б, 2-Б, 3-Г розраховують аналогічно розглянутого в попередніх прикладах.

### Паралельно розгалужений трубопровід (рис. 55)

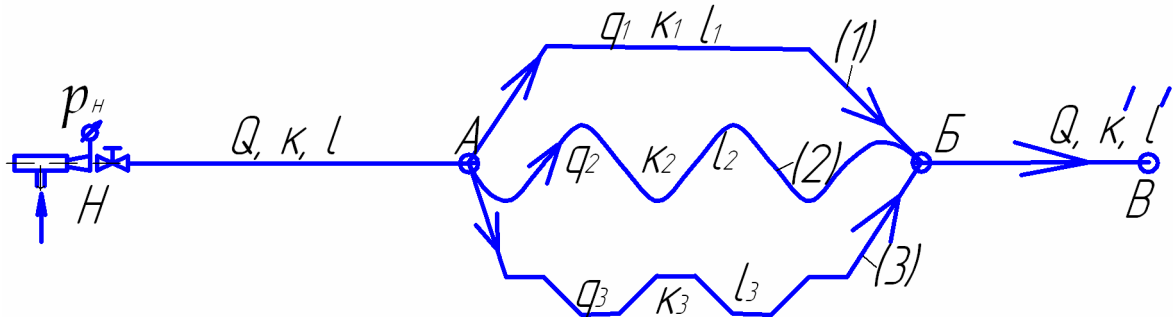


Рис. 55

Відгалуження мають різні витратні характеристики ( $K_1, K_2, K_3$ ), різні довжини трубопроводів (гілок:  $l_1, l_2, l_3$ ) і, як наслідок цього різні витрати рідини  $q_1, q_2, q_3$ .

Відповідно до схеми на рис. 55, визначити показання манометра на виході з насоса, а також витрати рідини  $q_1, q_2, q_3$ .

В точці А трубопровід розділяється на три гілки. На початку кожної гілки в точці А напір однаковий. В точці з'єднання цих гілок (точка Б) напір менший на величину втрат напору, але в кінці кожної гілки в точці Б – однаковий.

Звідси робимо висновки, що в кожній окремій гілці між точками А і Б втрати напору однакові незалежно від їх довжин і витратних характеристик. Але, при цьому, витрата рідини в кожній гілці буде різною. Тобто:

$$(h_{mp}^{A-B})_1 = (h_{mp}^{A-B})_2 = (h_{mp}^{A-B})_3, \quad (155)$$

або

$$\frac{q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2 = \frac{q_3^2}{K_3^2} l_3. \quad (156)$$

Останнє рівняння сумісно з рівнянням  $Q = q_1 + q_2 + q_3$  дають можливість визначити  $q_1, q_2, q_3$ . Так з рівняння

$$\frac{q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2$$

визначаємо

$$q_2 = q_1 \sqrt{\frac{K_2^2 l_1}{K_1^2 l_2}}; \quad (157)$$

з рівняння

$$\frac{q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{q_3^2}{K_3^2} l_3$$

визначаємо

$$q_3 = q_1 \sqrt{\frac{K_3^2 l_1}{K_1^2 l_3}}; \quad (158)$$

Підставляємо  $q_2$  і  $q_3$  в рівняння  $Q = q_1 + q_2 + q_3$  і одержимо

$$Q = q_1 + q_1 \sqrt{\frac{K_2^2 l_1}{K_1^2 l_2}} + q_1 \sqrt{\frac{K_3^2 l_1}{K_1^2 l_3}};$$

$$Q = q_1 \left( 1 + \sqrt{\frac{K_2^2 l_1}{K_1^2 l_2}} + \sqrt{\frac{K_3^2 l_1}{K_1^2 l_3}} \right),$$

звідки

$$q_1 = Q / \left( 1 + \sqrt{\frac{K_2^2 l_1}{K_1^2 l_2}} + \sqrt{\frac{K_3^2 l_1}{K_1^2 l_3}} \right). \quad (159)$$

Для визначення  $q_2$  запишемо

$$\frac{q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{q_2^2}{K_2^2} l_2, \quad q_1 = q_2 \sqrt{\frac{K_1^2 l_2}{K_2^2 l_1}};$$

$$\frac{q_2^2}{K_1^2} l_2 = \frac{q_3^2}{K_3^2} l_3 \text{ визначаємо } q_3 = q_2 \sqrt{\frac{K_3^2 l_2}{K_2^2 l_3}}.$$

З рівняння  $Q = q_1 + q_2 + q_3$ , підставляючи замість  $q_1$  і  $q_3$  їх значення через  $q_2$  дістанемо

$$Q = q_2 \sqrt{\frac{K_1^2 l_2}{K_2^2 l_1}} + q_2 \sqrt{\frac{K_3^2 l_2}{K_2^2 l_3}} + q_2, \text{ звідки}$$

$$q_2 = Q / \left( 1 + \sqrt{\frac{K_1^2 l_2}{K_2^2 l_1}} + \sqrt{\frac{K_3^2 l_2}{K_2^2 l_3}} \right) \quad (160)$$

Знаючи  $q_1$ ;  $q_2$  і  $Q$  визначаємо  $q_3$

$$q_3 = Q - (q_1 + q_2). \quad (161)$$

Значення  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  можна отримати, застосовуючи відомий графоаналітичний метод, який описаний в попередньому прикладі.

Для визначення показань манометра достатньо було визначити одну з величин витрат рідини в гілках, так як втрати напорів в гілках рівні між собою. Тоді

$$\frac{p_H}{\rho g} = \frac{Q^2}{K^2} l + \frac{q_1^2}{K_1^2} l_1 + \frac{Q^2}{(K')^2} l' \quad (162)$$

**Кільцевий трубопровід.** Паралельне з'єднання, що складається з двох гілок (ділянок), є прикладом найпростішого однокільцевого трубопроводу.

Гідравлічні розрахунки багатокільцевих трубопроводів зводяться до розв'язання алгебраїчної системи великої кількості нелінійних рівнянь, що є нелегкою справою.

Існує багато прогресивних методів розрахунку кільцевих трубопроводів.

## Гідравлічний удар в трубах.

Гідравлічним ударом називається підвищення або зниження тиску рідини у трубопроводі, спричинене раптовою зміною швидкості руху рідини.

Як показали досліди зменшення швидкості руху рідини в трубопроводі на один метр за секунду приводить до збільшення тиску приблизно до десяти атмосфер.

Гідравлічний удар в трубах виникає у водопровідних трубах при швидкому закриванні або відкриванні запірних пристроїв. Гідравлічний удар іноді приводить до розриву стінок трубопроводу.

Теоретично явище гідравлічного удару вперше обґрунтував і запропонував метод його розрахунку у 1898 р. професор М.Є. Жуковський.

Розглянемо гідравлічний удар на прикладі найпростішої схеми.

В трубопроводі рухається вода зі сталою швидкістю  $v$  під сталим напором води  $H$  в ємності.

Біля відкритої засувки тиск  $p$  і швидкість руху води  $v$ . При миттєвому закриванні засувки рух рідини біля засувки припиняється, а тиск різко підвищується на величину  $\Delta p$ . За елементарний проміжок часу  $\Delta T$  підвищення тиску пошириться на довжину  $\Delta L$ . Тобто за час  $\Delta T$  елементарна маса рідини ( $\Delta F \Delta L \cdot \rho$ ), що рухалась до закриття засувки зі швидкістю  $v$ , припинить свій рух, але тиск біля засувки і на всій елементарній довжині  $\Delta L$  буде  $p + \Delta p$ .

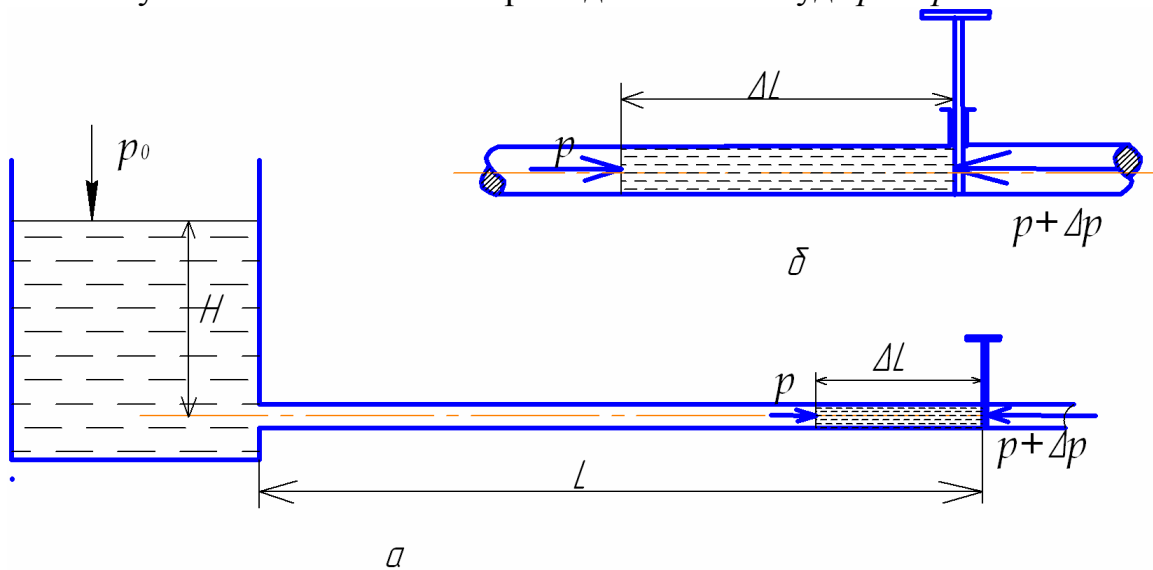


Рис. 56

Кількість руху цієї елементарної маси рідини до миттєвого закриття засувки, яка рухалась зі швидкістю  $v$  буде  $\rho F \Delta L \cdot v$ .

Після проходження хвилі підвищеного тиску за час  $\Delta T$  швидкість руху рідини цієї елементарної маси дорівнює нулю. Тоді зміна кількості руху  $\rho \cdot F \cdot \Delta t \cdot v$  буде дорівнювати імпульсу сили  $[(p + \Delta p)F - pF] \Delta T$ , (163)

тобто  $\rho F \Delta L v = \Delta p F \Delta T$ ,

звідки 
$$\Delta p = \rho \frac{\Delta L}{\Delta T} v = \rho C v \quad (164)$$

де 
$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta T} = C$$

$C$  – швидкість розповсюдження ударної хвилі, яка дорівнює швидкості розповсюдження звуку в рідині;

$v$  – швидкість руху рідини до закриття засувки;

$\Delta p$  – підвищення тиску;

$\rho$  – густина рідини.

Для визначення швидкості поширення ударної хвилі виводиться формула з урахуванням особливості води і деформації стінки трубопроводу.

$$C = \frac{\sqrt{\frac{E_p}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{E_p d}{E_{mp} \delta}}}, \quad (165)$$

де  $\sqrt{\frac{E_p}{\rho}}$  – швидкість поширення звуку в рідині (1425 м/сек.);

$E_p$  – модуль пружності рідини;

$E_{mp}$  – модуль пружності матеріалу труби;

$d$  – діаметр трубопроводу;

$\delta$  – товщина стінки труби.

При миттєвому закриванні засувки здійснюється так званий **прямий** гідравлічний удар. Час, протягом якого ударна хвиля, що виникла біля засувки крана дійде до напірної місткості, відіб'ється від неї і повернеться назад до засувки називається фазою ударної хвилі

$$T = \frac{2L}{C}. \quad (166)$$

Якщо тривалість закривання запірною пристроєм більше фази ударної хвилі ( $t > T$ ), то виникає непрямий гідравлічний удар, сила якого менша ніж прямого.

Підвищення тиску при непрямому гідравлічному ударі наближено можна визначити за формулою

$$\Delta p = \rho C v \frac{T}{t}. \quad (167)$$

Застосовуються спеціальні клапани - гасники гідравлічних ударів, які автоматично відкриваються при збільшенні або зниженні тиску проти нормального і скидається частина води з трубопроводу; при цьому тиск знижується.

### **Витікання рідини крізь отвори і насадки**

#### **Витікання рідини крізь отвори при сталому напорі.**

Отвори бувають малі і великі, в тонкій і товстій стінці; також отвори можуть бути з удосконаленим і неудосконаленим, повним і неповним стисненням струменя.

**Малими** називаються отвори, по висоті яких можна знехтувати зміною напору. При цьому діаметр отвору повинен бути не більше 0.1 глибини занурення центра ваги отвору ( $h$ ) під рівень вільної поверхні рідини (тобто,  $d_{отв} \leq 0,1h$ ).



**Великими** називаються отвори, в яких зміною напору по висоті знехтувати неможна.

**Тонка стінка** – це така її товщина, яка не впливає на процес витікання рідини. При цьому  $\delta \leq 3d$  ( $\delta$  - товщина стінки). Як правило отвори з гострими кромками є отворами в тонкій стінці.

**Товста стінка** це така її товщина, яка впливає на процес витікання рідини. До товстих стінок відносяться стінки з товщиною від 3 до 7  $d$ . Такі отвори в товстій стінці називаються насадками.

При витіканні рідини крізь малі отвори в тонкій стінці під сталим напором  $h$  струмінь одразу за отвором стискається. Це стиснення пояснюється тим, що лінії течії рідини перед входом в отвір і в отворі криволінійні (див. рис. 57).

Струмінь, що витікає з отвору, не зберігає свою форму, а під дією сил поверхневого натягу деформується. Явище деформації струменя після виходу із отвору в стінці називається інверсією струменя.

Якщо отвір достатньо віддалений від стінки резервуара і вільної поверхні (на відстані більше  $3d$ ) струмінь, що витікає з отвору однаково стискається зі всіх боків. Такий отвір називається отвором з удосконаленим стисненням.

До отворів з неповним стисненням струменя відносяться отвори, як правило, в формі квадрата, або чотирикутного прямокутника, які одним, або двома боками торкаються дна і вертикальної стінки резервуара.

Отвір, крізь який рідина витікає в газове середовище (повітря) називається незатопленим.

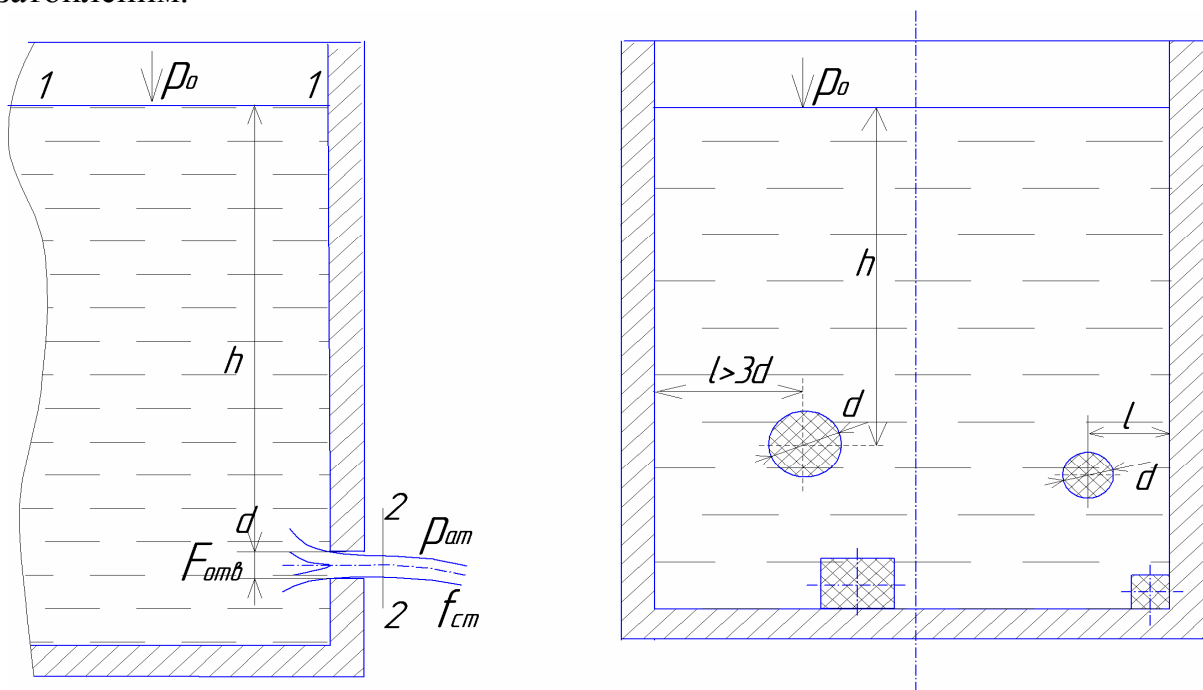


Рис. 57

Степінь стиснення струменя визначається коефіцієнтом стиснення  $\varepsilon$ , рівним відношенню площі стиснутого перерізу  $F_{cm}$  до площі отвору  $F_{omv}$

$$\varepsilon = \frac{F_{cm}}{F_{omv}}. \quad (168)$$

**Визначення швидкості витікання рідини і витрати рідини крізь малий отвір в тонкій стінці.**

Як відомо  $Q = v \cdot F$ , де  $Q$  – витрата рідини,  $F$  – площа поперечного перерізу,  $v$  – середня швидкість потоку в даному поперечному перерізі  $F$ .

Для визначення  $Q$  необхідно знайти  $v$  в поперечному перерізі  $F$ .

При відомих тисках на вільній поверхні рідини в резервуарі ( $p_0$ ) і за отвором, з якого витікає рідина ( $p_2 = p_{am}$ ), знаючи глибину занурення центра ваги  $h$  круглого малого отвору, за допомогою рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2, проведених по вільній поверхні і в стиснутому перерізі, де лінії течії паралельні одна одній, запишемо рівняння Бернуллі.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{\text{втр}}^{1-2} \quad (169)$$

Площину порівняння проводимо через центр ваги площі поперечного перерізу струменя (2-2). Тоді для перерізу 1-1:

$$z_1 = h; \quad p_1 = p_0; \quad v_1 = 0 \quad (\text{так вільна поверхня не рухається}); \quad p_0 > p_{am}$$

Для другого перерізу (стиснутого, за отвором):

$$z_2 = 0; \quad p_2 = p_{am}; \quad v_2 = v_{cm}; \quad h_{\text{втр}}^{1-2} = h_{\text{отв}}.$$

(Крім опору отвору між перерізами 1-1; 2-2 інших втрат напору немає);  
Тоді

$$h_{\text{отв}} = \zeta_{\text{отв}} \frac{v_{cm}^2}{2g} \quad (170)$$

Підставляючи конкретні значення для першого і другого перерізів в рівняння Бернуллі, отримуємо

$$h + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_{am}}{\rho g} + \frac{v_{cm}^2}{2g} + \zeta_{\text{отв}} \frac{v_{cm}^2}{2g},$$

$$h + \frac{p_0 - p_{am}}{\rho g} = \frac{v_{cm}^2}{2g} (1 + \zeta_{\text{отв}}),$$

звідки

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_{\text{отв}}}} \sqrt{2g \left( h + \frac{p_0 - p_{am}}{\rho g} \right)}, \text{ де}$$

$\sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_{\text{отв}}}} = \varphi$  називається коефіцієнтом швидкості. Тоді

$$v_{cm} = \varphi \sqrt{2g \left( h + \frac{p_0 - p_{am}}{\rho g} \right)}$$

При  $p_0 = p_{am}$

$$v_{cm} = \varphi \sqrt{2gh} \quad (171)$$

Так як  $v_{cm}$  визначена, то необхідно знайти  $F_{cm}$  для  $Q = v_{cm} \cdot F_{cm}$

Знаходимо у відповідних таблицях  $\varepsilon$  – коефіцієнт стиснення. Знаючи  $\varepsilon$  і  $d$  знаходимо  $F_{cm}$  як  $F_{cm} = \varepsilon \cdot F_{\text{отв}}$ .

Далі визначаємо  $Q = v_{cm} \cdot F_{cm}$  і

$$Q = \varepsilon F_{\text{отв}} \varphi \sqrt{2gh}.$$

Позначимо добуток  $\varepsilon\varphi = \mu$ , де  $\mu$  – коефіцієнт витрати рідини при її витіканні крізь малий отвір в тонкій стінці при сталому напорі.

$$Q = \mu F_{отв} \sqrt{2gh}. \quad (172)$$

Коефіцієнти витікання рідини(води) крізь малі круглі отвори в тонкій стінці при сталому напорі мають приблизно такі значення :

$$\varepsilon = 0,64; \varphi = 0,96; \zeta_{отв} = 0,06; \mu = 0,62.$$

### Витікання рідини крізь великі отвори в тонкій стінці.

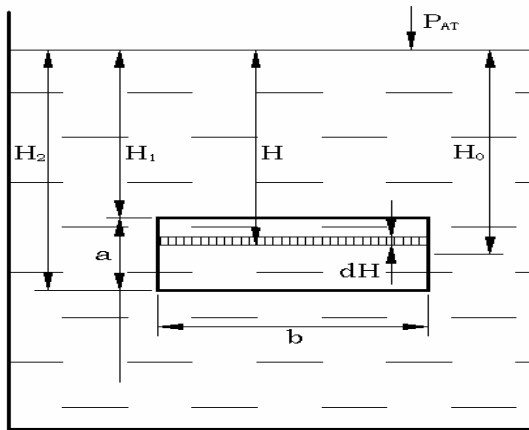


Рис. 58

На рис. 58 представлений великий отвір шириною  $b$  і висотою  $a$  в тонкій стінці. Рівень вільної поверхні рідини сталий.

Використати рівняння Бернуллі для визначення швидкості витікання рідини в цьому випадку ми не можемо із-за великих розмірів отвору за висотою, де тиски і швидкості в значній мірі міняються.

Уявимо в перерізі великого отвору елементарну плоску струминку шириною  $b$  і висотою  $dH$ , яка занурена на глибину  $H$  під рівень рівної поверхні. При швидкості

витікання рідини крізь стиснутий поперечний переріз елементарної струминки елементарна витрата рідини буде.

$$dQ = v_{cm} dF_{cm} = \varphi \sqrt{2gH} \cdot \varepsilon b; dH = \mu b \cdot dH \sqrt{2gH}$$

Витрату рідини крізь отвір стримуємо, проінтегрувавши  $dQ$  :

$$Q = \mu b \int_{H_1}^{H_2} \sqrt{2gH} \cdot dH .$$

Звідки

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}); \text{ м}^3/\text{с}.$$

Представимо  $H_2 = (H_0 + \frac{a}{2})$  і  $H_1 = (H_0 - \frac{a}{2})$ ,

тоді 
$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[ (H_0 - \frac{a}{2})^{3/2} - (H_0 + \frac{a}{2})^{3/2} \right].$$

Розкладаючи вираз, що знаходиться в квадратних дужках в біноміальний ряд, обмежившись трьома першими членами, одержимо,

$$\frac{3}{2} a \sqrt{H_0} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{96} \left( \frac{a}{H_0} \right)^2 - \frac{1}{2048} \left( \frac{a}{H_0} \right)^4 \right],$$

при  $\frac{a}{H} = 0,5$  (для великого отвору)

вираз в квадратних дужках буде:  $\frac{3}{2} a \sqrt{H_0} \cdot 0,998$ , або  $\frac{3}{2} a \sqrt{H_0}$ .

Тоді 
$$Q = \mu a b \sqrt{2g H_0}. \quad (173)$$

Тобто, формула для визначення витрати рідини крізь великий отвір практично однакова з формулою для витрати рідини крізь малий отвір, але  $\mu$  у них буде різним.

Коефіцієнт витрати рідини необхідно брати у відповідних довідкових матеріалах.

### ВИТІКАННЯ РІДИНИ КРІЗЬ ОТВОРИ В ТОНКІЙ СТІНЦІ ПІД РІВЕНЬ

Розглянемо випадок витікання рідини крізь малі і великі отвори в тонкій стінці з одної місткості в іншу під рівень (рис. 59). На вільних поверхнях рідини в місткостях атмосферні тиски. Напори  $H_1$  і  $H_2$  (по відношенню до осі отвора) незмінні. Струмінь на виході з отвору у рідину також стискається.

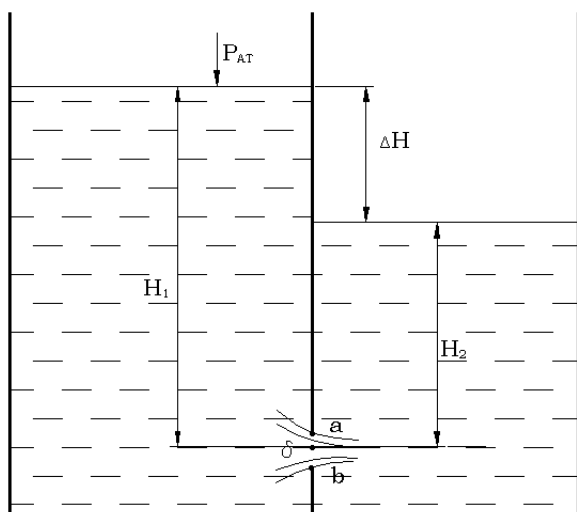


Рис. 59

Швидкість витікання рідини з лівої місткості в іншу для малого отвору можна визначити з рівняння Бернуллі. Витікання рідини здійснюється під дією різниці напорів

$$H = H_1 - H_2.$$

Якщо витікання здійснюється крізь великий отвір під рівень, то можна побачити, що різниця напорів зверху отвору (в точці *a*), в центрі ваги отвору (в точці *b*) і внизу отвору (в точці *c*) однакова. Тобто, за висотою отвору (великого) в кожній його точці різниця напорів однакова. Тоді швидкість витікання і витрата рідини під рівень

визначаються в обох випадках за формулами при витіканні рідини крізь малі отвори:

$$v_{cm} = \varphi \sqrt{2gH}; \quad (174)$$

$$Q = \mu F_{отв} \sqrt{2gH}. \quad (175)$$

Значення  $\varphi$  і  $\mu$  можна приймати такі ж самі, що і для випадку витікання рідини в атмосферу крізь малий отвір в тонкій стінці.

### Витікання рідини крізь насадки

Насадком називається короткий патрубок довжиною  $(3 - 7)d$ , приєднаний до отвору в тонкій стінці резервуара.

За формою насадки бувають циліндричні (зовнішні і внутрішні), конічні (збіжні і розбіжні), коноїдальні і гвинтові (рис. 60).

Різні типи насадків:

- а) внутрішні циліндричні,
- б) зовнішні циліндричні,
- в) конічно-збіжний,
- г) конічно розбіжний,
- д) гвинтовий,
- е) коноїдальний.

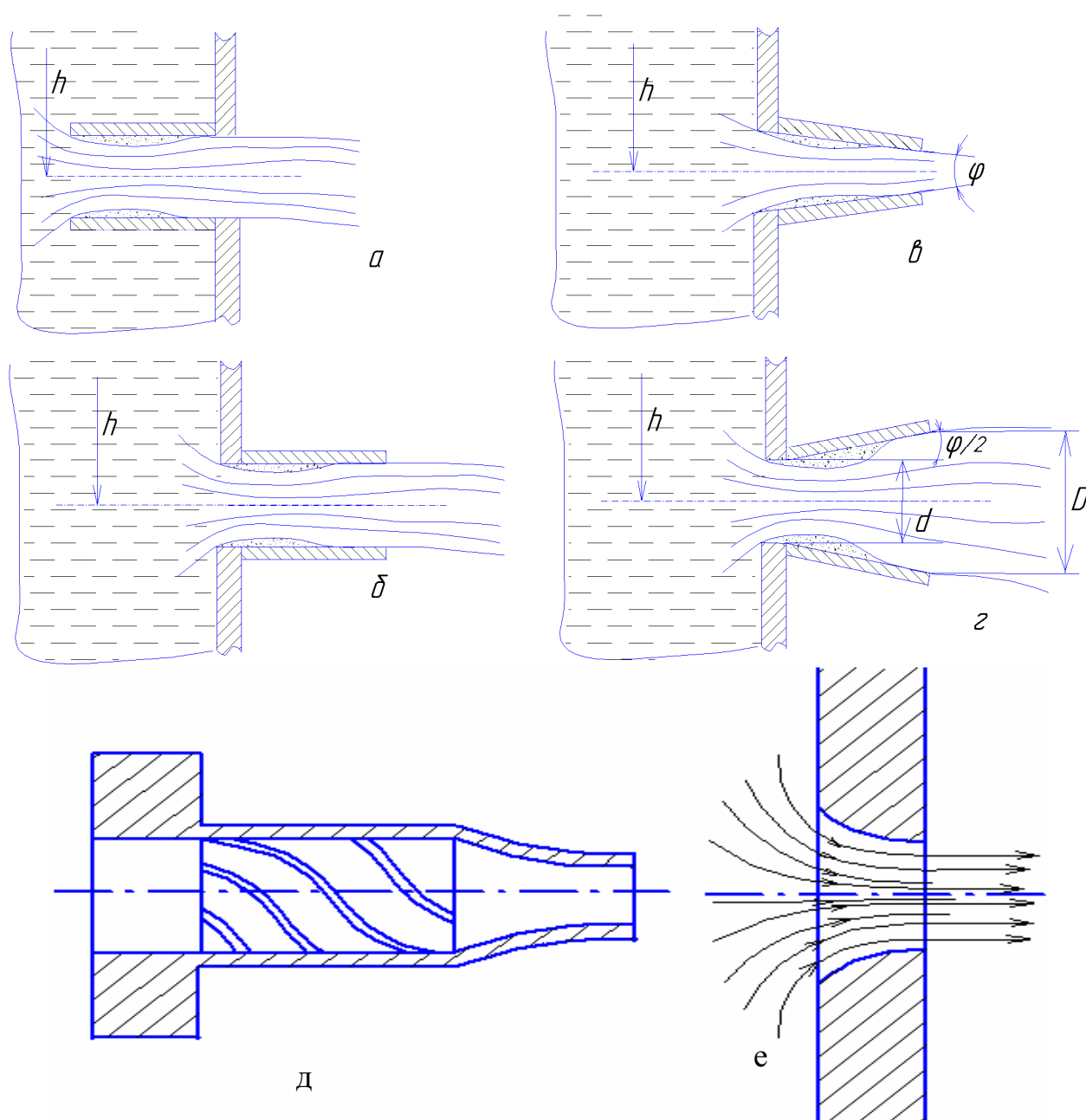


Рис. 60

Виведені формули для швидкості і витрати рідини при витіканні крізь отвори придатні і для насадків, але коефіцієнти витікання при цьому будуть іншими.

В насадку струмінь спочатку стискається, як в отворі, а потім розширюється, торкаючись внутрішніх стінок насадка і, виходить з нього повним перерізом. Розрахунковим тут вважається переріз 2-2 на виході рідини з насадка. Тому  $\varepsilon = 1$ , а

$$\mu = \varepsilon\varphi = \varphi, \quad (176)$$

Коефіцієнти швидкості і витрати рідини для зовнішнього циліндричного насадка  $\varphi = \mu = 0,82$ .

Таким чином циліндричний насадок збільшує витрату порівняно з отвором на

$$\frac{0,82 - 0,62}{0,62} \cdot 100 \approx 32\%$$

Збільшення витрати рідини порівняно з отвором (за інших рівних умов) зумовлюється наявністю вакууму в стиснутому перерізі. Насадок наче підсмоктує рідину з резервуара.

Рух краплинної рідини в циліндричному насадку обмежується мінімальним тиском (або найбільшим вакуумом) у стиснутому перерізі, при якому пружність парів, які насичують простір була б меншою від цього тиску.

Величина цього тиску (вакууму) залежить від напору в місткості  $h$  (глибина занурення центра ваги насадка під рівень вільної поверхні). Тому існує певна межа для напору, вище якого робота насадків порушується. Якщо напір  $h$  буде більше певної межі тоді струмінь відривається від стінок насадка, і витікання відбувається, як крізь отвір. Граничний напір  $h_{zp}$  буває приблизно 13,5 метрів. Тобто, якщо глибина занурення центра ваги насадка (при горизонтальному його розташуванні) під рівень вільної поверхні (разом з величиною  $\frac{p_0 - p_{am}}{\rho g}$  при  $p_0 > p_{am}$ ) буде більша 13,5 метрів, то витікання з насадка буде здійснюватись як з отвору.

### Витікання рідини при змінному напорі

У випадку випорожнення резервуара з поперечним перерізом  $F_{pez} = const$  напір рідини  $H$  в часі зменшується. Рух рідини неусталені. Звичайно потрібно визначити час витікання повного об'єма рідини або його частини. Може бути і необхідність визначення певного об'єма рідини за встановлений час. Тоді треба підбирати необхідний діаметр отвору чи насадка.

З метою визначення часу витікання певного об'єму рідини при зменшенні напору з  $H_1$  до  $H_2$  необхідно знайти залежність витікання елементарного об'єму рідини  $dW$  за час  $dt$ , з одного боку, з відомої формули  $dQ = \mu F_{omb} \sqrt{2gH}$  ( $dW = \mu F_{omb} \sqrt{2gH} \cdot dt$ ) і з другого, що за час  $dt$  при сталій площі поперечного перерізу  $F$  ємкості і сталому напорі  $H$  з ємкості витече елементарний об'єм рідини  $dW = -F \cdot dH$ .

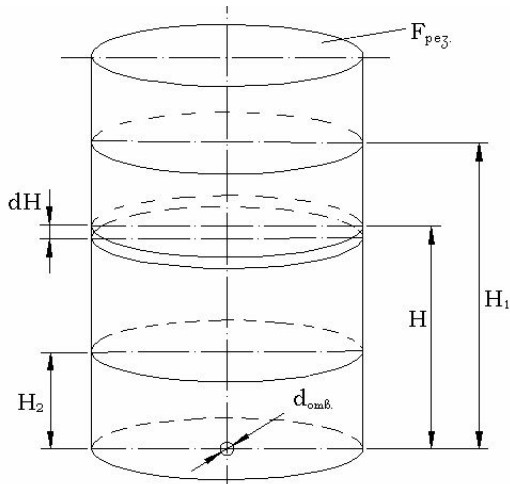


Рис. 60

Оскільки рівень вільної поверхні в часі опускається і напір при цьому падає, то витрата рідини зменшується.

Розглянемо витікання елементарного об'єма рідини  $dW$  за час  $dt$ . Виділений нами елементарний об'єма  $dW$  висотою  $dH$  витікає за час  $dt$  при сталому напорі  $H$  (див рис. 60). Тоді можемо записати, що з одного боку

$$dW = -F_{ем} dH$$

(знак мінус тому, що  $H$  при витіканні зменшується).

З другого, так як витікання  $dW$  за час  $dt$  здійснюється при  $H = const$ :

$$dW = \mu F_{омб} \sqrt{2gH} dt.$$

Тоді

$$-F_{рез} dH = F_{омб} \mu \sqrt{2gH} dt.$$

Звідси:

$$dt = - \frac{F_{ем} dH}{\mu F_{омб} \sqrt{2gH}} \quad (177).$$

Для визначення часу спорожнення резервуара від рівня  $H_1$  до рівня  $H_2$  інтегруємо рівняння ( ).

$$t = \int_{H_1}^{H_2} - \frac{F_{ем} dH}{\mu F_{омб} \sqrt{2gH}} = \int_{H_2}^{H_1} \frac{F_{рез} dH}{\mu F_{омб} \sqrt{2gH}}$$

Далі

$$t = \frac{2F_{ем}}{\mu F_{омб} \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \quad (178).$$

При повному випорожненні резервуара, тобто при  $H_2 = 0$ . Тоді

$$t = \frac{2F_{ем} \sqrt{H_1}}{\mu F_{омб} \sqrt{2g}} = \frac{2F_{ем} H_1}{\mu F_{омб} \sqrt{2g} H_1}. \text{ Або } t = \frac{2W}{Q}$$

де  $W$  – початковий об'єм рідини ( \*)  $m^3$

$Q$  – витрата рідини при сталому початковому напорі  $H_1$ ,  $m^3/c$ . Так як час витікання об'єму рідини  $W$  при сталому напорі  $H$  дорівнює:

$$t = \frac{W}{\mu F_{омб} \sqrt{2gH}}, \text{ сек}$$

Тоді час спорожнення резервуара об'ємом  $W$  при змінному напорі в два рази більше часу витікання такого самого об'єма рідини при сталому напорі.

### Витікання стисливої рідини (газу) з отворів

Витікання стисливої рідини при великій різниці тисків газ вже не можна розглядати як нестисливу рідину. Вважається, що процес зміни стану газу адіабатичний. Для такого процесу можна застосувати рівняння енергії для усталеного потоку в'язкої стисливої рідини і після певних перетворень отримати формулу для швидкості витікання, яку називають формулою Сен-Венана.

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( p/p_0 \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (179)$$

Максимально можлива швидкість витікання газу буде

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( p/p_0 \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (180)$$

Це випадок, коли витікання відбувається в середовище з абсолютним вакуумом (тиск  $p=0$ ) і потенціальна енергія стисненого газу переходить у кінетичну. Але ця максимальна швидкість не може бути досягнута. Граничною швидкістю тут є так звана критична швидкість витікання, що дорівнює місцевій швидкості звуку,

$$v_{кр} = a$$

де  $a$  – швидкість звуку.

### Основи гідродинамічної теорії подібності

На практиці часто зустрічаються умови, коли застосування диференціальних рівнянь, що описують той чи інший рух рідини, недостатньо для кількісної його оцінки. Пояснюється це складністю диференціальних рівнянь і відсутністю даних для її визначення. Тому для дослідження і розрахунків різних гідравлічних процесів, систем і споруджень користуються даними дослідів, одержаних на моделях. При проведенні таких експериментів встановлюють функціональну залежність між різними фізичними величинами, що впливають на явище, що досліджується.

Правильна організація експериментів, аналіз і узагальнення їх результатів можуть бути надійними лише у тому випадку, коли між реальними умовами і умовами на моделі існують певні залежності, що спираються на теоретичні закони. Такими законами є закони динамічної подібності, що пов'язано з теорією розмірностей.

Закони подібності показують, які величини необхідно вимірювати при проведенні експериментів, як необхідно обробляти дані, що отриманні при дослідженні і які умови необхідні і достатні для існування подібності двох систем.

Динамічно подібні потоки динамічно копіюють один одного. Динамічна подібність передбачає наявність **геометричної, кінематичної та матеріальної подібності** систем природи і моделі.

**Геометрична подібність** припускає пропорційність всіх схожих розмірів потоку природи і моделі, а також рівність кутів у схожих точках. Тобто

$$\frac{l_M}{l_N} = \alpha_e \quad ; \quad \frac{F_M}{F_N} = \alpha_e^2 \quad ; \quad \frac{V_M}{V_N} = \alpha_e^3 \quad (181)$$

де  $\alpha_e$  – константа геометричної подібності;

$\alpha_e^2$  – константа подібності площ;

$\alpha_e^3$  – константа подібності об'ємів;

$l_M, l_N$  – відповідно схожі лінійні розміри на моделі і природі.

**Схожими точками** у геометрично подібних системах називаються точки,



які однаково розташовані до границь цих систем і відношення яких рівні константам геометричної подібності  $\alpha_e$ , тобто:

$$\frac{x_M}{x_H} = \alpha_e ; \frac{y_M}{y_H} = \alpha_e ; \frac{z_M}{z_H} = \alpha_e . \quad (182)$$

**Кінематична подібність** вимагає щоб траєкторії, що описуються схожими частинками потоку природи і моделі за будь-які схожі відрізки часу були подібні. З цих умов виходить пропорційність швидкостей і прискорень і, відповідно, постійність відношення відрізків часу, за які частинки рідини, що знаходяться у схожих точках потоків природи і моделі, переміщуються, проходячи схожі елементи траєкторій. Схожими моментами часу  $t_M$  і  $t_H$  є моменти часу, які відносяться до подібних систем, що мають загальній початок відліку і які задовольняють залежності

$$\alpha_t = \frac{t_M}{t_H} \quad (183)$$

$\alpha_t$  – константа кінематичної подібності.

Вона дійсна для будь-якої пари схожих точок і схожих ділянок шляху в будь-який час.

**Матеріальна подібність** двох потоків вимагає взаємної відповідності між масою матеріальних частинок потоків природи і моделі. При цьому повинна існувати залежність:

$$\frac{M_M}{M_H} = \frac{\rho_M V_M}{\rho_H V_H} = \alpha_\rho \alpha_e^3 = \alpha_m \quad (184)$$

де  $\alpha_\rho$  – відношення середньої густини моделі до відповідної величини природи.

**Наявність геометричного, кінематичного і матеріального подібностей двох систем (потоків) забезпечує їх повну динамічну подібність.**

Ньютон запропонував розглядати динамічну подібність, виходячи з умови, що сили, діючі у схожих точках динамічно подібних систем, у схожі моменти часу відносяться один до одного як

$$\frac{Y_M}{Y_H} = \frac{M_M a_M}{M_H a_H} = \frac{M_M U_M^2 l_H}{M_H U_H^2 l_M} \quad (185)$$

Звідки виходить, що

$$\frac{Y_M l_M}{Y_H l_H} = \frac{M_M u_M^2}{M_H u_H^2},$$

або

$$\frac{Y_M l_M}{M_M u_M^2} = \frac{Y_H l_H}{M_H u_H^2} = \dots = \frac{Yl}{Mu^2} = idem . \quad (186)$$

Останній вираз, отриманий з тотожних перетворень залежності (5) дійсної для динамічно подібних систем (потоків). Тобто, безрозмірна величина  $\frac{Yl}{Mu^2}$

може бути критерієм динамічної подібності.

З рівняння (6) видно, що ці критерії подібності для динамічно подібних систем

повинні бути однаковими. Цей критерій носить ім'я **Ньютона** і позначається

$$Ne = \frac{Yl}{Mu^2} \quad (187)$$

Критерій Ньютона є загальний критерій динамічної подібності.

Для повної гідродинамічної подібності необхідна подібність всіх сил, діючих в системі. Але практично ці умови рідко виконуються, так як кожен з критеріїв сил вимагає певні умови подібності, які виявляються несумісними. Тому необхідно забезпечити подібність тих сил, які найбільш істотні для систем, що розглядаються.

В гідравліці в основному розглядаються три вида сил: сила ваги, сила тиску і сила тертя.

Розглянемо випадок, коли в системі визначальною є сила **ваги**.

$$G = Mg, \text{ де}$$

$M$  – маса системи,

$g$  – прискорення земного тяжіння

Для отримання умов подібності підставимо в формулу  $Ne$  замість загальної сили  $Y$  силу ваги  $G$ .

Тоді:

$$Ne = \frac{Yl}{Mu^2} = \frac{M_1 g_1 l_1}{M_1 u_1^2} = \frac{M_2 g_2 l_2}{M_2 u_2^2}, \quad (188)$$

звідки:

$$\frac{g l_1}{u_1^2} = \frac{g l_2}{u_2^2} = \dots = \frac{g l_i}{u_i^2} = idem \quad (189)$$

Безрозмірна величина  $\frac{g l}{u^2}$  характеризує подібність сил ваги і називається

критерієм Фруда.

$$Fr = \frac{g l}{u^2} \quad (190)$$

Рівність критеріїв Фруда ( $Fr$ ) в схожих точках потоку, що задовольняють геометричну, кінематичну і матеріальну подібності, забезпечують подібність сил ваги.

Для одержання умов подібності систем, визначальними силами в яких є сили тиску необхідно підставити в формулу  $Ne$  замість  $Y$  вираз  $P = p \cdot F$ . Тоді отримаємо

$$Ne = \frac{P l}{Mu^2} = \frac{p_1 F_1 l_1}{M_1 u_1^2} = \frac{p_2 F_2 l_2}{M_2 u_2^2} \quad (191)$$

Маючи на увазі, що  $M = \rho V$  і що у геометрично подібних системах  $\frac{F_1 l_1}{V_1} = \frac{F_2 l_2}{V_2}$ , знайдемо:

$$\frac{p_1}{\rho_1 u_1^2} = \frac{p_2}{\rho_2 u_2^2} = \dots = \frac{p_i}{\rho_i u_i^2} = idem \quad (192)$$

Безрозмірна величина  $\frac{P}{\rho u^2}$  є критерієм подібності тільки сил тиску і

називається критерієм **Ейлера**.

$$Eu = \frac{p}{\rho u^2} \quad (193)$$

Рівність критеріїв Ейлера “ $Eu$ ” у схожих точках потоків, що задовольняють геометричну, кінематичну і матеріальну подібності, забезпечують подібність сил тиску.

Досить часто в критерій Ейлера вводиться замість тиску ( $p$ ) різницю тисків ( $\Delta p$ ) у двох точках, тоді

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2} \quad (194)$$

У гідродинаміці реальної рідини найбільш часто характер руху визначає сила внутрішнього тертя між частинками рідини. Для одержання умов подібності сил тертя підставимо у критерій  $Ne$  замість загальної сили  $Y$  силу внутрішнього тертя

$$T = \mu F \frac{du}{dr} \quad (195)$$

Тоді вираз для критерію  $Ne$  має вигляд

$$Ne = \frac{Yl}{Mu^2} = \frac{\mu Fl}{Mu^2} \frac{du}{dr} \quad (196)$$

Враховуючи, що  $F \cong l^2$ ,  $dr$  – лінійна величина ( $dr \cong l$ ),  $M = \rho l^3$  і що в даному випадку  $du$  і  $dr$  можна розглядати як кінцеві величини  $u$  і  $l$  залежність критерію  $Ne$  буде мати вигляд

$$Ne = \frac{\mu l^2 u l}{\rho l^3 u^2 l} \quad (197)$$

Звідки:

$$\frac{\mu_1}{\rho_1 l_1 u_1} = \frac{\mu_2}{\rho_2 l_2 u_2} = \dots = \frac{\mu_i}{\rho_i l_i u_i} = \frac{\mu}{\rho l u} = idem \quad (198)$$

Обернена безрозмірна величина  $\frac{\rho l u}{\mu}$  є критерій подібності сил тертя і називається критерієм **Рейнольдса**

$$Re = \frac{\rho l u}{\mu} \quad (199)$$

Для потоків в циліндричній трубі діаметром ( $d$ ) замість ( $l$ ) вводиться характерний розмір „ $d$ ”. Тоді

$$Re = \frac{\rho d u}{\mu}, \quad (200)$$

або

$$Re = \frac{vd}{\nu}. \quad (201)$$

так як  $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ , де  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості.

Рівність критеріїв  $Re$  у схожих точках потоків, що задовольняють геометричну, кінематичну і матеріальну подібності, забезпечують подібність сил внутрішнього тертя.

На практиці розглянуті вище критерії подібності записуються найчастіше через середню швидкість потоку:

$$Fr = \frac{v^2}{gl}; \quad Eu = \frac{\Delta p}{g v^2}; \quad Re = \frac{vd}{\nu}. \quad (202)$$

### Питання для самоперевірки знань.

1. Поняття рідини. Реальна та ідеальна (уявна) рідини. Краплинна і газоподібна рідини.
2. Поняття частинки рідини.
3. Спільна властивість рідин (краплинної і газів), яка різко відрізняє їх від твердих тіл.
4. В'язкість рідини. Одиниці вимірювання в'язкості.
5. Сформулюйте закон Ньютона про внутрішнє тертя в рідині.
6. Чому тиск на рідину не впливає на силу тертя між її частинками?
7. Густина краплинної рідини і газоподібної.
8. З якою метою введено поняття Ейлерової моделі рідини? Дайте приклад.
9. Ньютонівські і не ньютонівські рідини.
  10. Стисливість рідин. Чим вона характеризується?
  11. Що є мірою стисливості рідин і газів?
  12. Яка властивість рідин і газів характеризується числом Маха?
  13. При яких швидкостях руху газів можна їх розглядати як нестисливу рідину.
  14. Яким чином визначається належність рідин до ньютонівської чи неньютонівської?
  15. Під дією яких сил рідини знаходяться в стані спокою або рухаються?
  16. Які сили відносяться до зовнішніх сил, що діють на рідину?
  17. Що таке гідростатичний тиск?
  18. Властивості гідростатичного тиску.
  19. Які складові входять в зведене рівняння системи диференціальних рівнянь Ейлера?
  20. Для яких умов виводиться і застосовується основне рівняння гідростатики.
  21. В чому полягає геометричний зміст основного рівняння гідростатики?
  22. Рідинні прилади для вимірювання тиску (п'єзметр, ртутний манометр).
  23. Рідинний прилад для вимірювання перепаду тисків. Рівняння рівноваги.
  24. Рідинний прилад для вимірювання вакууму. Рівняння рівноваги.
  25. Мікрометри. Рівняння рівноваги.

26. Форма вільної поверхні рідини в посудині, що знаходиться в стані абсолютного спокою.
27. Форма вільної поверхні рідини в циліндричній місткості, що обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю.
28. Форма вільної поверхні рідини в посудині, що рухається прямолінійно в горизонтальній площині зі сталим прискоренням.
29. На якій відстані від вільної поверхні рідини на вертикальній проекції стінки знаходиться центр тиску?
30. Яка відстань між центром ваги і центром тиску на плоскій вертикальній стінці, що занурена в рідину?
31. Як знаходиться центр тиску на криволінійній стінці, що занурена у рідину.
32. В чому полягає гідростатичний парадокс?
33. Закон розподілу тиску при політропному стані газу.
34. Закон розподілу температури при політропному стані газу.
35. На яку величину (в градусах Цельсія) зменшується температура повітря за напрямленням знизу вгору через кожні 100м за висотою (політропному стані повітря).
36. Місцева і миттєва швидкості. Класифікація рухів рідини.
37. Лінія течії і її властивості.
38. Поверхня трубки течії і її властивості.
39. Живий переріз в потоці рідини.
40. Зміна швидкості в живому (поперечному) перерізі елементарної струминки.
41. Потік рідини. Середня швидкість в поперечних перерізах потоку.
42. Витрата рідини потоку.
43. Закон нерозривності потоку рідини.
44. В чому полягає принцип Д'аламбера щодо рухомої частинки рідини.
45. Під дією яких сил знаходиться рухома частинка рідини.
46. В чому полягає геометричний зміст рівняння Бернуллі для ідеальної і реальної рідин?
47. Закон розподілу гідродинамічного тиску в перерізах на ділянках з плавномінімним рухом.
48. Що собою представляє коефіцієнт Коріоліса?
49. Правила застосування рівняння Бернуллі.
50. Рівняння для визначення дотичних напружень ( $\tau$ ) на будь-якому радіусі в циліндричній трубі.
51. Поняття динамічної швидкості.
52. Верхнє і нижнє критичні числа Рейнольдса при ламінарному русі рідини.
53. Епіюра розподілу швидкості в поперечному перерізі при ламінарному режимі руху в циліндричній трубі.
54. Співвідношення між середньою і максимальною швидкостями при ламінарному русі рідини в циліндричному трубопроводі.
55. Поняття про довжину формуючої ділянки в циліндричній трубі при ламінарному русі.
56. Структура потоку при турбулентному русі рідини в циліндричній трубі.
57. Як змінюється товщина пристінного шару при зміні швидкості руху

рідини?

58. Що представляє собою вектор осередненої швидкості в даній точці при турбулентному режимі руху рідини?

59. Закон розподілу швидкості в ядрі турбулентного потоку і в пристінному шарі.

60. Яка залежність коефіцієнта опору тертя по довжині труби при ламінарному режимі руху рідини.

61. Як називаються зони гідравлічного опору при турбулентному русі рідини? Як змінюється товщина пристінного шару при зміні швидкості руху рідини?

62. Як визначається зона гідравлічно-гладких труб? Яка функціональна залежність  $\lambda$  в цій зоні?

63. Як визначається зона гідравлічно-шорстких труб? Яка функціональна залежність  $\lambda$  в цій зоні?

64. Чому зона гідравлічно-шорстких труб називається квадратичною зоною гідравлічних опорів?

65. Як визначається перехідна зона (від гідравлічно-гладких до гідравлічно-шорстких труб? Яка функціональна залежність  $\lambda$  в цій зоні? Чому вона називається доквадратичною?

66. За якими формулами визначаються втрати напору при проходженні рідини через місцеві опори?

67. Яка різниця між дійсною і еквівалентною шорсткістю?

68. Як визначається коефіцієнт гідравлічного опору системи трубопроводу?

69. Загальна класифікація трубопроводів.

70. Формула Шезі для визначення швидкості руху рідини в каналі, трубопроводі.

71. Від яких параметрів залежить стала Шезі ( $C$ )? Чому вона стала величиною?

72. Що таке витратомірна характеристика трубопроводу ( $K$ )?

73. В чому полягає гідравлічний розрахунок простого (довгого) трубопроводу?

74. Визначення витрати рідини при протіканні її через короткий трубопровід.

75. Що називається сифонним трубопроводом? Характерні особливості його гідравлічного розрахунку.

76. Особливості гідравлічного розрахунку при шляховій витраті рідини в трубопроводі.

77. Особливості гідравлічного розрахунку при змішаній витраті, що протікає через трубопровід.

78. Яким чином вибирається економічно вигідна швидкість руху рідини в трубопроводі?

79. Що таке гідравлічний радіус? З якою метою вводиться це поняття?

80. Що таке еквівалентний діаметр трубопроводу? З якою метою вводиться це поняття?

81. Що називається еквівалентною довжиною трубопроводу?
82. Що лежить в основі гідравлічного розрахунку складних трубопроводів?
83. Принцип гідравлічного розрахунку тупикового трубопроводу.
84. Принцип гідравлічного розрахунку паралельно-розгалуженого трубопроводу.
85. Гідравлічний удар. Прямий і непрямий. Що лежить в основі залежності для визначення величини ударного тиску?
86. Запишіть рівняння Бернуллі для ізоентропічного процесу зміни стану нев'язкого газу і порівняйте його з рівнянням Бернуллі для нестисливої рідини вздовж елементарних струминок.
87. Покажіть, що зміна швидкості, вздовж струминки стисливого газу пов'язана зі зміною температури.
88. Запишіть рівняння Бернуллі для двох перерізів потоку реального газу для політропічного процесу.
89. Покажіть, що вплив стисливості рідини (газу) проявляється з наближенням швидкості течії до швидкості звуку.
90. Витікання рідини через малі отвори в тонкій стінці при сталому напорі. Визначення коефіцієнтів витікання.
91. Витікання рідини через великі отвори в тонкій стінці при сталому напорі.
92. Витікання рідини через отвори під рівень рідини.
93. Витікання рідини через насадки при сталому напорі. Визначення коефіцієнтів витікання.
94. Що таке “межовий напір” при витіканні рідини через насадки?
95. Чому при одних і тих же самих умовах витікання рідини через отвори і насадки, витрата рідини через насадки більша.
96. Витікання газів через отвори і насадки.
97. Основний критерій гідродинамічної подібності.
98. Попередні умови для існування критеріїв гідродинамічної подібності.
99. Якому критерію гідродинамічної подібності відповідає подібність сил тертя?
100. Якому критерію гідродинамічної подібності відповідає подібність сил тиску?
101. Якому критерію гідродинамічної подібності відповідає подібність сил ваги?

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

### Основна література

1. Кулінченко В.Р. Гідравліка, гідравлічні машини і гідропривід: Підручник. – К.: Фірма “ІНКОС”, Центр навчальної літератури, 2006. 616 с.
2. Кулінченко В.Р. Гідродинаміка: Навчальний посібник. – К.: НМК ВО, 1992. – 272 с.

### Додаткова література

1. Башта Т.М. Гидравлика, гидромашины и гидропривод: Учебник. – М.: машиностроение, 1982. – 424 с.
3. Шлипченко З.С. Насосы, компрессоры и вентиляторы. – К.: Техника, 1976. – 368 с.

Навчальне видання

І.В. ДУБКОВЕЦЬКИЙ,  
В.Р. КУЛІНЧЕНКО

ГІДРОГАЗОДИНАМІКА

КУРС ЛЕКЦІЙ

для студентів напряму

0925 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" денної,  
заочної та скороченої форм навчання

**Видання подається в авторській редакції**

Підп. до друку 21.04.09. Ум. друк. арк. 5,94. Наклад 200 пр.  
Зам. № 125-08А

---

РВЦ НУХТ. 01033 Київ-33, вул. Володимирська, 68

[www.book.nuht.edu.ua](http://www.book.nuht.edu.ua)

Свідоцтво про реєстрацію серія ДК № 1786 від 18.05.04 р.