УДК 371.13

ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ В MS EXCEL

Листопад В.В.
Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина, vlystopad@ukr.net

Аннотация. В статье рассмотрены отдельные случаи применения пакета Ms Excel в процессе обучения высшей математике, в частности, поиск обратной матрицы согласно определения и методом преобразований (метод Жордана-Гаусса). Решение системы линейных уравнений (СЛР) выполнено матричным методом (два действия) и методом преобразований (Жордана-Гаусса).

Введение. Современное общество ставит перед системой образования новые задачи, связанные с формированием новой педагогической стратегии в условиях массовой компьютеризации и информатизации всех сфер жизнедеятельности человека, в частности:

- добиться успешной социализации человека через погружение его в компьютерную культуру – в пределах насыщенного активного информационной среды научить человека жить, создав условия для его непрерывного образования;

- обеспечить получение широкого базового высшего образования, что позволит достаточно быстро переключаться на смежные области профессиональной деятельности.

В процессе изучения фундаментальных курсов математики, к которым относится линейная алгебра, сегодня накоплен достаточный опыт и значительный фактический материал методических систем усвоения таких курсов. Однако не все методики обучения используют современные компьютерные технологии в учебном процессе. В работе представлено пример использования пакета Ms Excel в одной из тем линейной алгебры.

Анализ актуальных исследований. Анализ работ М. И. Жалдака, Ю.С. Рамського, В.И. Клочко, Ю.В. Горошка, С. А. Ракова, Ю. В. Триуса, А. В Спиваковского и других позволил сделать вывод, что наиболее популярными программными продуктами для обучения высшей математике у вузах Украины является GRAN, MathCAD, MathLab, Maple, Mathematica, STATISTICA; офисные приложения: Microsoft Office Word, Excel, Power Point.

Изложение основного материала. Выполнение любых операций с матрицами (сложение, вычитание, умножение, вычисление обратной, транспонирования и т.д.) являются достаточно громоздкими и продолжительными во времени. На практическом занятии по теме «Действия с матрицами и вычисления обратной матрицы» удается разобрать максимально 2 – 3 примера. Если при изучении этой темы воспользоваться компьютерной поддержкой, то количество выполненных заданий возрастет в 4 – 5 раз. Для работы каждый преподаватель выбирает программу (для компьютерной поддержки), которая есть в наличии, или ту, с которой соискатели образования ознакомились на практических/лабораторных занятиях по информатике раньше.

Квадратная матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \tag{1}$$

где E - единичная матрица соответствующей размерности.

Квадратная матрица A^{-1}, называется обратной к матрице A, если

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}\, A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12}\, A_{22} \ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}\, A_{2n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения транспонированной относительно элементов заданной матрицы A.

В случае $n = 3$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{pmatrix}$ обратной будет матрица (2).

Квадратная матрица называется невырожденной или не особенной, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица A называется вырожденной, или особенной и не имеет обратной матрицы.

Теорема 1. Произвольную невырожденная матрица A с помощью элементарных преобразований можно свести к единичной матрицы E.

$$A \to E. \tag{3}$$

Теорема 2. Если к единичной матрицы порядка n применить те же элементарные преобразования только над строками и в том же порядке, с помощью которых невырожденная квадратная матрица A порядка n сводится к единичной, то полученная при этом матрица A^{-1} будет обратная матрице A.

Описанная в теореме 2 схема дает способ нахождения обратной матрицы к данной с помощью элементарных преобразований. При этом удобно записывать матрицы A и E рядом, разделяя их вертикальной чертой (рассматривая расширенную матрицу $(A|E)$), и одновременно проводить элементарные преобразования над строками матриц A и E. В результате преобразования строк матрица $(A|E)$ преобразуется в матрицу $(E|A^{-1})$, то есть

$$(A|E) \to (E|A^{-1}). \tag{4}$$

Этот метод вычисления обратной матрицы называют методом Жордана-Гаусса. Проиллюстрируем его реализацию на примере, пользуясь средствами Ms Excel.

Пример 1. [5] Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение.

Таблица 1 – Вычисление обратной матрицы методом Жордана – Гаусса.

3		A				E		
4	1	2	3	4	1	0	0	0
5	2	3	1	2	0	1	0	0
6	1	1	1	-1	0	0	1	0
7	1	0	-2	-6	0	0	0	1
8								
9	1	2	3	4	1	0	0	0
10	0	-1	-5	-6	-2	1	0	0
11	0	1	2	5	1	0	-1	0
12	0	2	5	10	1	0	0	-1
13								
14	1	0	-7	-8	-3	2	0	0
15	0	1	5	6	2	-1	0	0
16	0	0	-3	-1	-1	1	-1	0
17	0	0	-5	-2	-3	2	0	-1
18								
19	1	0	0	-5 2/3	- 2/3	- 1/3	2 1/3	0
20	0	1	0	4 1/3	1/3	2/3	-1 2/3	0
21	0	0	1	1/3	1/3	- 1/3	1/3	0
22	0	0	0	- 1/3	-1 1/3	1/3	1 2/3	-1
23								
24	1	0	0	0	22	-6	-26	17
25	0	1	0	0	-17	5	20	-13
26	0	0	1	0	-1	0	2	-1
27	0	0	0	1	4	-1	-5	3
28			E			A^{-1}		

В закрашенных клетках помечены разрешимые элементы для каждого шага перехода.

Замечание 1. Для перехода к следующей таблице пользуемся правилу прямоугольника (Жордановы исключения) с обязательной фиксацией (клавиша F4) в создаваемой формуле элементов разрешающего столбца. Проверку можно выполнить, пользуясь функцией МУМНОЖ.

Замечание 2. Теорема 2 выполняется также, если элементарные преобразования выполнять над столбцами (Жордановы исключения по вертикали), то есть матрицу E располагают под матрицей A, тогда

$$\left[\frac{A}{E}\right] \to \left[\frac{E}{A^{-1}}\right]. \tag{5}$$

<u>Пример 2.</u> Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Таблица 2 – Вычисление обратной матрицы по вертикале методом Жордана – Гаусса по формуле (5).

	A			Шаг 1		
3						
4	1	-1	-2	1	0	0
5	2	-1	-1	2	1	3
6	-1	3	2	-1	2	0
7	1	0	0	1	1	2
8	0	1	0	0	1	0
9	0	0	1	0	0	1
10	Шаг 2	E		Шаг 3	E	
11				1	0	0
12	1	0	0	0	1	0
13	0	1	0	0	0	1
14	-5	2	-6	- 1/6	2/3	1/6
15	-1	1	-1	1/2	0	1/2
16	-2	1	-3	- 5/6	1/3	- 1/6
17	0	0	1		A^{-1}	

За три шага мы нашли обратную матрицу. Выполним проверку действием умножения.

Таблица 3 – Поверка правильности вычисления обратной матрицы в примере 2.

21												
22		1	-1	-2		-1/6	2/3	1/6		1	0	-0
23	$A \cdot A^{-1} =$	2	-1	-1	*	1/2	0	1/2	=	0	1	-0
24		-1	3	2		-5/6	1/3	-1/6		0	0	1

Замечание 3. Если в соотношении (4) на место единичной матрицы справа от вертикальной черты поставить матрицу B (это матрица-столбец правой части системы), то в результате соответствующих преобразований получим матрицу $A^{-1} \cdot B$:

$$\left(A|E\right) \to \left(E|A^{-1} \cdot B\right), \tag{6}$$

где $A^{-1} \cdot B$ является решением системы в матричном виде.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$

Решение.

Таблица 4 – Решение примера 3 по формуле (6).

27					
28			A		B
29		1	-1	1	3
30		2	1	1	11
31		1	1	2	8
32	Крок 1	1	-1	1	3
33		0	3	-1	5
34		0	-2	-1	-5
35	Крок 2	1	0	2/3	4 2/3
36		0	1	- 1/3	1 2/3
37		0	0	-1 2/3	-1 2/3
38	Крок 3	1	0	0	4
39		0	1	0	2
40		0	0	1	1
41			E		$A^{-1}B$

Ответ. $x=4, y=2, z=1$.

Замечания 4. Если в соотношении (5) вместо единичной матрицы под горизонтальной чертой поставить матрицу B, то в результате соответствующих преобразований получим матрицу $A^{-1}B$:

$$\left[\frac{A}{B}\right] \to \left[\frac{E}{A^{-1}B}\right]. \qquad (7)$$

Предлагаем читателю самостоятельно решить систему из примера 3, по формуле (7).

Обратная матрица используется при решении матричных уравнений вида $AX=B$ (решение $X=A^{-1}B$) и $YA=B$ (решение $Y=BA^{-1}$).

Выводы и перспективы дальнейших научных исследований.

Очертим преимущества применения электронных таблиц Ms Excel при реализации метода Жордана - Гаусса на занятиях по высшей математике:

1. Процесс решения занимает считанные минуты по сравнению с подсчетом вручную.
2. Параллельно хорошо усваивается теоретический материал.
3. Формируются:
- навыки реализации алгоритмических процедур;
- умение формулировать учебную задачу, планировать деятельность по ее решению;
- умение подбирать и использовать готовые программные средства (математические пакеты прикладных программ и отдельные функции);
- умение составлять программы для решения типовых учебных задач;
- навыки владения основами логического программирования;
- умение подбирать эффективный метод для решения поставленной задачи.
4. Возможность за достаточно короткое время составить систему контрольных заданий для проведения тематического и итогового контроля.
5. Достаточно широкий спектр применения в методах решения задач линейного программирования.

Предлагаемое в статье более широкое внедрение пакета Ms Excel позволит обогатить содержание и разнообразить формы и способы овладения новыми темами, повысит мотивацию учебно-творческой деятельности студентов на занятиях, позволит им самостоятельно изучать определенные темы и получить принципиально новые знания для их дальнейшего использования в практической деятельности. Такой подход создает условия для непрерывного образования и самообразования, обучения в течение жизни.

Дальнейшие исследования видим в расширении использования пакета Ms Excel для решения прикладных задач в экономике, логистике, механике, технологических процессах, социальных исследованиях и т.п.

Литература

1. Співаковський О.В. Теорія й практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей: Монографія. – Херсон: Айлант. – 2003 – 229 с.
2. Жалдак М.І., Рамський Ю.С. Чисельні методи математики: Посібник для самоосвіти вчителів. - К.: Рад. шк., 1984. - 206 с.
3. Раков С.А., Горох В.П., Осенко К.О. Роль доведень у навчанні математики та їх підтримка засобами комп’ютерного моделювання у пакетах динамічної геометрії.//Науковий часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова.Серія №2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. Наук. Праць/Ред рада. К.;НПУ імені М.П.Драгоманова, 2012. - №12(19).- с.16-29.
4. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике: Справ. - Мн.: Наука і техніка, 1991. - 480 с.
5. Алгебра і теорія чисел. Практикум: В 2-х частинах/Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.А. – К.: Вища школа. Головне вид-тво, 1983. – ч. 1. 232 с.-Укр.