Наукові праці НУХТ. Додаток до №12. К.: НУХТ, 2002. С. 25-35.

УДК 66.01:664.01.23

КОЛИВАННЯ В ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ

Повідомлення 3

ВЗАЄМОДІЯ ДИНАМІЧНИХ І НЕПЕРЕРВНИХ ХВИЛЬ В ОДНО- І ДВОФАЗНИХ ОДНОВИМІРНИХ ПОТОКАХ

О.С. Марценюк, О.О. Дубінін,

Г.О. Тахістова, кандидати техн. наук

Національний університет харчових технологій

Сумісним розв'язанням диференціальних рівнянь нерозривності й руху динамічних і неперервних хвиль для однофазного та одновимірного двофазного потоків нестисливого середовища, а також аналізом одержаних розв'язків встановлено умови затухання й посилення хвиль і виникнення нестійкої течії.

Ключові слова: газорідинна система, взаємодія неперервних і динамічних хвиль.

КОЛЕБАНИЯ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ

Сообщение 3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ВОЛН В ОДНО- И ДВУХФАЗНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ПОТОКАХ

А.С. Марценюк, О.А. Дубинин,

Г.О. Тахистова, кандидаты техн. наук

Национальный университет пищевых технологий, г. Киев

Совместным решением дифференциальных уравнений неразрывности и движения динамических и непрерывных волн для однофазного и одномерного двухфазного потоков несжимаемой среды и анализом полученных решений определены условия затухания и усиления волн, а также возникновения неустойчивого течения.

Ключевые слова: газожидкостная система, взаимодействие динамических и непрерывных волн.

FLUCTUATIONS IN HETEROGENEOUS SYSTEMS

Report 3

INTERACTION OF DYNAMIC AND CONTINUOUS WAVES SPREADING WITHIN SINGLEPHASE AND TWOPHASE ONE DIMENSIONAL STREAMS

O. Martsenyuk, O. Dubinin,

A. Takhistova, cand. of techn. sciences

National university of food technologies, Kyiv

Joint solution of the differential equations of continuity as well as motion of dynamic and continuous waves for inglephase streams and one dimensional twophase streams of uncompressed medium and analysis of obtained solutions made it possible to set up conditions for wave attenuation and amplification along with occurrence of unstable streams.

Key words: gas-liquid system, interaction of dynamic and continuous waves.

Тепломасообмін у технологічних апаратах супроводжується утворенням неперервних і динамічних хвиль різної природи і різних частотно-швидкісних характеристик. У апаратах з плівковою течією (поверхневі та насадкові абсорбери), що працюють в умовах слабкої гідродинамічної взаємодії фаз, утворення і поширення хвиль в окремих фазах можна розглядати незалежно від умов руху іншої фази, тобто за моделлю однофазної течії. В інших випадках слід враховувати взаємний вплив потоків.

Найбільшою інтенсивністю хвилеутворення у двофазних потоках вирізняються апарати з барботажною взаємодією газової і рідкої фаз та масообміні апарати з перемішувальними пристроями, у тому числі апарати з мішалками. Зокрема, в масообмінних колонах з клапанними тарілками часто виникають спонтанні коливання клапанів, які накладаються на коливання, зумовлені силами динамічної взаємодії фаз, та на коливання від локальних градієнтів температур, концентрацій, густин, поверхневого натягу тощо. Крім того, на всю систему або її окремі зони можуть накладатися зовнішні коливання.

Взаємодія динамічних і неперервних хвиль може спричинювати їх згасання або підсилення, що у свою чергу впливає на перебіг процесів тепломасообміну. Розглянемо деякі закономірності взаємодії хвиль.

1. Взаємодія динамічних і неперервних хвиль в однофазних потоках

На практиці динамічні й неперервні хвилі існують здебільшого одночасно. Умовою одночасного існування хвиль обох видів є залежність сили, що припадає на одиницю об'єму і діє на рідину або частинки, від усіх трьох змінних: швидкості, концентрації і градієнта концентрації , тобто

$$f = \varphi\left(V, \alpha, \frac{d\alpha}{dx}\right). \qquad (1.1)$$

Рівняння нерозривності й руху для нестаціонарного однофазного одновимірного потоку записуються у вигляді

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + V\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \qquad (1.2)$$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x}\right) = f + b - \frac{dp}{dx}, \qquad (1.3)$$

де b — об'ємні сили.

Для рівноважного стану $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$.

Силу тиску, що діє на одиницю об'єму $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, можна подати як

$$f_\rho = -f_{\nabla\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}. \qquad (1.4)$$

Для збуреного потоку при малих відхиленнях α' і v' від рівноважних значень α і V рівняння (1.2) і (1.3) з урахуванням (1.4) можна записати у такому вигляді:

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial t} + \alpha\frac{\partial v'}{\partial x} = 0; \qquad (1.5)$$

$$\rho\frac{\partial v'}{\partial t} = f_v v' + f_\alpha\alpha' + f_{\nabla\alpha}\frac{\partial\alpha'}{\partial x}, \qquad (1.6)$$

де f_v, f_α, $f_{\nabla\alpha}$ — сили, що зумовлені зміненням швидкості, концентрації і градієнта концентрації.

Продиференціювавши (1.6) за x і виключивши v`, за допомогою (1.5) дістанемо

$$\rho\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2} + \alpha\ f_{\nabla\alpha}\ \frac{\partial^2\alpha'}{\partial x^2} - f_v\frac{\partial\alpha'}{\partial t} + \alpha f_\alpha\frac{\partial\alpha'}{\partial x} = 0. \qquad (1.7)$$

Введемо в (1.7) такі величини: $v_\omega = V_\omega - V$, де V_ω — швидкість неперервних хвиль відносно середньої швидкості потоку V, а також швидкість динамічних хвиль c. Згідно з (1.15) із повідомлення 1 і (1.6) із повідомлення 2 маємо

$$\begin{cases} v_\omega = V_\omega - V = -\dfrac{f_\alpha}{f_v}\alpha; \\ c = \left(-\dfrac{\alpha}{\rho}f_{\nabla\alpha}\right)^{1/2}. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Оскільки поверхнева сила f_v має бути від'ємною (інакше частинки потоку нескінченно прискорювались би), вводимо величину

$$B = -f_v/\rho, \qquad (1.9)$$

за допомогою якої можна характеризувати "демпфірування" поширюваних збурень у потоці.

За допомогою (1.8) і (1.9) рівняння (1.5) і (1.6) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\alpha'}{\partial x^2} + B\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t} + v_\omega\frac{\partial\alpha'}{\partial x}\right) = 0. \qquad (1.10)$$

Рівняння (1.10), яке характеризує малі збурення α` функції $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$ відносно рівноважного стану системи (α_0) має частинний розв'язок, якщо вважати, що збурення, які виникають, залежать від часу за експоненціальним законом $e^{+\lambda t}$, де λ — декремент, що визначає хід збурень у часі. В загальному випадку декремент є комплексною величиною. Для нашого випадку введемо декремент λ у вигляді $\lambda = \alpha t + i\omega\left(t - \dfrac{z}{u}\right)$, де u — швидкість збурень. Отже, малі збурення

$$\alpha' = \alpha_0 e^{at+i\omega(t-z/u)}. \qquad (1.11)$$

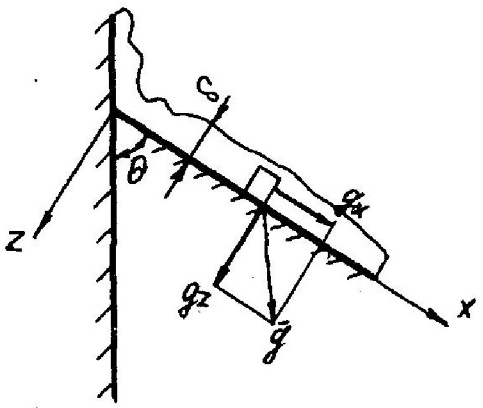
Параметр α характеризує змінення збурень у часі. Якщо $\alpha > 0$, то збурення зростають, якщо $\alpha < 0$ — згасають. Уявна частина показує, з якою частотою ω осцилюють збурення α' під час їх затухання або нарощування і з якою швидкістю u вони поширюються.

Підставляючи (1.11) у (1.10), після розділення уявної і дійсної частин розв'язання відносно α і ω^2 дає такий результат:

$$a = \frac{B}{2}\left(\frac{v_\omega}{u} - 1\right); \qquad (1.12)$$

$$\omega^2 = \frac{B^2}{4}\left(\frac{v_\omega^2 - u^2}{u^2 - c^2}\right). \qquad (1.13)$$

У рівнянні (1.12) згідно з (1.9) величина B є від'ємною. Отже, коли $u > v_\omega$, маємо $\alpha > 0$ і хвилі збурень нарощуються та поширюються з частотою ω. При $u < c$ колова частота коливань хвиль ($\omega^2 > 0$) є стійкою.



До аналізу стійкості однови-мірних неперервних хвиль у плівці, що стікає по похилій пластині

Якщо неперервні хвилі обганяють динамічні ($v_\omega > u$), а ($u < c$), то спостерігається затухання хвиль збурень $\alpha > 0$ з відповідною частотою ω^2 згідно з (1.13). Якщо $v_\omega = u$, то $\alpha = 0$ і $\omega = 0$, тобто поширюються тільки неперервні хвилі без змін зі швидкістю $V_\omega = V + u$.

Дослідимо стійкість поширення одновимірних неперервних хвиль у в'язкій рідині, що стікає по похилій пластині. Нехай пластина нахилена до вертикалі під кутом θ. Складові сили ваги в напрямках x і z (*рисунок*) дорівнюють відповідно $g_x = g\cos\theta$, $g_z = g\sin\theta$. Згідно з (1.7) — (1.9) із повідомлення 1

$$V = \frac{g\cos\theta(\rho_f - \rho_g)\delta^2}{3\mu_f}; \qquad (1.14)$$

$$V_\omega = \frac{g\cos\theta(\rho_f - \rho_g)\delta^2}{\mu_f}; \qquad (1.15)$$

$$c = (\delta g\sin\theta)^{1/2}. \qquad (1.16)$$

Нестійкість виникає, коли швидкість неперервних хвиль v_ω у потоці перевищує швидкість динамічних хвиль, тобто

$$v_\omega = V_\omega - V > c. \qquad (1.17)$$

Підставивши (1.14) — (1.16) у (1.17), дістанемо

$$\frac{2}{3}\frac{g\cos\theta(\rho_f - \rho_g)\delta^2}{\mu_f} > (\delta g\sin\theta)^{1/2}. \qquad (1.18)$$

З урахуванням (1.14) рівняння (1.18) можна перетворити в залежність

$$\frac{4V\delta(\rho_f - \rho_g)}{\mu_f} > 3tg\theta. \qquad (1.19)$$

Ліва частина рівності (1.19) є виразом числа Рейнольдса для плівки, що стікає при $\rho_f > \rho_g$. Нестійкість проявляється у періодичному утворенні без будь-якої часової закономірності потужних хвиль, які швидко, з прискоренням збігають вниз по поверхні плівки, вкритої дрібнішими хвилями. Ці хвилі мають вигляд потовщень, профіль яких дещо нагадує профіль окремих крапель, що скочуються по поверхні віконного скла під час дощу. (Ці хвилі саме скочуються, тобто перекочуються по поверхні плівки, рухаючись подібно до гусениці трактора.)

Розглянемо цей же приклад для шорсткої похилої поверхні, по якій стікає турбулентна плівка. Визначимо умови нестійкої течії цієї плівки.

Згідно з (1.17) маємо $v_\omega = V_\omega - V>0$. Згідно з (1.16) із повідомлення 1 $V_\omega = \frac{2}{3}V$. Отже, нерівність (1.17) набуває вигляду $V/2>c$. З урахуванням (1.16) запишемо

$$\frac{V}{2} > (g\delta \sin\theta)^{1/2} \qquad (1.20)$$

або

$$\frac{V^2}{4} > g\delta \sin\theta\,. \qquad (1.21)$$

Розглянемо крайові умови. На поверхні похилої стінки діють сили опору $\tau_\omega = \frac{1}{2}c_f\rho V^2$ (згідно із законом Ньютона). У цьому разі сила опору, що припадає на одиницю об'єму плівки,

$$\frac{\tau_\omega}{\delta} = \frac{1}{2\delta}c_f\rho V^2\,, \qquad (1.22)$$

звідки

$$V^2 = \frac{(\tau_\omega/\delta)\cdot 2\delta}{c_f\rho}. \qquad (1.23)$$

Сила опору для стійкої течії плівки має зрівноважувати силу, яка діє на одиницю об'єму плівки, що стікає внаслідок власної ваги:

$$\frac{\tau_\omega}{\delta} = \rho g \cos\theta\,\cdot \qquad (1.24)$$

З урахуванням (1.23) і (1.24) із повідомлення 2

$$V^2 = 2g\delta\cos\theta/c_f. \qquad (1.25)$$

Підставляючи (1.25) у (1.21), знаходимо, що $\frac{\cos\theta}{2c_f} > \sin\theta$, тобто нестійкість стікання турбулентної плівки буде зумовлюватись нерівністю

$$\operatorname{ctg}\theta > 2c_f. \tag{1.26}$$

Рівняння (1.26) показує, що стійкість турбулентного стікання плівки буде визначатись кутом θ нахилу шорсткої пластини і коефіцієнтом тертя c_f.

Швидкість поширення динамічних хвиль (1.16) залежить від кута θ. Коли $\theta = 0$, то $c = 0$. Коли $\theta = 90^\circ$, то $c \to max$. Тому нерівність $c > v_\omega$ може бути досягнута при великих значеннях θ (див. рисунок). Максимум швидкості поширення неперервних хвиль (1.15), (1.17) досягається при великих значеннях θ.

Отже, стійка течія турбулентної плівки можлива тільки для майже горизонтальних пластин. Наприклад, якщо коефіцієнт тертя $c_f = 0{,}01$, то стійке стікання буде на пластині, що створює з вертикаллю кут $\theta = 89^\circ$.

Дослідимо стійкість поширення збурення з довжиною хвилі $\lambda = 2\pi n\delta$ у вертикальній плівці, що турбулентно стікає, де n — матеріальне хвильове число, яке пов'язане з довжиною хвилі λ співвідношенням $n = 2\pi/\lambda$.

Використаємо формулу (1.13). З урахуванням (1.9) із повідомлення 2 маємо, що на вертикальній поверхні $c = 0$, тоді

$$\omega^2 = \frac{B^2(v_\omega^2 - u^2)}{4u^2}. \tag{1.27}$$

Розв'язуючи це рівняння відносно швидкості поширення хвилі, дістанемо

$$u^2 = \frac{B^2 v_\omega^2}{B^2 + 4\omega^2}. \tag{1.28}$$

Колова частота коливань ω може бути подана як

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{u}{\lambda} \text{ або } \omega = \frac{u}{n\delta}. \tag{1.29}$$

Рівняння (1.28) з урахуванням (1.29) зведемо до вигляду

$$u^4 + \frac{B^2 n^2 \delta^2}{4} u^2 - \frac{B^2 n^2 \delta^2 v_\omega^2}{4} = 0, \tag{1.30}$$

звідки

$$u^2 = -\frac{B^2 n^2 \delta^2}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{B^2 n^2 \delta^2}{8}\right)^2 + \frac{B^2 n^2 \delta^2 v_\omega^2}{4}}.$$

Дійсне значення швидкості поширення хвилі збурень обчислимо за формулою

$$u^2 = \frac{B^2 n^2 \delta^2}{8}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16 v_\omega^2}{B^2 n^2 \delta^2}}\right). \tag{1.31}$$

Помноживши і поділивши (1.31) на $\left(1 + \sqrt{1 + \frac{16 v_\omega^2}{B^2 n^2 \delta^2}}\right)$, дістанемо

$$u^2 = \frac{2v_\omega^2}{\left(1+\sqrt{1+\frac{16v_\omega^2}{B^2n^2\delta^2}}\right)}. \tag{1.32}$$

або

$$u = \frac{\sqrt{2}\,v_\omega}{\left(1+\sqrt{1+\frac{16u^2}{B^2n^2\delta^2}}\right)^{1/2}}. \tag{1.33}$$

За виразом (1.9) визначимо величину $B = f_v/\rho$. Сила, що припадає на одиницю об'єму плівки, за виразом (1.22) $f = \frac{\tau_\omega}{\delta} = \frac{c_f\rho V^2}{2\delta}$, отже, поверхнева сила

$$f_v = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial V}\right)_v = \frac{c_f\rho V}{\delta}. \tag{1.34}$$

З урахуванням (1.34) величина

$$B = -c_f V/\delta\,. \tag{1.35}$$

Згідно з умовою $v_\omega = V_\omega - V$ для плівки, що стікає по поверхні, $V_\omega = \frac{3}{2}V$ за формулою (1.16) із повідомлення 1, тобто

$$v_\omega = V/2\,. \tag{1.36}$$

Підставимо (1.35) і (1.36) у (1.33):

$$u = \frac{V}{\left[2\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{c_f^2n^2}}\right)\right]^{1/2}}. \tag{1.37}$$

Доведемо, що при $c_f = 0{,}01$ і $n = 10$ течія плівки буде стійкою.

Дійсно, згідно з (1.37) відношення $\frac{V}{u} = \frac{2v_\omega}{u} = 3{,}02$, тобто $\frac{v_\omega}{u} = |\delta| > 1$. З цього випливає, що згідно з (1.12) матеріальна частина декремента згасання $\alpha < 0$. Хвилі збурень згасають, і турбулентна течія плівки по поверхні стійка.

2. Взаємодія динамічних і неперервних хвиль в одновимірних потоках двофазного нестисливого середовища

Розглянемо течію двофазного нестисливого середовища ρ = const у каналі постійного перерізу без фазових перетворень. У цьому разі рівняння нерозривності для фаз можна записати так:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+v_2\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\alpha\frac{\partial v_2}{\partial x}=0;$$

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial t}+v_1\frac{\partial\alpha}{\partial x}+(1-\alpha)\frac{\partial v_1}{\partial x}=0. \qquad (2.1)$$

Рівняння руху

$$\rho_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-\frac{dp}{dx}+b_1+f_1;$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=-\frac{dp}{dx}+b_2+f_2. \qquad (2.2)$$

Віднімаючи у (2.2) друге рівняння від першого, дістанемо:

$$\rho_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)-\rho_2\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)=(b_1-b_2)+(f_1-f_2). \qquad (2.3)$$

Праву частину (2.3) замінимо новою змінною силою

$$f=[(b_1-b_2)+(f_1-f_2)]. \qquad (2.4)$$

При цьому сила f є функцією швидкостей v_1, v_2 обох фаз, концентрації і її градієнта, а також інших похідних від швидкості або концентрації, тобто

$$f=\varphi\left(v_1;v_2;\alpha;\frac{\partial\alpha}{\partial x};\dots\right). \qquad (2.5)$$

Розглянемо малі збурення величин у стаціонарному потоці відносно незбурених значень швидкостей V_1, V_2, концентрації α_0 і змінної сили f. Позначимо ці збурення відповідно v'_1, v'_2, α', δf. Залишаючи у рівняннях (2.1) і (2.3) лише члени першого порядку мализни, перепишемо їх так:

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+V_2\frac{\partial\alpha'}{\partial x}+\alpha\frac{\partial v'_2}{\partial x}=0; \qquad (2.6)$$

$$-\frac{\partial\alpha'}{\partial t}-V_1\frac{\partial\alpha'}{\partial x}+(1-\alpha)\frac{\partial v'_1}{\partial x}=0; \qquad (2.7)$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial v'_1}{\partial t}+V_1\frac{\partial v'_1}{\partial x}\right)-\rho_2\left(\frac{\partial v'_2}{\partial t}+V_2\frac{\partial v'_2}{\partial x}\right)=-\delta f. \qquad (2.8)$$

Величини v'_1, v'_2 виключаємо із рівнянь (2.6) — (2.8). Для цього диференціюємо рівняння (2.8) за x і підставляємо вирази для інших похідних із (2.6) і (2.7):

$$\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2}\left(\frac{\rho_1}{1-\alpha}+\frac{\rho_2}{\alpha}\right)+2\frac{\partial^2\alpha'}{\partial x\partial t}\left(\frac{V_1\rho_1}{1-\alpha}+\frac{V_2\rho_2}{\alpha}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2\alpha'}{\partial x^2}\left(\frac{\rho_1 V_1^2}{1-\alpha}+\frac{\rho_2 V_2^2}{\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\delta f). \qquad (2.9)$$

Величина δf є сумою членів, що характеризують вклад збурень від кожної складової сили f у (2.5):

$$\delta f = f_\alpha \alpha' + f_{V_1} v_1' + f_{V_2} v_2' + f_{\nabla\alpha} \frac{\partial \alpha'}{\partial x}. \qquad (2.10)$$

Диференціюючи рівняння (2.10) за x і підставляючи вирази $\frac{\partial v_1'}{\partial x}, \frac{\partial v_2'}{\partial x}$ із (2.6) і (2.7) дістанемо:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta f) = \frac{\partial \alpha'}{\partial t}\left(\frac{f}{1-\alpha} - \frac{f v_2'}{\alpha}\right) + \frac{\partial \alpha'}{\partial x}\left(f_\alpha + \frac{V_1 f v_1'}{1-\alpha} - \frac{V_2 f v_2'}{\alpha}\right) + \\ + f_{\nabla\alpha} \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2}. \qquad (2.11)$$

Рівняння (2.11) можна привести у відповідність із загальною теорією неперервних хвиль, якщо подати f у вигляді функції швидкості однієї із фаз і зведеної швидкості суміші j. Тоді

$$f = \varphi_1(V_2, j, \alpha), \qquad (2.12)$$

де $j = (1-\alpha)V_1 + \alpha V_2$.

Похідні у рівнянні (2.11) можна визначити з урахуванням (2.12):

$$\begin{aligned} f_\alpha &= (V_2 - V_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial j} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}; \\ f_{v_2'} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2'} + \alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial j}; \\ f_{v_1'} &= (1-\alpha)\frac{\partial \varphi_1}{\partial j}. \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Підставимо (2.13) у (2.11):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta f) = -\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2'}\right) + \frac{\partial \alpha'}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} - \frac{V_2}{\alpha}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2'}\right) + \\ + f_{\nabla\alpha}\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2}, \qquad (2.14)$$

або

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta f) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2'}\left[\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + \frac{\partial \alpha'}{\partial x}\left(V_2 - \alpha \frac{\partial \varphi_1/\partial \alpha}{\partial \varphi_1/\partial v_2'}\right)\right] + \\ + f_{\nabla\alpha}\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial x^2}. \qquad (2.15)$$

Множник, на який множиться $\partial \alpha'/\partial x$ у (2.15), за допомогою (2.12) можна записати у вигляді

$$V_2 + \alpha\left(\frac{\partial V_2}{\partial\alpha}\right)_{j,f} = \frac{\partial}{\partial\alpha}(V_2,\alpha)_{j,f} = \left(\frac{\partial j_2}{\partial\alpha}\right)_{j,f}. \qquad (2.16)$$

Згідно з (3.3) із повідомлення 1 (2.16) — це швидкість неперервної хвилі у фазі 2. Рівняння (2.15) і (2.16) підставимо у (2.9). Після перетворень дістанемо

$$\frac{\partial^2\alpha'}{\partial t^2} + 2V_0\frac{\partial^2\alpha'}{\partial x\partial t} + A\frac{\partial^2\alpha'}{\partial x^2} + B\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t} + V_\omega\frac{\partial\alpha'}{\partial x}\right) = 0, \qquad (2.17)$$

де

$$V_0 = \frac{\rho_1 V_1/(1-\alpha) + \rho_2 V_2/\alpha}{\rho_0/(1-\alpha) + \rho_2/\alpha}. \qquad (2.18)$$

Тут V_0 — середньозважена швидкість виділеного об'єму двофазного потоку. Введені параметри A і B визначаються співвідношеннями

$$A = \frac{\rho_1 V_1^2/(1-\alpha) + \rho_2 V_2^2/\alpha + f_{V\alpha}}{\rho_1/(1-\alpha) + \rho_2/\alpha}; \qquad (2.19)$$

$$B = \frac{-f_{V_2}/\alpha + f_{V_1}/(1-\alpha)}{\rho_1/(1-\alpha) + \rho_2/\alpha}. \qquad (2.20)$$

Введемо малі збурення:

$$\alpha' = \alpha_0 e^{at + i\omega(t - x/u)}.$$

Швидкості хвиль u і V_ω виразимо через V_0:

$$u = V_0 + w, \qquad (2.21)$$

де w — швидкість хвилі відносно V_0;

$$V_\omega = V_0 + v_\omega. \qquad (2.22)$$

Введемо нову величину, яка ідентична квадрату швидкості динамічної хвилі:

$$C^2 = V_0^2 - A. \qquad (2.23)$$

Значення V_0 і A обчислимо згідно з (2.18) і (2.19).

Підставляючи α' у (2.17), після розділення дійсної та уявної частин і врахування (2.21), (2.22) та (2.23) дістанемо

$$a = \frac{B}{2}\left(\frac{v_\omega}{w} - 1\right); \qquad (2.24)$$

$$\omega^2 = \frac{B^2}{4}\frac{u^2}{w^2}\frac{v_\omega - w^2}{w^2 - c^2} \qquad (2.25)$$

Поставимо такі початкові умови: вважаємо, що у початковий момент часу t = 0 течія двофазного нестисливого середовища була стаціонарною, незбуреною з відповідними швидкостями V_1 і V_2 під дією тільки градієнта концентрації α — див. (1.1), (1.2) із повідомлення 2.

Запишемо рівняння нерозривності та руху. Згідно з (1.1), (2.1) і (2.3)

$$\begin{cases} V_2 \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \dfrac{\partial V_2}{\partial x} = 0; \\ V_1 \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + (1-\alpha) \dfrac{\partial V_1}{\partial x} = 0; \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\rho_1 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \rho_2 V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} = -f_{V\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}. \tag{2.27}$$

Після сумісного розв'язання рівнянь (2.26) і (2.27), дістанемо

$$\frac{\rho_1 V_1^2}{1-\alpha} + \frac{\rho_2 V_2^2}{\alpha} + f_{V\alpha} = 0.$$

Отже, за обраних початкових умов у (2.19) чисельник дорівнюватиме нулю, тобто A = 0. У цьому разі рівняння (2.24) і (2.25) можна записати так:

$$\alpha = \frac{B}{2}\left(\frac{V_\omega - u}{u - V_0}\right); \tag{2.28}$$

$$\omega^2 = \frac{B^2}{4}\left(\frac{u}{u - V_0}\right)^2 \left[\frac{(V_\omega - u)^2 - (u - V_0)^2}{u(u - 2V_0)}\right] \tag{2.29}$$

або

$$\omega^2 = \frac{B^2}{4}\left(\frac{u}{u - V_0}\right)^2 \left[\frac{(V_\omega^2 - u^2) - 2(V_\omega - u)V_0}{u(u - 2V_0)}\right]. \tag{2.30}$$

У рівнянні (2.28) складова B має бути від'ємною, оскільки вона характеризує сили, що "демпфірують" збурений стан системи, інакше окремі частинки потоку мали б нескінченно прискорюватись.

Отже, коли швидкість поширення динамічних хвиль u більша, ніж швидкість неперервних хвиль V_ω($u>V_\omega>V_0$), то хвилі, що рухаються у напрямку V_ω, будуть стійко посилюватись і поширюватись з коловою частотою ω — згідно з (2.29), (2.30). Якщо $V_\omega > u > V_0$, то динамічні хвилі не наздоганяють неперервні. В цьому разі відбувається стійке згасання динамічних хвиль, початкові збурення у шарі потоку зникають. Якщо $V_\omega = u$, то згідно з (2.28) і (2.30) $\alpha = 0$ і $\omega = 0$. Такий результат пояснюється тим, що коли неперервні й динамічні хвилі рухаються з однаковою швидкістю (сумісно), то порушується стаціонарність руху. Виникають прискорення, які неможливо врахувати у межах аналізу квазістаціонарної течії, що постулює баланс результуючих сил. Щоб урахувати дії прискорень, які виникають у цьому разі, треба вибрати інший механізм описання процесу. Здебільшого розглядають нестаціонарний процес, що пов'язаний з ефектом стисненості, який зумовлює "стрибки ущільнення" у шарі середовища.

Висновки. Аналізом результатів сумісного розв'язання диференціальних рівнянь нерозривності та руху встановлено умови згасання і посилення збурень, що виникають у разі взаємодії динамічних і неперервних хвиль. Для плівкової течії показано, що швидкість поширення динамічних хвиль залежить від кута нахилу поверхні, встановлено залежність між числом Рейнольдса і кутом нахилу поверхні пластин, перевищення якого призводить до виникнення нестійкої течії, досліджено швидкість поширення збурень залежно від довжини хвилі.

В одновимірних потоках двофазного нестисливого середовища, якщо швидкість динамічних хвиль перевищує швидкість неперервних, то хвилі будуть стійко посилюватись. Якщо ж динамічні хвилі відстають від неперервних, то вони згасають. У разі рівності швидкостей хвиль обох видів стаціонарність їхнього руху порушується.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вейнгарден Л.В. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Реология суспензий: Сб. статей. – М.: Мир, 1975.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гос. изд-во, технико-теоретической лит-ры, 1954.

3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1987.

4. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. – М.: Мир, 1972.