

519.8

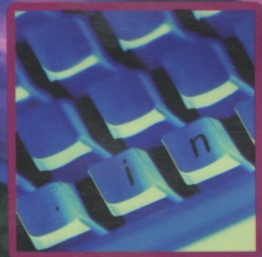
M29

М. А. Мартиненко

О. М. Нецадим

В. М. Сафонов

# Математичне ПРОГРАМУВАННЯ



УДК 519.85

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України  
(лист № 1.4/18-Г-2816 від 24.12.2008 р.)*

**Рецензенти:** д-р фіз.-мат. наук, проф. **М.М. Семко** (Національний університет державної податкової служби України); д-р техн. наук, проф. **В.П. Легеза** (Національний університет біоресурсів і природокористування); д-р техн. наук, проф. **Т.І. Олешко** (Національний авіаційний університет)

**Мартиненко М.А., Нецадим О.М., Сафонов В.М.**  
Математичне програмування: Підручник. — К.: НУХТ, 2010. — 311 с.: іл.

ISBN 978-966-612-096-3

Викладено основні розділи математичного програмування: основи лінійної алгебри, лінійне, нелінійне, дискретне, динамічне програмування, теорію ігор. Теоретичний матеріал подано у вигляді лекцій, які супроводжуються детальним розв'язуванням типових прикладів і задач. Після кожної лекції наведено завдання для опрацювання і самопідготовки.

Для студентів вищих навчальних закладів.

**УДК 519.85**

ISBN 978-966-612-096-3

© М.А. Мартиненко,  
О.М. Нецадим,  
В.М. Сафонов, 2010  
© НУХТ, 2010

## ПЕРЕДМОВА

В умовах ринкової економіки особливої актуальності набувають задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів (праці, сировини, обладнання, капіталу), організації виробництва та реалізації продукції. Раціональне вирішення цих проблем неможливе без використання методів математичного програмування та комп'ютерної техніки. Математичне програмування — розділ прикладної математики, який застосовує математичні моделі та методи для дослідження і розв'язування екстремальних математичних задач. Дисципліна «Математичне програмування» як складова курсу «Математика для економістів» входить до навчальних планів підготовки бакалаврів з економіки та підприємництва. Теоретичною основою цієї дисципліни є лінійна алгебра.

У цьому підручнику розглянуто методи розв'язування задач лінійного, нелінійного, дискретного, динамічного програмування, задач теорії ігор. Теоретичні обґрунтування і доведення цих методів подаються в стислому вигляді. Широко використовуються матрично-векторні позначення, що значно спрощує викладки. Наведено детальні розв'язування типових задач. Підібрано значну частину задач і вправ для практичних занять і самостійного опрацювання. Більшість завдань має умовний характер, а числові параметри підібрано так, щоб спростити обчислення. Розв'язування цих задач — важлива умова опанування студентами стаціонарної або заочної форми навчання теоретичних положень дисципліни.

Автори сподіваються, що в умовах обмеженості аудиторних годин для вивчення математичних дисциплін підручник сприятиме підготовці висококваліфікованих фахівців з економіки, спроможних приймати виважені та обґрунтовані рішення в бізнесі.

Підручник написаний авторами на основі багаторічного досвіду читання курсу лекцій і проведення практичних занять з дисципліни «Математичне програмування» в Національному університеті харчових технологій та інших навчальних закладах України.

## ЧАСТИНА

# 1

## ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

### Лекція 1. ВИЗНАЧНИКИ

#### Історична довідка. Визначники та їхні властивості

##### 1.1. Історична довідка

Лінійна алгебра як самостійна галузь математики почала формуватися у першій половині XVIII ст., коли вперше у працях німецького математика В. Лейбніца (1646—1716) та швейцарського математика Г. Крамера (1704—1752) було введено поняття «визначник» (детермінанта) і дано загальні формули для розв'язування системи  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими.

У середині XIX ст. у класичних працях англійських математиків А. Келі (1821—1895) і Дж. Сільвестра (1814—1897) вводиться поняття «матриця» та закладаються основи матричного числення, що стає зручним апаратом для компактного запису і подальшого аналізу систем лінійних рівнянь. Ідея геометричної інтерпретації розв'язку і дослідження таких систем приводить до основного поняття лінійної алгебри — скінченновимірного векторного (лінійного) простору, що є безпосереднім узагальненням інтуїтивних дво- та тривимірної геометрій. Наведені поняття «визначник», «матриця», «лінійний простір» визначаються в найбільш загальній, абстрактній формі, стають об'єктом математичного дослідження.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \quad (i, j = \overline{1,3}). \quad (1.3)$$

Формулу (1.3), яка доводиться безпосередньо і відома як *розкладання Лапласа*, використовують для обчислення визначників.

#### Приклад 1.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -8 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -26.$$

Тут розклали визначник за елементами першого рядка.

Той факт, що визначник дорівнює сумі добутоків елементів будь-якого рядка або стовпця на їхні алгебраїчні доповнення, дає змогу індуктивно ввести означення визначника довільного порядку.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j},$$

де  $i, j = \overline{1,4}$  і  $A_{ij}$  — алгебраїчні доповнення елементів  $a_{ij}$ , називається визначником четвертого порядку.

Отже, визначник четвертого порядку виражається через визначники третього порядку, причому алгебраїчні доповнення його елементів визначаються так само, як і для визначників другого та третього порядків. Аналогічно дають означення визначника  $n$ -го порядку через визначники четвертого порядку і т. д. Таким чином, вважаючи, що встановлено поняття визначника  $(n-1)$ -го порядку, вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} \quad (i, j = \overline{1, n})$$

називається визначником  $n$ -го порядку.

Визначники мають такі властивості:

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями.

Зауважимо, що оскільки наведена властивість встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника, то всі подальші його властивості формулюються лише для рядків, маючи на увазі, що вони одночасно є справедливими також для стовпців.

2. Якщо переставити місцями будь-які два рядки, то визначник змінює знак.

3. Якщо один із рядків складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.

4. Якщо визначник має два однакових рядки, то він дорівнює нулю.

5. Спільний множник усіх елементів одного рядка можна вивести за знак визначника.

6. Якщо елементи двох рядків пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо кожний елемент  $i$ -го рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у першого з яких  $i$ -й рядок складається з перших доданків, а у другого — з других, інші ж елементи обох визначників однакові.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те саме число.

9. Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю.

Зазначимо, що всі властивості визначників доводяться безпосередньою перевіркою.

Зауважимо, що при обчисленні визначника на практиці за допомогою цих властивостей перетворюють його так, щоб у де-

якому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, були нулями, а потім розкладають його за елементами цього рядка чи стовпця.

### Приклад 1.5.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) + \\ &\quad + 2 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = -8, \end{aligned}$$

де у першому рядку перетворили всі елементи, крім першого, на нулі, додаючи перший стовпець до третього, а до четвертого — перший, помножений на 2, та розклали визначник четвертого порядку за елементами першого рядка, а потім визначник третього порядку — за елементами другого стовпця.

### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку, третього порядку?
2. Що називається мінором, алгебраїчним доповненням?
3. Сформулюйте основні властивості визначників.
4. Як обчислюються визначники вищих порядків?

## Практичне заняття № 1 ВИЗНАЧНИКИ

№ 1.1. Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$ .

**Розв'язання.** За формулою (1.1) маємо

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - (-\sin \alpha) \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$



№ 1.2. Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$ .

Відповідь: 0.

№ 1.3. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

**Розв'язання.** За правилом Сарюса маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \cdot 3 = 40,$$

оскільки

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 3 & i & 5 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 & & 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{array}$$

№ 1.4. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

Відповідь: 0.

№ 1.5. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

**Розв'язання.** Віднявши почленно перший стовпець від усіх інших та після цього розклавши за елементами першого рядка, дістанемо

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \\ = -2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

№ 1.6. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: -3.

У № 1.7 — 1.11 розв'язати рівняння і нерівності.

$$\text{№ 1.7. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & -x \\ -x & 2x & 1 \end{vmatrix} - 14 = 0. \quad \text{№ 1.8. } \begin{vmatrix} (0,5)^{x^2+6} & 0,5 \\ 0,0625 & 2^{-2x} \end{vmatrix} = 0.$$

Відповідь:  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = \frac{3}{2}$ .      Відповідь:  $x = -1$ .

$$\text{№ 1.9. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ x^2 & -4 & x^4 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} < 0. \quad \text{№ 1.10. } \begin{vmatrix} |x+1| & 2 \\ 1 & \frac{1}{x-2} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Відповідь:  $x \in (-2; -1) \cup (1; 2)$ .      Відповідь:  $x \in (2; 5)$ .

$$\text{№ 1.11. } \begin{vmatrix} 4 \sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$

Відповідь:  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$

У № 1.12—1.17 обчислити визначники.

$$\text{№ 1.12. } \begin{vmatrix} -a & 1 & a \\ 0 & -a & 1 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix}.$$

**Відповідь:**  $2a$ .

$$\text{№ 1.14. } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 17 & -23 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Відповідь:**  $-6$ .

$$\text{№ 1.16. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

**Відповідь:**  $6$ .

$$\text{№ 1.13. } \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -\sqrt{3} & 5 & \sqrt{3} \end{vmatrix}.$$

**Відповідь:**  $-12$ .

$$\text{№ 1.15. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

**Відповідь:**  $0$ .

$$\text{№ 1.17. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Відповідь:**  $-7$ .

## ЗМІСТ

Передмова.....	3
Частина 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.....	5
<b>Лекція 1. Визначники</b> .....	5
1.1. Історична довідка.....	5
1.2. Визначники та їхні властивості.....	6
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	10
Практичне заняття № 1. Визначники.....	10
<b>Лекція 2. Матриці</b> .....	13
2.1. Матриці та дії над ними.....	13
2.2. Обернена матриця.....	17
2.3. Ранг матриці.....	18
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	20
Практичне заняття № 2. Матриці.....	20
<b>Лекція 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь</b> .....	26
3.1. Формули Крамера.....	26
3.2. Матричний спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь.....	29
3.3. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь.....	31
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	32
Практичне заняття № 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	33
<b>Лекція 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (продовження)</b> .....	42
4.1. Метод послідовного виключення невідомих.....	42
4.2. Метод Жордана — Гаусса.....	44
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	48
Практичне заняття № 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (продовження).....	48
<b>Лекція 5. Лінійні простори</b> .....	53
5.1. Багатовимірні вектори. Лінійна залежність і незалежність системи векторів.....	53
5.2. Ранг і базис системи векторів.....	56
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	58
Практичне заняття № 5. Лінійні простори.....	59
<b>Лекція 6. Лінійні простори (продовження)</b> .....	62
6.1. $n$ -Вимірний лінійний простір.....	62

6.2. Перехід до нового базису.....	65
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	68
Практичне заняття № 6. Лінійні простори (продовження).....	68
Частина 2. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	73
<b>Лекція 7. Постановка задач математичного програмування</b> .....	73
7.1. Класифікація задач математичного програмування.....	73
7.2. Моделі задач лінійного програмування.....	75
7.3. Різні форми запису задач лінійного програмування.....	79
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	82
Практичне заняття № 7. Моделі задач лінійного програмування	83
<b>Лекція 8. Властивості розв'язків задач лінійного програмування</b> .....	95
8.1. Основні властивості розв'язків задач лінійного програмування.....	95
8.2. Геометрична інтерпретація і графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	100
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	104
Практичне заняття № 8. Графічний спосіб розв'язування задач лінійного програмування.....	105
<b>Лекція 9. Симплекс-метод</b> .....	112
9.1. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	112
9.2. Алгоритм симплекс-методу.....	117
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	120
Практичне заняття № 9. Симплекс-метод.....	121
<b>Лекція 10. Метод штучного базису</b> .....	125
10.1. Вибір початкового допустимого базисного розв'язку....	125
10.2. М-метод.....	127
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	131
Практичне заняття № 10. Метод штучного базису.....	131
<b>Лекція 11. Двоїстість у лінійному програмуванні</b> .....	137
11.1. Двоїсті задачі.....	137
11.2. Економічне трактування двоїстих задач.....	141
11.3. Теореми двоїстості.....	141
11.4. Двоїстий симплекс-метод.....	147
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	150

Практичне заняття № 11. Двоїстість у лінійному програмуванні.....	150
<b>Лекція 12. Транспортна задача</b> .....	164
12.1. Властивості транспортної задачі.....	164
12.2. Побудова початкового опорного плану.....	168
12.3. Метод потенціалів.....	172
12.4. Відкрита модель транспортної задачі.....	175
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	176
Практичне заняття № 12. Транспортна задача.....	177
<b>Лекція 13. Дискретне програмування</b> .....	194
13.1. Моделі задач цілочислового лінійного програмування... 194	
13.2. Метод відтинання.....	197
13.3. Метод гілок і меж.....	204
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	210
Практичне заняття № 13. Цілочислові задачі лінійного програмування.....	210
<b>Лекція 14. Нелінійне програмування</b> .....	219
14.1. Загальна задача нелінійного програмування.....	219
14.2. Класична задача нелінійного програмування.....	221
14.3. Опуклі і вгнуті функції.....	223
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	226
Практичне заняття № 14. Нелінійне програмування.....	227
<b>Лекція 15. Нелінійне програмування (продовження)</b> .....	233
15.1. Задача опуклого програмування.....	233
15.2. Задача квадратичного програмування.....	238
15.3. Градієнтні методи.....	241
15.4. Методи нульового порядку.....	243
15.5. Метод штрафних функцій.....	244
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	245
Практичне заняття № 15. Нелінійне програмування (продовження).....	245
<b>Лекція 16. Динамічне програмування</b> .....	251
16.1. Загальна характеристика задач динамічного програмування.....	251
16.2. Економічна інтерпретація задач динамічного програмування.....	252
16.3. Обчислювальні методи динамічного програмування.....	254
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> .....	257

Практичне заняття № 16. Динамічне програмування.....	257
<b>Лекція 17. Елементи теорії ігор.....</b>	<b>264</b>
17.1. Термінологія і класифікація ігор.....	264
17.2. Антагоністичні матричні ігри.....	265
17.3. Мішані стратегії та їхні властивості.....	271
17.4. Методи розв'язування матричних ігор.....	273
17.5. Графічний метод розв'язування матричних ігор порядку $2 \times n$ та $m \times 2$ .....	277
<i>Запитання і завдання для самоконтролю.....</i>	<i>280</i>
Практичне заняття № 17. Матричні ігри.....	281
<b>Лекція 18. Елементи теорії ігор (продовження).....</b>	<b>285</b>
18.1. Наближений метод розв'язування матричних ігор.....	285
18.2. Статистичні ігри.....	290
<i>Запитання і завдання для самоконтролю.....</i>	<i>294</i>
Практичне заняття № 18. Матричні ігри (продовження).....	294
Література.....	301
Предметний покажчик.....	303