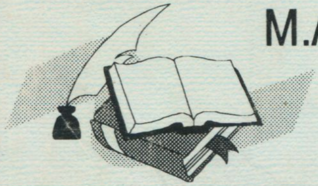
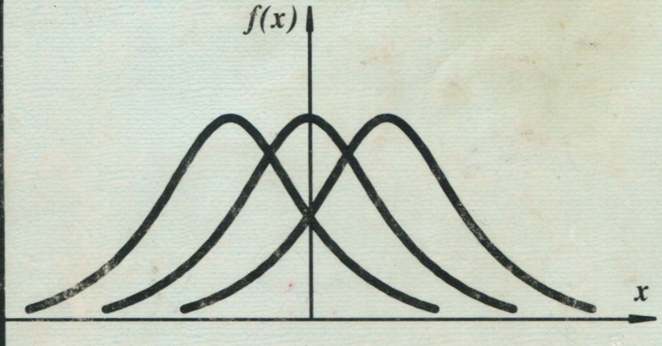
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ



М.А.Мартиненко
Р.К.Клименко
І.В.Лебедєва

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ



Київ
УДУХТ
1999

УДК 519.21

А в т о р и : *М.А.Мартиненко, Р.К.Клименко, І.В.Лебедєва*

Р е ц е н з е н т и: кафедра вищої математики Київського державного торгівельно-економічного університету

Теорія ймовірностей. Конспект лекцій і практичних занять: Навч. посібник / М.А.Мартиненко, Р.К.Клименко, І.В.Лебедєва. – К. : Видавництво Українського державного університету харчових технологій., 1999 – 244 с.: іл.
ISBN 5–7763–2383–5.

Навчальний посібник написано авторами на основі багаторічного досвіду, якого вони набули при читанні курсу лекцій «Теорія ймовірностей» і проведенні практичних занять в Українському державному університеті харчових технологій та інших навчальних закладах України.

Теоретичний матеріал посібника відповідає програмі курсу «Теорія ймовірностей» у технічному університеті, а практичні заняття побудовано на спеціально підібраних задачах, які, в основному, мають технологічну та економічну спрямованість.

Для студентів технічних, технологічних і економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ISBN 5–7763–2383–5.

Передмова.

Предметом теорії ймовірностей є вивчення ймовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій. Виникнення цієї дисципліни відноситься до XVII століття і пов'язується з комбінаторними задачами азартних ігор. У кінці минулого століття виникли серйозні запити з боку природознавства, які й привели до інтенсивного розвитку теорії ймовірностей як самостійного розділу математики. Сьогодні методи теорії ймовірностей знайшли широке застосування в різних галузях науки і техніки: в теорії надійності, теорії масового обслуговування, теорії похибок спостереження, теорії автоматичного управління, при плануванні і організації виробництва, аналізі технологічних процесів, контролі якості продукції та для інших цілей. Сказане обумовлює необхідність вивчення теорії ймовірностей в технічних і технологічних ВУЗ'ах.

При підготовці даної методичної розробки автори намагалися створити такий навчальний посібник для студентів, що містив би одночасно основні теоретичні положення теорії ймовірностей, методи розв'язування конкретних прикладів і достатню кількість задач для домашньої самостійної роботи.

Якщо зміст конспекту лекцій відображає загально-прийнятий підхід до вибору теоретичного матеріалу відповідно до програм технічного університету, то, компонуючи практичні заняття, автори виходили з тих міркувань, щоб наведені задачі були відносно простими, доступними для студентів, логічно доповнювали та поглиблювали знання теоретичних положень, а, найголовніше, щоб вони мали фахову направленість. Детальні пояснення до значної кількості спеціально підібраних задач і аналіз відповідей у цій роботі приведено для того, щоб виробити у студентів навики і вселити в них впевненість при розв'язуванні подібних задач.

На думку авторів, проста, доступна, полегшена форма подання теоретичного і практичного матеріалу курсу теорії ймовірностей у даній методичній роботі дає всі підстави для надії, що кожний студент стаціонарної або заочної форми навчання зможе самостійно засвоїти основи теорії ймовірностей тільки за цим замкненим методичним посібником без залучення допоміжної літератури і без зайвої витрати дорогоцінного часу.

Сама ідея зробити все, щоб надати студентам суттєву допомогу при вивченні цього непростого розділу вищої математики, і спонукала авторів до написання даного конспекту лекцій і практичних занять.

Автори.

Частина I. Випадкові події. Основні теореми теорії ймовірностей.

Лекція 1. Елементи комбінаторики.

1.1. Коротка історична довідка.

Виникнення теорії ймовірностей, спричинене комбінаторними задачами азартних ігор і обумовлене спробою їх теоретичного обґрунтування, відноситься до XVI-XVII ст. і пов'язане з іменами Дж. Кардано, Б. Паскаля, Х. Гюйгенса, П. Ферма. Найістотнішим досягненням цього періоду є відкриття Я. Бернуллі закону великих чисел. Другий період розвитку теорії ймовірностей відноситься до XVIII-XIX ст. і пов'язаний з іменами Лапласа, Гаусса, Муавра, Пуассона, Буняковського та інших. Проте, як математична наука, теорія ймовірностей сформувалася на межі XIX-XX ст. завдяки працям П. Л. Чебишова, О. М. Ляпунова, О. О. Маркова, Р. Мізеса.

Подальшим розвитком теорія ймовірностей зобов'язана фундаментальним дослідженням російських та українських вчених: О. М. Колмогорова, С. М. Бернштейна, Б. В. Гніденка, О. Я. Хінчина, А. В. Скорохода, В. С. Королюка та інших.

В основі розповсюдженого теоретико-множинного методу викладання теорії ймовірностей лежить припущення, що кожному досліду поставлено у відповідність деяку множину Ω, елементи якої дають повну інформацію про його можливі результати. Тому нагадаємо деякі відомості про такі множини та операції над ними.

1.2 Скінченні множини та операції над ними.

Всяка сукупність довільних елементів утворює множину. Множина визначена, якщо відомі всі її елементи. Множина, що має скінченну кількість елементів, називається скінченною.

Введемо основні позначення. Множини позначатимемо великими латинськими літерами: A, B, C, ..., а їх елементи - малими: a, b, c, ... Кількість елементів множини A позначатимемо через $N(A)$.

Означення 1. *Дві множини рівні між собою, якщо всі елементи першої є елементами другої і, навпаки, всі елементи другої є елементами першої.*

Означення 2. *Сумою або об'єднанням множин* A *і* B *називається* *множина* $C = A + B$ $(C = A \bigcup B)$, *яка складається лише з тих елементів, що належать принаймні одній із множин* A *і* B.

Приклад 1. Нехай $A = \{1;2;3\}$, $B = \{2;3;4\}$. Тоді $A + B = \{1;2;3;4\}$.

Означення 3. *Множина* C, *якій належать ті і тільки ті елементи, що є спільними для множин* A *і* B, *називається добутком або перерізом множин* A *і* B *і позначається* $C = AB$ $(C = A \bigcap B)$.

Приклад 2. Розглянемо A і B з попереднього прикладу. Тоді $AB = \{2;3\}$.

Означення 4. *Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається* $\varnothing$.

Очевидно, якщо множини A і B не мають спільних елементів, то $AB = \varnothing$. Кількість елементів множини, що є сумою двох множин A і B, обчислюють за формулою:

$$N(A + B) = N(A) + N(B) - N(AB). \tag{1}$$

Приклад 3. Кожний студент групи - або дівчина, або блондин, або любить математику. В групі 20 дівчат, з них 12 блондинок, одна блондинка любить математику. Всього у групі 24 блондина, математику з них любить 12, а всього люблять математику 17 студентів, з них 6 дівчат. Скільки студентів у групі?

Розв'язання. Нехай A - множина дівчат, B - блондинів, C - люблять математику. Тоді $N(A + B + C)$ шукане число. Очевидно, AB - множина блондинок, AC - множина дівчат, що люблять математику, BC - множина студентів, що люблять математику, ABC - множина блондинок, що люблять математику. Отже,

$$N(A + B + C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(AB) - N(AC) -$$
$$- N(BC) + N(ABC) = 20 + 24 + 17 - (12 + 6 + 12) + 1 = 32.$$

1.3. Предмет комбінаторики. Основні принципи комбінаторики.

Комбінаторика - це розділ математики, в якому вивчають розташування та вибір об'єктів за певними правилами і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна здійснити.

Перші теоретичні дослідження проблем комбінаторики були зроблені у XVII ст. Б. Паскалем, П. Ферма, Г. Лейбніцем, а у XVIII ст. Я. Бернуллі, Л. Ейлером. Але лише у наш час у зв'язку з розвитком теорії обчислювальних машин, теорії інформації та дискретної математики комбінаторика по-справжньому стала математичною наукою. Зокрема, її методи відіграють важливу роль при розв'язуванні задач теорії ймовірностей.

Значне число формул і теорем комбінаторики грунтується на двох основних принципах.

<u>Принцип суми</u>. Якщо множина A містить $N(A) = n$ елементів, множина B - $N(B) = m$ елементів, а $AB = \varnothing$, тоді множина $A + B$ містить $N(A + B) = n + m$ елементів.

Доведення зразу випливає з рівності (1).

<u>Зауваження 1</u>. Принцип суми має місце для будь-якого скінченного числа множин.

<u>Принцип добутку</u>. Нехай потрібно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу - n_2 способами, третю - n_3 способами і так до k-ої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами.

<u>Приклад 4</u>. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

а) жодна з цифр не повторюється; б) цифри можуть повторюватися; в) числа повинні бути непарними (цифри можуть повторюватись)?

<u>Розв'язання</u>. а) Першою цифрою можуть бути цифри 1, 2, 3, 4, 5, тобто існує 5 способів її вибору. Якщо перша вибрана, то друга цифра може бути вибрана - 5 способами, третя - 4 способами, четверта - 3 способами. Отже, згідно з принципом добутку, загальне число способів дорівнює: $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$.

б) Першою цифрою може бути одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5 (5 способів), для кожної з наступних цифр існує 6 способів (0, 1, 2, 3, 4, 5). Отже, кількість шуканих чисел дорівнює $5 \times 6 \times 6 \times 6 = 1080$.

в) Першою може бути одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5, а останньою - одна з цифр 1, 3, 5. Отже, загальна кількість непарних чисел дорівнює $5 \times 6 \times 6 \times 3 = 540$.

1.4. Упорядковані множини. Сполуки без повторень.

Означення 5. *Множина називається упорядкованою, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке натуральне число (номер елемента) так, що різним елементам відповідають різні числа.*

Упорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

Означення 6. *Підмножини, складені з будь-яких елементів даної множини, які відрізняються елементами або порядком цих елементів, називаються сполуками.*

Приклад 5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 можна скласти багато різних сполук по 2, 3, 4, 5 цифр. Наприклад, 12, 21, 123, 1234, ... Серед цих сполук є такі, що відрізняються кількістю цифр (12, 123, 1234 , ...) або їх порядком (12, 21).

Сполуки бувають трьох видів: розміщення, перестановки, сполучення (комбінації).

Означення 7. ***Розміщеннями з n елементів по k $(k \le n)$ називають такі упорядковані сполуки, які складаються з k елементів, взятих із даних n елементів і відрізняються одна від другої елементами або їх порядком.***

Число розміщень з n елементів по k позначається A_n^k і обчислюється за формулою

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2)$$

Зауваження 2. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,\ 0! = 1$.

Приклад 6. Скількома способами можна розсадити 4 студентів на 25 стільцях ?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює A_{25}^4:

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600 .$$

Означення 8. ***Розміщення з n елементів по n називаються перестановками.***

Число перестановок із n елементів позначається через P_n і обчислюється за формулою

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad (3)$$

Зауваження 3. Різні перестановки з n елементів відрізняються лише порядком елементів.

Приклад 7. Скількома способами можна розмістити на книжковій полиці чотири томи математичної енциклопедії?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу способів упорядкування множини, що містить чотири елементи, тобто $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

***Означення 9**. Сполученнями (комбінаціями) із n елементів по k називаються сполуки, що містять k елементів, взятих із даних n елементів, і які відрізняються хоча б одним елементом. Число сполучень із n елементів по k позначається через C_n^k і обчислюється за формулою*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (4)$$

Зауваження 4. Із означення сполучень випливає, що сполучення отримують із розміщень, вилучивши сполуки, які відрізняються лише порядком елементів, тобто перестановки.

Зауваження 5. Мають місце рівності:

а) $C_n^k = C_n^{n-k}$; б) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$; в) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Приклад 8. Скількома способами можна вибрати 3 книги з 7?

Розв'язання. Шукане число дорівнює C_7^3 :

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \ .$$

1.5. Сполуки з повтореннями.

***Означення 10**. Розміщенням з повтореннями із n елементів по k називається будь-яка упорядкована сполука, що містить k елементів, взятих із даних n елементів, серед яких є однакові.*

Число всіх розміщень із повтореннями з n елементів по k позначається через $\overline{A}_n^k$ і обчислюється за формулою

$$\overline{A}_n^k = n^k \ . \qquad (5)$$

Приклад 9. Автомобільний номер складається з трьох букв та чотирьох цифр. Знайти кількість усіх можливих номерів, якщо використовуються 32 літери української абетки?

Розв'язання. Оскільки літери і цифри в номері можуть повторюватися, то за правилом добутку шукане число дорівнює:

$$\overline{A}_{32}^{3}\,\overline{A}_{10}^{4}=32^{3}\cdot 10^{4}=327680000\,.$$

***Означення 11**. Перестановкою з повтореннями із n елементів називається будь-яке упорядкування множини з n елементів, серед яких є однакові.*

Якщо серед n елементів множини є n_1 елементів 1-го типу, n_2 елементів 2-го типу, ..., n_k елементів k-го типу $\left(n_1+n_2+\ldots+n_k=n\right)$, то число всіх перестановок такої множини позначається через $P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_k\right)$ і обчислюється за формулою

$$P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_k\right)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}\,. \qquad (6)$$

Приклад 10. Скільки різних "слів" (у тому числі беззмістовних) можна утворити з слова "математика"?

Розв'язання. Очевидно, це число є

$$P_{10}\left(2;\,3;\,2;\,1;\,1;\,1\right)=\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=151200.$$

***Означення 12**. Сполученням з повтореннями із n елементів по k називається сполука, що містить k елементів взятих із даних n елементів, серед яких є однакові.*

Число всіх комбінацій із повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{C}_n^k$ і обчислюється за формулою

$$\overline{C}_n^k=C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}\,. \qquad (7)$$

Приклад 11. Скількома способами можна купити 8 тістечок в кондитерській, де є 6 їх різних видів?

Розв'язання. Шукане число дорівнює

$$\overline{C}_6^8=C_{13}^8=C_{13}^5=\frac{13!}{5!8!}=1287\,.$$

Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте основні принципи комбінаторики (суми і добутку).
2. Які сполуки називаються розміщеннями із n елементів по k $(k \le n)$? Наведіть формулу для обчислення їх числа і дайте приклади розміщень.
3. Які сполуки називаються перестановками? Наведіть формулу їх числа із n елементів і дайте приклади перестановок.
4. Які сполуки називаються сполученнями (комбінаціями) із n елементів по k $(k \le n)$? Наведіть формулу їх числа і дайте приклади сполучень.
5. Який зв'язок існує між розміщеннями, перестановками і сполученнями? Наведіть відповідну формулу.
6. Назвіть основні властивості сполучень.
7. Що таке сполуки з повтореннями? Дайте означення і наведіть відповідні формули для обчислення їх числа із n елементів по k.

Практичне заняття № 1.

Елементи комбінаторики.

№ 1.1. У групі 25 студентів. Скільки існує можливостей вибрати старосту і профорга за умови, що кожний студент може виконувати лише одне з цих доручень?

Розв'язання. Доручення старости може виконувати кожний з 25 студентів (25 можливостей). Після цього профоргом може стати один з 24 студентів (24 можливості). Отже, загальна кількість можливостей вибору старости та профорга дорівнює: $A_{25}^2 = 25 \cdot 24 = 600$.

№ 1.2. Студенти вивчають 8 дисциплін. Скільки існує способів складання розкладу занять на п'ятницю, якщо в цей день тижня повинні бути три різні пари?

Розв'язання. На першу пару можна поставити будь-яку з 8 дисциплін, на другу - одну з 7 дисциплін, що залишились, а на третю - одну з 6 дисциплін. Таким чином, число способів скласти розклад є: $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Зауважимо, що тут розглядаються сполуки з 8 елементів по 3, які можуть відрізнятися або елементами, або їх порядком.

№ 1.3. Скільки треба мати словників, щоб можна було робити переклади з будь-якої із п'яти іноземних мов на будь-яку іншу з них?

(*Відповідь.* $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.)

№ 1.4. На секції математики студентської наукової конференції побажали виступити з доповідями чотири студенти. Скількома способами їх можна розмістити в програмі, якщо їх доповіді повинні бути поруч?

Розв'язання. Очевидно, це $A_4^4 = P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

№ 1.5. Скількома способами можна розмістити 10 студентів за круглим столом? (*Відповідь.* $P_9 = 9!$.)

№ 1.6. Групу студентів повинна екзаменувати з математики комісія з двох викладачів. Скількома способами може бути складена екзаменаційна комісія, якщо на кафедрі 5 викладачів математики?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює:

$$C_5^2 = \frac{A_5^2}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10.$$

№ 1.7. На п'ять співробітників хімічної лабораторії виділено три оздоровчі путівки. Скількома способами їх можна розділити, якщо: а) всі путівки різні; б) всі путівки однакові? (*Відповідь.* а) $A_5^3 = 60$; б) $C_5^3 = 10$.)

№ 1.8. Скількома способами можна відібрати 5 студентів для роботи в математичному гуртку, якщо у підгрупі 13 студентів? (*Відповідь.* $C_{13}^5 = 1287$.)

№ 1.9. Скільки є трьохзначних чисел, які можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 і які діляться на 5? (*Відповідь.* 60.)

№ 1.10. Скільки існує способів вибору на чергування двох студентів з двох груп чисельністю 23 і 20 студентів? (*Відповідь.* $23 \cdot 20 = 460$.)

№ 1.11. Скількома способами можна відібрати одного студента на олімпіаду з математики із двох груп, що складаються з 23 та 20 студентів? (*Відповідь.* 23+20=43.)

№ 1.12. В турнірі брали участь 10 шахістів, і кожні 2 з них зустрічалися один раз. Скільки шахових партій зіграно в турнірі? (*Відповідь.* $C_{10}^2 = 45$.)

№ 1.13. Група студентів вивчає сім учбових дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять у понеділок, якщо у цей день тижня повинно бути 4 різних заняття?

(*Відповідь.* $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.)

№ 1.14. Скільки шестизначних чисел, кратних п'яти, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 за умови, що у числі цифри не повторюються? (*Відповідь.* $P_5 = 5! = 120$.)

№ 1.15. Скільки матчів буде зіграно у футбольному чемпіонаті за участю 16 команд, якщо кожні дві команди зустрічаються між собою один раз?

(*Відповідь.* $C_{16}^2 = \dfrac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120$.)

№ 1.16. Скільки дев'ятизначних чисел можна написати дев'ятьма цифрами? (*Відповідь.* $P_9 = 9!$.)

№ 1.17. Скількома способами можна посадити дванадцять осіб за столом, на якому стоїть дванадцять приборів? (*Відповідь.* $P_{12} = 12! \approx 4{,}65 \cdot 10^8$.)

№ 1.18. З десяти кандидатів на одну й ту ж посаду слід вибрати трьох. Скільки може бути різних випадків обрання? (*Відповідь.* $C_{10}^3 = 120$.)

№ 1.19. Скількома способами можна вибрати 13 карт з колоди у 52 карти? (*Відповідь.* C_{52}^{13} .)

№ 1.20. Скільки можна утворити цілих чисел, з яких кожне записувалося б трьома різними значущими цифрами?

(*Відповідь.* $A_9^3 = 504$.)

№ 1.21. Скільки можна утворити цілих чисел, з яких кожне записувалося б трьома різними цифрами? (*Відповідь.* $A_{10}^3 - A_9^2 = 720 - 72 = 648$, або $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.)

№ 1.22. 5 студентів повинні сидіти за одним столом в лабораторії. Скількома способами можна їх посадити за столом? (*Відповідь.* $P_5 = 5! = 120$.)

№ 1.23. У лабораторії 38 студентів. З них 6 слід посадити за 1-й стіл. Скільки усіх випадків може бути, якщо не зважати на порядок розташування студентів за столом.

(*Відповідь.* $C_{38}^6 = C_{38}^{32} = 2760681$.)

№ 1.24. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох осіб для чергування, якщо: а) один з них має бути старшим; б) старшого не повинно бути?

(*Відповідь.* а) $A_{30}^{2} = 30 \cdot 29 = 870$; б) $C_{30}^{2} = 432$.)

№ 1.25. У взводі 3 сержанти і 30 солдатів. Скількома способами можна виділити одного сержанта і трьох солдатів для патрулювання? (*Відповідь.* $C_{3}^{1} \cdot C_{30}^{3} = 3 \cdot 4060 = 12180$.)

№ 1.26. Скількома способами можна присудити 1-е, 2-е і 3-є місця на олімпіаді з математики, в якій беруть участь 30 студентів? (*Відповідь.* A_{30}^{3} .)

№ 1.27. У фінальному турі змагань беруть участь 5 студентів. Скількома способами можуть розподілитись місця між ними? (*Відповідь.* 5!)

№ 1.28. 25 учасників річних зборів акціонерів претендують на посади голови, секретаря, казначея та 4 інші посади у правлінні. Визначити, скільки існує способів заміщення вакантних місць претендентів.

(*Відповідь.* $A_{25}^{3} \cdot C_{22}^{4}$.)

№ 1.29. Рада директорів складається з 3 бухгалтерів, 5 менеджерів і 6 інженерів. 1) Скількома способами можна створити з них підкомітет, що складається з 1 бухгалтера, 3 менеджерів і 4 інженерів? 2) Розв'язати задачу за умови, що до підкомітету повинні увійти головний бухгалтер і генеральний менеджер. (*Відповідь.* 1) $C_{3}^{1}\, C_{5}^{3}\, C_{6}^{4}$; 2) $C_{4}^{2}\, C_{6}^{4}$.)

№ 1.30. З 25 учасників різних зборів акціонерів потрібно обрати правління з 7 чоловік і комісію з 3 чоловік. Скількома способами можна здійснити вибір, якщо: 1) члени правління можуть входити до складлу комісії; 2) члени правління не можуть входити до складлу комісії? (*Відповідь.* 1) $C_{25}^{7}\, C_{25}^{3}$; 2) $C_{25}^{7}\, C_{18}^{3}$.)

№ 1.31. Скількома способами можна групу з 20 студентів поділити на дві підгрупи так, щоб в одній підгрупі було 15 студентів, а в другій 5? (*Відповідь.* $C_{20}^{15} = C_{20}^{5}$.)

№ 1.32. Скількома способами групу з 20 студентів можна поділити на дві підгрупи по 10 чоловік ? (*Відповідь.* C_{20}^{10} .)

№ 1.33. Скількома способами можна поділити комісію з 15 викладачів на три підкомісії по 5 чоловік ? (*Відповідь.* $C_{15}^{5} \cdot C_{10}^{5}$.)

Зміст.

Навчальний посібник

Михайло Антонович Мартиненко,
Раїса Костянтинівна Клименко,
Ірина Валеріївна Лебедєва

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Формат 60 x 84/16, папір офсетний 65 г/см².
Друк офсетний. Тираж 1000. Зам № 9-2066

Поліграфічний центр Київського університету ім. Тараса Шевченка
252017, Київ, бульвар Т.Шевченка, 14, тел/факс.: 224-01-05