

УДК 681.513.5

О.П. ЛОБОК, кандидат фізико-математичних наук

Б.М. ГОНЧАРЕНКО, доктор технічних наук

А.М.СЛЄЗЕНКО, студент групи КІТ-М-2

Національний університет харчових технологій

ЗАСТОСУВАННЯ МІНІМАКСНОГО ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ БАГАТОВИМІРНИМИ ОБ'ЄКТАМИ ЗА УМОВИ ВИЗНАЧЕНОГО ЇХ ЗБУРЮВАННЯ

При оптимальному керуванні складними багатовимірними об'єктами, описуваними у просторі станів, наприклад, пекарної камери хлібопекарської печі, може використовуватися так званий мінімаксний підхід до розв'язування оптимізаційних задач. Викладені суть та послідовність такого підходу. Сформульована задача оптимального керування такими об'єктами за найгірших визначених умов збурювання, наводяться конкретна математична модель температурного режиму пекарної камери та сформульований критерій оптимальності керування. Викладена послідовність математичних перетворень та замінів, що врешті приводить до виразу оптимального керувального діяння за умови повного і точного вимірювання всіх координат стану об'єкта. Це полегшить застосування методу мінімаксного підходу для практичного розв'язання оптимізаційних задач керування в харчовій промисловості.

Ключові слова: оптимальне керування, мінімаксне керування, математична модель, багатовимірний об'єкт керування, квадратичний критерій оптимальності, матричне диференціювання, матричний принцип максимуму, функція Гамільтона.

© О.П. Лобок, Б.М. Гончаренко, А.М.Слезенко, 2012

Вступ. Синтез оптимального керування для складних багатовимірних об'єктів в харчовій промисловості передбачає його пошук як правило за визначеною математичною моделлю об'єкта та сформульованим критерієм оптимальності керування на основі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна та динамічного програмування Р. Беллмана після розв'язання так званого матричного рівняння Ріккати, яке є нелінійним і яке не вдається розв'язати аналітично, навіть якщо

матриці в його складі будуть постійними. Можливі і інші підходи до синтезу оптимального керування, наприклад, мінімакний підхід, що дозволяє обійтися без розв'язування рівнянь Ріккати.

Постановка проблеми та аналіз досліджень. Застосування методу мінімакного підходу до синтезу оптимального керування складними багатовимірними об'єктами, описуваними у просторі станів, за найгірших, але визначених умов збурювання вимагає використання деяких штучних заходів для одержання аналітичного розв'язку задачі. Це стосується царини оптимізаційних задач, постановка та розв'язання яких зазвичай вимагають саме принципу максимуму Л.С. Понтрягіна та динамічного програмування Р. Беллмана. Виклад сутті та послідовності мінімакного підходу є метою написання даної статті.

Виклад основного матеріалу. Нижче обговорюється задача мінімакного керування об'єктом за умови повного і точного вимірювання всіх координат його стану, що взагалі є ідеалізованим випадком. В дійсності через обмеженість точності засобів вимірювання і складності умов функціонування об'єкта завжди існує деяка похибка, а окремі величини і недоступні для безпосереднього вимірювання, а лише для спостереження або відновлення теж з певними похибками.

Розглянемо математичну матричну модель лінійного багатовимірного об'єкта керування (ОК):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + K(t)f(t), \\ x(t_0) = Mx^0, \end{cases} \quad (1)$$

де для випадку пекарної камери хлібопекарської печі [1]

$$A = \begin{pmatrix} -147 & 105 & 12.4 & 24.6 \\ 2.09 & 2.45 & 0 & 0.232 \\ 0.04 & 0 & 0.085 & 0.044 \\ 0.0144 & 0.01 & 0.014 & -0.04 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} T_{z1} \\ T_{n1} \\ T_{p1} \\ T_{\phi1} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 170 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u = G_{z1};$$

$$K = [k_1 \ k_2] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{n1} \\ \varphi \end{pmatrix}; \quad M = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A(t)$ – матриця коефіцієнтів при змінних вектора стану $x(t)$ об'єкта;
 $B(t) = (170 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ – матриця коефіцієнтів при керуванні $u(t)$ об'єктом;
 $x(t) = (T_{e1}(t), T_{n1}(t), T_{p1}(t), T_{\phi1}(t))^T$ – вектор, який описує температури теплових ємностей об'єкта, де $T_{e1}(t), T_{n1}(t), T_{p1}(t), T_{\phi1}(t)$ – температури відповідно газу, продукту, роликів і футеровки для I ділянки пекарної камери; $u(t) = G_{e1}(t)$ – вектор-функція керування об'єкта, в якості якої обрано витрату газу на I ділянку пекарної камери;
 $f(t) = (f_{11}(t), f_{12}(t))^T$ – вектор збурень, який описує витрату продукту $G_{n1}(t)$ і вологість $\varphi(t)$ в I зоні пекарної камери; $K(t) = [k_1(t) \ k_2(t)]$ – матриця коефіцієнтів при векторі збурень $f(t)$ розмірністю 4×2 , де $k_1(t) = (k_{11} \ 0 \ 0 \ 0)^T$ – вектор коефіцієнтів при збурювальному чиннику $G_{n1}(t)$ (витрата продукту на вході в I зону пекарної камери),
 $k_2(t) = (k_{12} \ k_{22} \ 0 \ 0)^T$ – вектор коефіцієнтів при збурювальному чиннику $\varphi(t)$ (вологість у I зоні пекарної камери); x^0 – вектор стану пекарної камери в початковий момент часу t_0 ; M – матриця, яка визначає елементи вектора стану об'єкта $x(t)$, тобто, які з координат вектора стану є збуреними в початковий момент t_0 .

Відносно збурювальних факторів f і початкових умов x^0 припустимо, що вони належать до обмежувальної області S_λ у вигляді гіпереліпсоїда виду:

$$\begin{aligned}
 S_\lambda &= \left\{ (f, x^0) : (x^0, Px^0) + \int_{t_0}^t [f(\tau), Q(\tau)f(\tau)] d\tau \leq \lambda^2(t) \right\} = \\
 &= \left\{ (f, x^0) : x^{0T} Px^0 + \int_{t_0}^t f^T(\tau) Q(\tau) f(\tau) d\tau \leq \lambda^2(t) \right\},
 \end{aligned} \tag{2}$$

де $\begin{cases} P = P^T > 0, \\ Q = Q^T > 0, \end{cases}$ тобто, P, Q – додатно визначені симетричні вагові матриці з

відомими коефіцієнтами; $\lambda(t)$ – відома скалярна функція, що визначає об'єм і динаміку зміни розміру еліпсоїда [1].

Для оптимізації температурного режиму ОК, описаного моделлю (1), сформулюємо наступний критерій (функціонал) оптимальності:

$$I(u) = \int_{t_0}^T x^T(t)G(t)x(t)dt + \int_{t_0}^T u^T(t)D(t)u(t)dt + x^T(T)Hx(T), \quad (3)$$

де $G(t), D(t), H$ – відомі додатно визначені симетричні вагові матриці.

Останній доданок в (3) являє собою квадратичну термінальну похибку і включається в критерій за необхідності забезпечити максимальну близькість стану системи в кінцевий момент часу до бажаного. Перший доданок в (3) є інтегральною квадратичною похибкою і характеризує якість регулювання на всьому інтервалі часу $[t_0, T]$. Другий інтеграл в (3) є зваженою «енергією» керування; він включається в критерій для того, щоб обмежити керування. Бажане (або необхідне) обмеження на керування може бути забезпечено відповідним вибором вагової матриці $D(t)$.

Треба визначити оптимальне керування у вигляді зворотного зв'язку:

$$u(t) = R(t) \cdot x(t), \quad (4)$$

де $R(t)$ – матриця зворотного зв'язку (матриця підсилення), $x(t)$ – вектор стану об'єкта.

При цьому керування (4) повинно мінімізувати критерій (3), що формально можна представити так:

$$\max_{(f, x^0) \in S_\lambda} I(u) \rightarrow \min_u \quad (5)$$

Дана оптимізаційна задача полягає в тому, щоб знайти таке керування u , яке за мінімальних енергетичних затрат на нього забезпечить мінімум відхилення змінних стану ОК x (в даному випадку – пекарної камери) за найбільш несприятливих умов – дії максимальних за значенням збурень f , обмежених областю у вигляді гіпереліпсоїда S_λ .

Саме тому таке керування, як очевидно з (5), називається *мінімаксім*, тобто, таким, що мінімізує відхилення за дії максимальних збурень [2].

Пропонується наступна послідовність розв'язання задачі (1) – (5). Підставимо (4) в перше рівняння системи (1). Після винесення x за дужки праворуч отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)R(t)x(t) + K(t)f(t) = (A(t) + B(t)R(t))x(t) + K(t)f(t); \\ x(t_0) = Mx^0. \end{cases} \quad (6)$$

Аналогічну підстановку виконаємо і для критерію оптимальності (3). Пам'ятаючи, що при транспонуванні порядок множення матриць змінюється $((A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T)$, після винесення відповідних змінних ($x^T(t)$ – зліва, $x(t)$ – справа) за дужки отримаємо для критерію оптимальності:

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{t_0}^T x^T(t)G(t)x(t)dt + \int_{t_0}^T u^T(t)D(t)u(t)dt + x^T(T)Hx(T) = \\ &= \int_{t_0}^T [x^T(t)G(t)x(t) + u^T(t)D(t)u(t)]dt + x^T(T)Hx(T) = \\ &= \int_{t_0}^T [x^T(t)G(t)x(t) + x^T(t)R^T(t)D(t)R(t)x(t)]dt + x^T(T)Hx(T) = \\ &= \int_{t_0}^T x^T(t) \underbrace{[G(t) + R^T(t)D(t)R(t)]}_{\parallel N(t)} x(t) dt + x^T(T)Hx(T). \end{aligned} \quad (7)$$

Позначимо суму в добутку під інтегралом $(G(t) + R^T(t)D(t)R(t))$ через $N(t)$:

$$N(t) = G(t) + R^T(t)D(t)R(t). \quad (8)$$

З використанням спектрального розкладу представимо матрицю $N(t)$ в наступному вигляді:

$$N(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T, \quad (9)$$

де λ_i – власні значення матриці N , v_i – власні вектори матриці $N(t)$. Використовуючи позначення (8), виконаємо наступні перетворення:

$$\begin{aligned} \max_{S_\lambda} I(u) &= \max_{S_{\lambda(T)}} \left\{ \int_{t_0}^T x^T(t) N(t) x(t) dt + x^T(T) H x(T) \right\} \leq \\ &\leq \underbrace{\max_{S_{\lambda(t)}} \int_{t_0}^T x^T(t) N(t) x(t) dt}_{\beta} + \underbrace{\max_{S_{\lambda(T)}} [x^T(T) H x(T)]}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (10)$$

Введемо наступні позначення доданків нерівності (10):

$$\alpha = \max_{S_{\lambda(T)}} [x^T(T) H x(T)]; \quad (11)$$

$$\beta = \max_{S_{\lambda(t)}} \int_{t_0}^T x^T(t) N(t) x(t) dt. \quad (12)$$

Перетворимо (12) з використанням спектрального розкладу (9):

$$\beta \leq \int_{t_0}^T \max_{S_{\lambda(t)}} \left(x^T(t) N(t) x(t) \right) dt = \int_{t_0}^T \max_{S_{\lambda(t)}} \left(x^T(t) \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T x(t) \right) dt. \quad (13)$$

У виразі (13) як множник внесемо x^T під знак суми і використаємо відому рівність $x^T y = y^T x$ для його перетворення:

$$\begin{aligned} \beta &= \int_{t_0}^T \max_{S_{\lambda(t)}} \left(x^T(t) \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T x(t) \right) dt = \int_{t_0}^T \max_{S_{\lambda(t)}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x^T(t) v_i \underbrace{v_i^T x(t)}_{x^T(t) v_i} \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^T \max_{S_{\lambda(t)}} \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(x^T(t) v_i \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Пам'ятаючи, що максимум суми дорівнює сумі максимумів $(\max_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n \max f_i(x))$, з (14) отримуємо:

$$\beta = \int_{t_0}^T \max_{S_{\lambda(t)}} \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(x^T(t) v_i \right)^2 dt \leq \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\max_{S_{\lambda(t)}} \left(x^T(t) v_i \right)^2}_{\gamma} dt. \quad (15)$$

Введемо в (15) наступне позначення:

$$\gamma = \max_{S_{\lambda(t)}} \left(x^T(t) v_i \right)^2. \quad (16)$$

Згадаймо з курсу теорії диференціальних рівнянь, що розв'язок наступної системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \bar{A}x + g; \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (17)$$

можна представити у вигляді:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot x^0 + \int_{t_0}^T \Phi(t, \tau) g(\tau) d\tau, \quad (18)$$

де $\Phi(t, \tau)$ – так звана фундаментальна матриця, яка задовольняє наступну матричну систему диференціальних рівнянь [4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = \bar{A} \Phi(t, \tau); \\ \Phi(\tau, \tau) = E. \end{cases} \quad (19)$$

Використовуючи (18), для системи рівнянь (6) одержимо:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \cdot Mx^0 + \int_{t_0}^T \Phi(t, \tau) K(t) f(\tau) d\tau, \quad (20)$$

де $\Phi(t, \tau)$ задовольняє наступну матричну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = (A(t) + B(t)R(t))\Phi(t, \tau); \\ \Phi(\tau, \tau) = E. \end{cases} \quad (21)$$

На основі (20) перетворимо наступний скалярний добуток:

$$\begin{aligned} x^T(t)v_i &= v_i^T x(t) = v_i^T (\Phi(t, t_0) \cdot Mx^0 + \int_{t_0}^T \Phi(t, \tau) K(t) f(\tau) d\tau) = \\ &= v_i^T \Phi(t, t_0) \cdot Mx^0 + \int_{t_0}^T v_i^T \cdot \Phi(t, \tau) K(t) f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Для подальшого перетворення використаємо нерівність Коші-Шварца що пов'язує норму і скалярний добуток векторів в евклідовому просторі.

$$(x, y)^2 \leq (x, Qx)(y, Q^{-1}y) \quad \forall Q = Q^T > 0, \quad (23)$$

де Q – відома вагова симетрична додатно визначена матриця.

Використавши нерівність Коші-Шварца (23), одержимо:

$$\begin{cases} x \sim f, \\ y \sim x, \end{cases} \Rightarrow (f, x)^2 \leq (f, Qf)(x, Q^{-1}x) \leq \lambda(x, Q^{-1}x). \quad (24)$$

Таким чином, маємо змогу перейти від нерівності (24) до рівняння вигляду:

$$\max_{S_\lambda} (f, x)^2 = (x, Q^{-1}x) \cdot \lambda. \quad (25)$$

Перетворимо також величину γ , визначену формулою (16), щоб конкретизувати значення відхилень:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \max_{S_{\lambda(t)}} \left(x^T(t) v_i \right)^2 = \lambda^2(t) [v_i^T \Phi(t, t_0) M P^{-1} M^T \Phi^T(t, t_0) v_i + \\
&+ \int_{t_0}^t v_i^T \Phi(t, \tau) K(t) Q^{-1}(\tau) K^T(t) \Phi^T(t, \tau) v_i d\tau] = \\
&= \lambda^2(t) v_i^T \underbrace{\left(\Phi(t, t_0) M P^{-1} M^T \Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) K(t) Q^{-1}(\tau) K^T(t) \Phi^T(t, \tau) d\tau \right)}_{L(t)} v_i = \\
&= \lambda^2(t) v_i^T L(t) v_i.
\end{aligned} \tag{27}$$

Використовуючи (27), перетворимо (15), винісши скаляр $\lambda^2(t)$, що не залежить від індексу i , з-під знаку суми:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^T \sum_{i=1}^n \lambda_i \max_{S_{\lambda(t)}} \left(x^T(t) v_i \right)^2 dt = \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda^2(t) v_i^T L(t) v_i dt = \\
&= \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^T L(t) v_i dt = \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \sum_{i=1}^n \lambda_i \operatorname{tr}(L(t) v_i v_i^T) dt = \\
&= \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \operatorname{tr}(L(t) \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T}_{N(t)}) dt = \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \operatorname{tr}(L(t) N(t)) dt.
\end{aligned} \tag{28}$$

В перетвореннях (28) сума $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T$ є не що інше, як спектральний розклад матриці (9). З лінійності операцій «слід матриці» та сума вносимо суму \sum під знак tr операції «слід». В (28) було використані також наступні властивості операції «слід матриці» (trace):

$$x^T y = \operatorname{tr}(y x^T) = \operatorname{tr}(x^T y) = x^T y.$$

Введемо позначення, вперше використане у перетвореннях (27):

$$L(t) = \Phi(t, t_0) M P^{-1} M^T \Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) K(t) Q^{-1}(\tau) K^T(t) \Phi^T(t, \tau) d\tau \quad (29)$$

Матриця $L(t)$ у виразі (29) задовольняє деяке матричне диференціальне рівняння, яке потрібно знайти.

Для цього знайдемо спочатку наступну похідну матриці $L(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &= \frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} \cdot M P^{-1} M^T \Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0) M P^{-1} M^T \frac{\partial \Phi^T(t, t_0)}{\partial t} + \\ &+ \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} \cdot K(t) Q^{-1}(\tau) K^T(t) \Phi^T(t, \tau) \right) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t \left(\Phi(t, \tau) K(t) Q^{-1}(\tau) K^T(t) \frac{\partial \Phi^T(t, \tau)}{\partial t} \right) d\tau + \underbrace{\Phi(t, t) K(t) Q^{-1}(t) K^T(t)}_E \underbrace{\Phi^T(t, t)}_E, \end{aligned} \quad (30)$$

де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця.

На основі першого рівняння (21) похідна матриці (30) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &= (A(t) + B(t)R(t)) \Phi(t, t_0) M P^{-1} M^T \Phi(t, t_0) + \\ &+ \Phi(t, t_0) M P^{-1} M^T \Phi^T(t, t_0) (A(t) + B(t)R(t))^T + \\ &+ (A(t) + B(t)R(t)) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) K(t) Q^{-1}(\tau) K^T(t) \Phi^T(t, \tau) d\tau + \\ &+ \left(\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) K(t) Q^{-1}(\tau) K^T(t) \Phi^T(t, \tau) d\tau \right) (A(t) + B(t)R(t))^T + K(t) Q^{-1}(t) K^T(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Після винесення множників за дужки $((A(t) + B(t)R(t))$ —ліворуч, $(A(t) + B(t)R(t))^T$ — праворуч) і на основі рівняння (29) похідна (31) остаточно прийме вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{dL(t)}{dt} &= (A(t) + B(t)R(t)) \times \\
 &\times \underbrace{(\Phi(t, t_0) M P^{-1} M^T \Phi(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) K(\tau) Q^{-1}(\tau) K^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau)}_{L(t)} + \\
 &+ \underbrace{(\Phi(t, t_0) M P^{-1} M^T \Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) K(\tau) Q^{-1}(\tau) K^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau)}_{L(t)} \times \\
 &\times (A(t) + B(t)R(t))^T + K(t) Q^{-1}(\tau) K^T(t) = \\
 &= (A(t) + B(t)R(t)) \cdot L(t) + L(t) \cdot (A(t) + B(t)R(t))^T + K(t) Q^{-1}(\tau) K^T(t).
 \end{aligned} \tag{32}$$

Отже, матриця $L(t)$ у виразі (29) задовольняє наступне матричне диференціальне рівняння:

$$\begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = (A(t) + B(t)R(t)) \cdot L(t) + L(t) \cdot (A(t) + B(t)R(t))^T + K(t) Q^{-1}(\tau) K^T(t); \\ L(t_0) = M P^{-1} M^T, \end{cases} \tag{33}$$

де $L = L^T > 0$ – симетрична додатно визначена матриця.

Використовуючи послідовно (27) і (8), кінцевий вигляд виразу (15) стає таким:

$$\begin{aligned}
 \beta &\leq \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^n \lambda_i \max_{S_{\lambda(t)}} (x^T(t) v_i)^2 dt = \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \text{tr}[L(t) N(t)] dt = \\
 &= \int_{t_0}^t \lambda^2(t) \text{tr}[L(t) (G(t) + R^T(t) D(t) R(t))] dt.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Щодо спектрального перетворення величини α , визначеної формулою (11), то введемо наступні позначення:

$$\alpha = \max_{S_{\lambda(T)}} \underbrace{[x^T(T)Hx(T)]}_{\eta}, \quad (11)$$

$$\eta = x^T(T)Hx(T), \quad (35)$$

а матрицю H , аналогічно матриці $N(t)$ (9), з використанням спектрального розкладу представимо у наступному вигляді:

$$H = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i w_i^T, \quad (36)$$

де μ_i – власні значення матриці H , w_i – власні вектори матриці H .

Використовуючи останню рівність (36), перетворимо (35) таким чином:

$$\eta = x^T(T)Hx(T) = x^T(T) \sum_{i=1}^n \mu_i w_i w_i^T x(T) = \sum_{i=1}^n \mu_i \underbrace{x^T(T)w_i}_{\parallel} w_i^T x(T) = \quad (37)$$

$$= \sum_{i=1}^n \mu_i (w_i^T x(T))^2.$$

Величину α на основі (37) можна апроксимувати зверху наступним чином:

$$\alpha = \max_{S_{\lambda(T)}} \eta \leq \sum_{i=1}^n \max_{S_{\lambda(T)}} \mu_i (w_i^T x(T))^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i \underbrace{\max_{S_{\lambda(T)}} (x_i^T(T)w_i)^2}_{\parallel} \gamma_1, \quad (38)$$

де аналогічно (27)

$$\gamma_1 = \lambda^2(T) w_i^T L(T) w_i, \quad (39)$$

або α можна записати остаточно так:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda^2(T) w_i^T L(T) w_i = \lambda^2(T) \sum_{i=1}^n \mu_i \text{tr}[L(T) w_i w_i^T] = \\ &= \lambda^2(T) \text{tr}[L(T) \underbrace{\sum_{i=1}^n \mu_i w_i w_i^T}_H] = \lambda^2(T) \text{tr}[L(T) H]. \end{aligned} \quad (40)$$

Перетворені позначення β (34) і α (40) дають змогу апроксимувати критерій (10) зверху:

$$\max_{S_\lambda} I(u) \leq \underbrace{\max_{S_{\lambda(t)}} \int_{t_0}^T x^T(t) N(t) x(t) dt}_{\beta} + \underbrace{\max_{S_{\lambda(T)}} [x^T(T) H x(T)]}_{\alpha} \leq \quad (41)$$

$$\leq \int_{t_0}^t \lambda^2(t) \text{tr}[L(t)(G(t) + R^T(t) D(t) R(t))] dt + \underbrace{\lambda^2(T) \text{tr}[L(T) H]}_k = J(R).$$

де $R(t)$ – оптимальна матриця зворотного зв'язку.

Введемо в (41) наступне позначення:

$$k = \lambda^2(T) \text{tr}[L(T) H]. \quad (42)$$

Для визначення матриці зворотного зв'язку $R(t)$ будемо мінімізувати критерій $J(R)$:

$$J(R) \rightarrow \min_R \quad (43)$$

за умови

$$\begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = (A(t) + B(t)R(t)) \cdot L(t) + L(t) \cdot (A(t) + B(t)R(t))^T + K(t)Q^{-1}(\tau)K^T(t); \\ L(t_0) = MP^{-1}M^T, \end{cases} \quad (33)$$

де $L = L^T > 0$ – симетрична додатно визначена матриця.

Для розв'язання оптимізаційної задачі (43) використаємо *матричний принцип максимуму Понтрягіна* [4], у відповідності до якого сформуємо функцію Гамільтона виду:

$$\begin{aligned} \Gamma(L(t), \psi(t), R(t)) = & -\lambda^2(t) \text{tr}[L(t)(G(t) + R^T(t) D(t) R(t))] + \\ & + \text{tr}[\psi(t)(A(t) + B(t)R(t))L(t) + L(t)(A(t) + B(t)R(t))^T + K(t)Q^{-1}(\tau)K^T(t)], \end{aligned} \quad (44)$$

де $\psi = \psi^T$ – спряжена матриця, яка задовольняє наступне матричне рівняння:

$$\begin{cases} \frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial L(t)} \Gamma(L(t), \psi(t), R(t)); \\ \psi(T) = -\frac{\partial}{\partial L(t)} k. \end{cases} \quad (45)$$

Оптимальна матриця $R(t)$ знаходиться з умови максимізації функції Гамільтона (44):

$$\Gamma(L(t), \psi(t), R(t)) \rightarrow \max_R. \quad (46)$$

Використовуючи формули матричного диференціювання, перетворимо спряжену систему (45) до вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma(L(t), \psi(t), R(t))}{\partial L(t)} = -\lambda^2(t)(G(t) + R^T(t)D(t)R(t)) + \psi(t)(A(t) + B(t)R(t)) + (A(t) + B(t)R(t))^T \psi(t); \\ \frac{\partial k}{\partial L(t)} = \lambda^2(T)H. \end{cases} \quad (47)$$

Для розв'язання задачі (46) використаємо необхідну умову екстремуму, а саме – рівність нулю першої похідної функції Гамільтона за шуканою матрицею $R(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(L(t), \psi(t), R(t))}{\partial R(t)} &= -2\lambda^2(t)D(t)R(t)L(t) + 2B^T(t)\psi(t)L(t) = 0; \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-\lambda^2(t)D(t)R(t) + B^T(t)\psi(t))L(t) = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Оскільки за умовою (33) матриця $L(t)$ відмінна від нуля (додатно визначена), то (48) справедливо лише за умови рівності нулю виразу у дужках. Остаточно маємо:

$$\begin{aligned} -\lambda^2(t)D(t)R(t) + B^T(t)\psi(t) &= 0; \Rightarrow \lambda^2(t)D(t)R(t) = B^T(t)\psi(t); \Rightarrow \\ R(t) &= \lambda^{-2}(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t). \end{aligned} \quad (49)$$

Підставляючи отриманий для $R(t)$ вираз (49) у перше рівняння системи (47), знайдемо кінцевий вираз похідної:

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi(t)}{dt} &= \lambda^2(t)(G(t) + \lambda^{-2}(t)\psi(t)B(t)\underbrace{D^{-1}(t)D(t)}_{\parallel E}\lambda^{-2}(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t)) - \\
&- \psi(t)(A(t) + B(t)\lambda^{-2}(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t)) - (A(t) + B(t)\lambda^{-2}(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t))^T \psi(t) = \\
&= \lambda^2(t)G(t) + \lambda^{-2}(t)\psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) - \psi(t)A(t) - \\
&- \lambda^{-2}(t)\psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) - A^T(t)\psi(t) - \lambda^{-2}(t)\psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) = \\
&= -A^T(t)\psi(t) - \psi(t)A(t) - \lambda^{-2}(t)\psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) + \lambda^2(t)G(t).
\end{aligned}$$

Таким чином, система (45) після знаходження всіх похідних і виконання всіх підстановок перетворюється в таку наступну систему:

$$\begin{cases} \frac{d\psi(t)}{dt} = -A^T(t)\psi(t) - \psi(t)A(t) - \lambda^{-2}(t)\psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) + \lambda^2(t)G(t); \\ \psi(T) = -\lambda^2(T)H. \end{cases} \quad (50)$$

Для зручності введемо наступну заміну, що складний пошук мінімуму зводить до простішого пошуку максимуму: $\psi(t) \rightarrow -\psi(t)$. З цієї заміни випливає:

$$\begin{aligned}
-\frac{d\psi(t)}{dt} &= A^T(t)\psi(t) + \psi(t)A(t) - \lambda^{-2}(t)\psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) + \lambda^2(t)G(t); \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{d\psi(t)}{dt} &= -A^T(t)\psi(t) - \psi(t)A(t) + \lambda^{-2}(t)\psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) - \lambda^2(t)G(t); \\
-\psi(T) &= -\lambda^2(T)H; \Rightarrow \psi(T) = \lambda^2(T)H.
\end{aligned} \quad (51)$$

Після перетворень (51) система (50) вироджується в кінцеву систему у такому представленні:

$$\begin{cases} \frac{d\psi(t)}{dt} = -A^T(t)\psi(t) - \psi(t)A(t) + \lambda^{-2}(t)\psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) - \lambda^2(t)G(t); \\ \psi(T) = \lambda^2(T)H. \end{cases} \quad (52)$$

Отже, матриця керування (зворотного зв'язку або матриця підсилення) $R(t)$ в оптимальному керуванні (4) визначається за співвідношенням:

$$R(t) = -\lambda^{-2}(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t), \quad (53)$$

де $\lambda(t)$ – відома скалярна функція; $D(t)$ – відома додатно визначена симетрична вагова матриця; $B(t)$ – матриця коефіцієнтів математичної моделі (1); $\psi(t)$ – спряжена матриця, яка задовольняє матричному рівнянню (52) [5].

Висновки: Розглянутий сучасний принцип оптимального керування на основі мінімаксного підходу багатовимірними лінійними об'єктами, для яких найбільші збурювальні чинники обмежуються гіперелепсоїдом певного виду. Здійснена постановка оптимізаційної задачі керування на основі математичного опису об'єкта керування та сформульованого квадратичного критерію оптимальності. Детально наведена послідовність здійснення мінімаксного підходу, що полегшить його практичне застосування при автоматизації теплових технологічних процесів в харчовій промисловості.

ЛІТЕРАТУРА

1. А.М. Слезенко. Дослідження оптимального мінімаксного управління лінійними динамічними системами, що функціонують в умовах невизначеності/А.М. Слезенко, О.П. Лобок//Програма і матеріали 78 міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів і студентів "Наукові здобутки молоді – вирішенню проблем харчування людства у ХХІ столітті", 2–3 квітня 2012р. –К.:НУХТ, 2012. –Ч. 2. –316–317 с.
2. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс/В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов.-М.:Наука,1972.-368с.
3. Певзнер Л.Д. Математические основы теории систем: учеб. пособие/Л.Д. Певзнер, Е.П. Чураков.-М.:Высш. шк.,2009.-503с.
4. Афанасьев В.Н. Оптимальные системы управления. Аналитическое конструирование/В.Н. Афанасьев.-М.: Изд-во МИЭМ,2007.-259с.
5. Бублик Б.Н. Минимаксные оценки и регуляторы в динамических системах/Б.Н. Бублик, Н.Ф. Кириченко, А.Г. Наконечный; Академия Наук Украинской ССР, Ордена Ленина институт кибернетики.-К.:АН УССР Ин-т кибернетики,1978.-47с.

А.П. ЛОБОК, кандидат физико-математических наук

Б.Н. ГОНЧАРЕНКО, доктор технических наук

А.М.СЛЕЗЕНКО, студент группы КИТ-М-2

Национальный университет пищевых технологий

ПРИМЕНЕНИЕ МИНИМАКСНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ МНОГОМЕРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИХ ВОЗМУЩЕНИЯ

При оптимальном управлении сложными многомерными объектами, описываемыми в пространстве состояний, например, пекарной камеры

хлебопекарной печи, может использоваться так называемый минимаксный подход к решению оптимизационных задач. Изложены суть и последовательность такого подхода. Сформулирована задача оптимального управления такими объектами при наихудших определённых условиях возмущения, приводятся конкретная математическая модель температурного режима пекарной камеры и сформулированный критерий оптимальности управления. Изложена последовательность математических преобразований и замен, которые в итоге приводят к выражению оптимального управляющего действия при условии полного и точного измерения всех координат состояния объекта. Это облегчает применение метода минимаксного подхода для практического решения оптимизационных задач управления в пищевой промышленности.

Ключевые слова: оптимальное управление, минимаксное управление, математическая модель, многомерный объект управления, квадратичный критерий оптимальности, матричное дифференцирование, матричный принцип максимума, функция Гамильтона.

O.P. LOBOK, PhD

V.M. GONCHARENKO, PhD

A.M. SLYEZENKO, student KIT-M-2

National University of Food Technologies

**APPLICATION MINIMAX OPTIMAL CONTROL LINEAR
MULTIDIMENSIONAL OBJECTS BY CONDITIONS DEFINED THEIR
INDIGNATION**

When optimal control of complex multidimensional objects, described in state space, such as bakery baking oven chamber can be used so-called minmax approach to solve optimization problems. The substance and consistency of this approach. The problem of optimal control of such facilities in the worst conditions specified perturbation, given a particular mathematical model of the temperature regime bakery burn camera and formulated optimality criterion control. Described sequence of mathematical transformations and replacements that ultimately leads to the expression of the optimal controlling act provided full and accurate measurement of the coordinates of the object. This will facilitate the application of the method minmax approach for practical solutions of optimal control problems in the food industry.
Keywords: optimal control, minmax control mathematical model, multi-object controls

quadratic optimality criterion, matrix differentiation, matrix maximum principle, the Hamiltonian.

Одержана редколлегією 01.09.12 р.