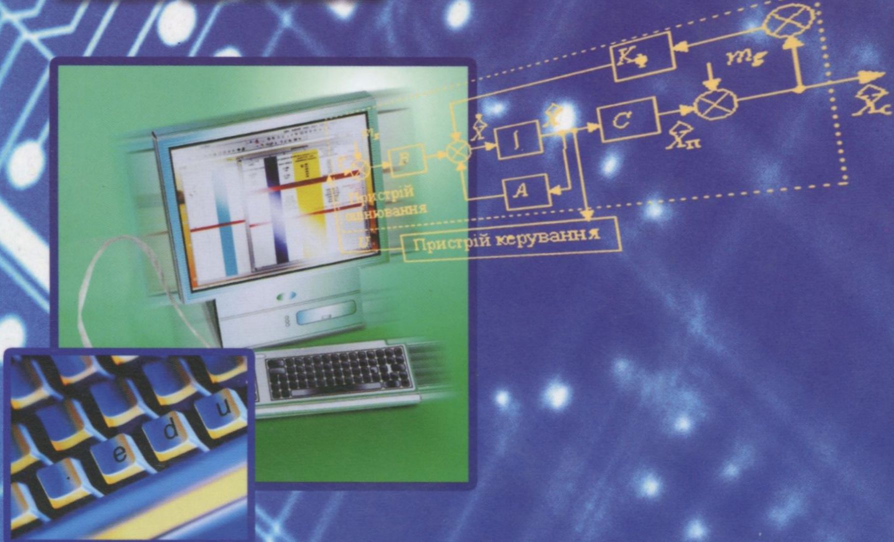
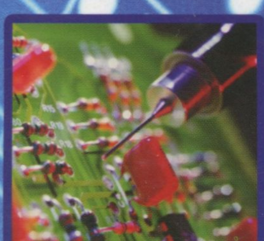
А.П. Ладанюк
В.Д. Кишенько
Н.М. Луцька
В.В. Іващук



МЕТОДИ сучасної теорії УПРАВЛІННЯ



УДК 681.5

Гриф Міністерства освіти і науки України
Лист № 1/11-6421 від 03.08.09

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. Жученко А.І., завідувач кафедри автоматизації хімічних виробництв НТУУ «КПІ»;

д-р техн. наук, проф. Скрипник Ю.О., професор кафедри автоматизації та комп'ютерних систем Національного університету технологій та дизайну;

канд. техн. наук, проф. Внуков І.П., завідувач кафедри електротехніки і механіки Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «ХАІ».

Методи сучасної теорії управління: Навч. посіб. / А.П. Ладанюк, В.Д. Кишенько, Н.М. Луцька, В.В. Іващук. — К., НУХТ, 2010. — 196 с.

ISBN 978-966-612-099-4

У посібнику викладено окремі розділи сучасної теорії управління та їх застосування для автоматизації складних об'єктів.

З єдиних методичних позицій розглядаються застосування методу координат стану, аналізу та синтезу систем при випадкових діяннях, багатовимірні та робастні регулятори, основи синергетики, управління хаосом, багатокритеріальні задачі.

Рекомендований для студентів напряму «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

Може бути корисним аспірантам та інженерно-технічним працівникам.

УДК 681.5

ISBN 978-966-612-099-4

Передмова

При підготовці магістрів за напрямом «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» викладається ряд дисциплін, метою яких є підсилення теоретичної підготовки майбутніх фахівців. Дисципліна «Методи сучасної теорії управління» є однією із кількох інших, які доповнюють та розширюють коло питань з проблем автоматизації виробництва, які вивчались на III—IV курсах.

Теорія управління в кінці XX ст. та на початку XXI ст. отримала потужні ресурси для подальшого розвитку. Це стосується того, що вперше виникла та інтенсивно розвивається можливість активного поєднання теоретичних методів та їх використання для синтезу та дослідження систем автоматизації різного рівня та призначення на основі сучасних комп'ютерних технологій, застосування мікропроцесорних засобів та ПК, об'єднаних у мережі з відповідним програмним забезпеченням.

У технічній літературі термін «сучасна теорія управління» об'єднує ряд напрямів створення сучасних ефективних систем автоматизації, що доповнюють класичну теорію управління. Приймається, що класична теорія управління обмежується лінійними системами, яким відповідають математичні моделі у вигляді систем диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами. У рамках класичної теорії управління отримано також ряд результатів для нелінійних та нестаціонарних систем, оптимального керування тощо.

Сучасна теорія управління (останнім часом використовується також термін «новітня теорія управління») характеризується спрямуванням на оптимізацію складних об'єктів у широкому сенсі з урахуванням багатокритеріальних задач, поєднанням традиційних показників стійкості та якості систем із вимогами енергозбереження, економії ресурсів, особливостями керування в нештатних ситуаціях, прийняття рішень в умовах невизначеності тощо.

У цьому навчальному посібнику розглядаються деякі розділи сучасної теорії управління, які безпосередньо стосуються проблеми створення систем автоматизації технологічних об'єктів, комплексів і виробництв. Це такі питання: використання методу простору станів; оцінювання стану багатовимірних об'єктів; оптимальна фільтрація випадкових сигналів; синтез багатовимірних регуляторів і систем; основи робастного керування (у тому числі H_2- та H_∞-регулятори); основи синергетичної теорії керування; хаотичні системи тощо.

Вступ

У промисловості постійно зростає складність процесів управління виробничо-економічними системами, розвивається їх взаємна інтеграція. Виникла об'єктивна необхідність автоматизованого керування новими типами (класами) систем: організаційно-технічними (технологічними) або техніко-організаційними.

У таких системах значну роль відіграє людина як активний елемент, що не дає можливості використовувати традиційні методи формування керувальних дій.

Методи класичної теорії автоматичного керування (70-ті роки XIX ст. — середина XX ст.) дали змогу автоматизувати широкий клас технічних систем (технологічних систем) на основі низки припущень щодо: певної детермінованості; лінійності (лінеаризованості у малому); реалізованості; стаціонарності; відносної простоти; зосередженості координат; достатності вивчених характеристик; можливості побудови регулярних математичних моделей.

Класична теорія автоматичного керування використовує структурне моделювання, формалізовані методи, що розроблені на основі диференціальних рівнянь, оптимального керування, операційного числення, гармонічного аналізу.

Керування широким класом об'єктів потребує врахування таких їх властивостей: нелінійності; розподіленості координат; недетермінованості; нестаціонарності та ін.

Сучасна теорія управління використовує власні методи: формалізовані регулярні методи синтезу на основі уявлень простору станів; векторно-матричне уявлення; створення адаптивних і робастних систем; методи оптимізації у широкому плані (структурної, параметричної, економії енергоносіїв) тощо.

Це дає можливість синтезувати класи систем: багатовимірні; нелінійні; з розподіленими координатами; зі змінюваною структурою; дискретні та ін.

Подальший розвиток теорії та практики автоматизації пов'язаний з використанням ідей штучного інтелекту (інтелектуалізації систем), що характерно для новітньої теорії управління, яка використовує відповідні методи:

— створення штучних нейронних мереж;

— використання нечіткої (fuzzy) логіки;

— розробку еволюційних (генетичних) алгоритмів;

— керування хаосом, урахування синергетичних ефектів тощо.

Підтримка прийняття рішень на основі методів штучного інтелекту дає змогу зменшити наслідки таких негативних явищ, пов'язаних із «людським фактором», як зниження надійності; зменшення показників якості управління в реальному часі, точності прогнозу; неповнота знань для управління.

При цьому треба враховувати, що новітні методи та алгоритми лише доповнюють існуючі системи, а не замінюють їх, розширюють функціональні можливості сучасних систем.

У середині XX ст. сформувались методи теорії управління іншим класом об'єктів — організаційними системами:

— класифікація на базі системного підходу;

— принципи побудови, реконструкції та функціонування.

Водночас для класу організаційних систем мало використовувалися формалізовані методи, оскільки вони мали такі особливості: складність; активність; відкритість; самоорганізація; нестаціонарність; нелінійність; багатовимірність та ін.

Для організаційних систем в основному використовуються евристичні методи, засновані на досвіді використання таких систем. На першому місці тут важливу роль відіграють суб'єктивні рішення при управлінні. Наявність людини приводить до необхідності врахування «людського фактора». В організаційних системах застосування інтелектуальних підсистем практикується на верхніх рівнях. Вони засновані на формалізації знань для отримання управлінських рішень при типових ситуаціях функціонування системи. У цьому напрямі відомі роботи із створення активних систем (В.М. Бурков), використання теорії ігор (А.В. Щепкін, Д.А. Новіков), теорії математичного моделювання та оптимального планування (Л. Канторович, В. Новожилов).

Виділений у новітній теорії управління клас організаційно-технічних процесів (систем) має риси як технічних, так і організаційних систем: багатовимірність; складність і змінюваність структури; наявність і змінювання багатьох цілей; недетермінованість; активність та ін.

У системах керування організаційно-технічними процесами (ОТП) рішення приймаються людиною — особою, яка приймає рішення (ОПР). Наявність у системі ОПР має позитивні наслідки: адаптивність; толерантність до змінювання структури, властивостей системи тощо.

Разом з тим ОПР має обмежені можливості щодо сприйняття та обробки великих масивів інформації, низьку надійність (пов'язану зі втомлюваністю), невідповідність кваліфікації, запізнювання у прийнятті рішень.

Організаційно-технічні процеси мають гібридний характер, тому застосування лише формалізованих регулярних методів синтезу керування, які зазвичай застосовуються до технічних систем, або лише евристичних способів, характерних для організаційних об'єктів, не дає бажаного результату. Тому для створення ефективно функціонуючих систем управління ОТП використовуються комбіновані підходи — оптимальне поєднання формалізованих регулярних методів та інтелектуальних методів та евристик (сукупність логічних прийомів і методичних правил теоретичного дослідження для пошуку істини). Крім того, використання цих методів засновано на застосуванні системного підходу, пов'язаного з накопиченням, аналізом і систематизацією та використанням задач, які виникають у процесі управління та потребують оперативного розв'язання.

Слід враховувати, що межа між формалізованими регулярними методами та евристичними способами досить умовна. Це пов'язано передовсім з тими припущеннями, які приймаються при застосуванні формалізованого методу, що може призвести до некоректних рішень. Використання ж додаткових евристик й апріорної інформації може сприяти регуляризації задачі та її розв'язанню новим інтелектуальним методом. При накопиченні достатніх даних і необхідного досвіду та теоретичному обґрунтуванні ці методи переходять у клас регулярних.

Наприклад, у задачах оптимального керування градієнтний метод пошуку мінімуму успішно знаходить глобальний екстремум опуклої функції, але при багатоекстремальній функції (гребінчастій) цей метод неприйнятний. Тоді доводиться вводити додаткову функцію (стабілізатор) для зміни функції (функціоналу), тобто забезпечується штучна «опуклість» і градієнтний метод стає коректним.

Для використання комбінованого підходу існують об'єктивні умови:

— зросла потужність комп'ютерів, особливо об'єднаних у мережі;

— розширились можливості комп'ютерних технологій;

— реальністю стало застосування методів штучного інтелекту (частина комп'ютерної науки, яка досліджує та розробляє методи розумної поведінки). Отже, існують формалізовані методи, за допомогою яких з використанням комп'ютера задачі розв'язуються не гірше, ніж природнім інтелектом.

Розділ 1

МЕТОД ПРОСТОРУ СТАНІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ ЛІНІЙНИХ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ

1.1. Математичні моделі та структурні схеми систем у просторі змінних станів

Багатовимірними називаються такі системи автоматичного керування, в яких є кілька регульованих змінних (координат станів).

Метод простору станів передбачає первинну математичну модель системи у вигляді диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язану відносно похідних. Таку систему називають нормальною системою або системою у формі Коші.

У загальному випадку нелінійна система описується системою рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&\dot{X}_1(t) = f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n, U_1, U_2, \ldots, U_m, t);\\
&\dot{X}_2(t) = f_2(X_1, X_2, \ldots, X_n, U_1, U_2, \ldots, U_m, t);\\
&\ldots\\
&\dot{X}_n(t) = f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, U_1, U_2, \ldots, U_m, t),
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

де X_i — координати станів, які характеризують стани системи в n-вимірному просторі R^n; U_i — дії керування; f_i — у загальному, нелінійні функції.

Якщо взяти, що функції f_1, $f_{2, \ldots}$, f_n є лінійними відносно координат X та дій U, то можна записати:

$$\dot{X}_1 = a_{11}(t)X_1 + a_{12}(t)X_2 + ... + a_{1n}(t)X_n + b_{11}(t)U_1 + ... + b_{1m}(t)U_m,$$
$$\dot{X}_2 = a_{21}(t)X_1 + a_{22}(t)X_2 + ... + a_{2n}(t)X_n + b_{21}(t)U_1 + ... + b_{2m}(t)U_m, \quad (1.2)$$
$$...$$
$$\dot{X}_n = a_{n1}(t)X_1 + a_{n2}(t)X_2 + ... + a_{nn}(t)X_n + b_{n1}(t)U_1 + ... + b_{nm}(t)U_m,$$

або в матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \cdots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ & \cdots & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix} + \quad (1.3)$$
$$+ \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2m}(t) \\ & \cdots & & \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdots \\ U_m \end{bmatrix}.$$

У компактній векторно-матричній формі рівняння (1.3) можна записати так:

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)U, \quad (1.4)$$

де $A(t)$, $B(t)$ — матриці, складені з відповідних коефіцієнтів, причому матриця $A(t)$ є завжди квадратною $[n \times n]$, а матриця $B(t)$ — прямокутна $[n \times m]$.

Система, в якій матриці $A(t)$ та $B(t)$ залежать від часу (t), називається багатовимірною нестаціонарною системою.

Якщо $A(t)$=const та $B(t)$=const, то така система називається стаціонарною.

Повний опис системи доповнюється залежностями, які зв'язують вихідні змінні Y та X:

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_{11}(t)X_1 + C_{12}(t)X_2 + ... + C_{1n}(t)X_n, \\ Y_2 &= C_{21}(t)X_1 + C_{22}(t)X_2 + ... + C_{2n}(t)X_n, \\ &... \\ Y_p &= C_{p1}(t)X_1 + C_{p2}(t)X_2 + ... + C_{pn}(t)X_n, \end{aligned} \tag{1.5}$$

причому $p \leq n$, або в матричній формі

$$Y = C\,(t)\,X. \tag{1.6}$$

Вектор X — фазовий вектор, або вектор змінних (координат) станів. Координати X_1, X_2, ..., X_n називають фазовими координатами, або координатами станів (рис.1.1).

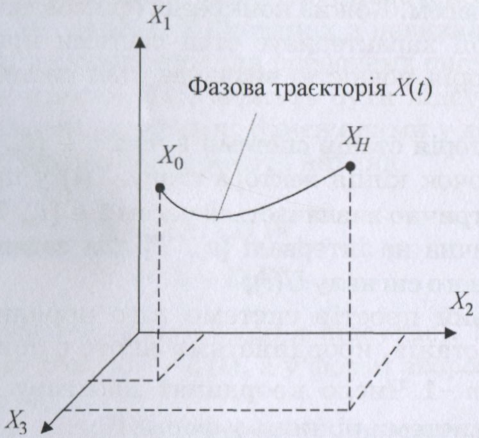


Рис. 1.1. Фазовий простір

Множина векторів X — простір станів. Координатами X_i вектора станів є регульовані змінні або абстрактні величини, які вводяться штучно. Вектор стану X утворюється за допомогою компонентів X_i, які обираються так, щоб при відомому значенні X $(t_ф)$ при $t = t_ф$ ($t_ф$ — фіксований момент часу) і заданому векторі входу U (t) для t є $[t_ф, T]$ можна було однозначно визначити вектор виходу $Y(t)$. Перехід системи з початкового стану X_0 в кінцевий $X_к$ визначається фазовою траєкторією.

За рівняннями (1.2) можна побудувати структурну схему системи (рис.1.2), що дає можливість зробити такі висновки:

— за допомогою вектора U (t) здійснюється керування об'єктом;

— вектор $X(t)$ характеризує стан об'єкта у фазових координатах $X_1, X_2, \dots, X_n$;

— поведінка системи та її властивості повністю характеризуються поняттям стану, якому відповідає точка в просторі R^n;

— якщо система описується векторно-матричним рівнянням у нормальній формі Коші, то розмірність простору станів дорівнює порядку цієї системи;

— поведінка системи (її рух) характеризується фазовою траєкторією (див. рис.1.1), яка визначає змінювання координат системи з часом. Кожна конкретна (фіксована) точка на фазовій траєкторії характеризує стан системи при $t=t_ф$. Отже, фазова траєкторія повністю визначає стан системи в просторі R^n і за часом;

— траєкторія станів системи в часі $t \in [t_ф, T]$ — геометричне місце точок кінця вектора стану $X(t)$ у просторі станів R^n, що параметрично визначається часом $t \in [t_ф, T]$.Траєкторія станів однозначна на інтервалі $[t_ф, T]$ для заданого на цьому інтервалі вхідного сигналу $U(t)$;

— фазовий простір системи n-го порядку — n-вимірний простір станів, координатами якого є похідні за часом $X^{(k)}(t)$, $k = \overline{0, n-1}$. Число координат простору станів дорівнює порядку системи рівнянь у формі Коші.

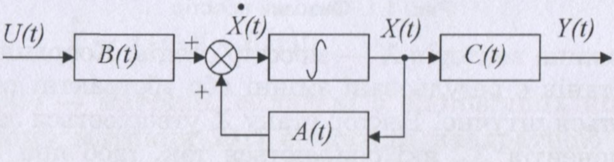


Рис. 1.2. Структурна схема системи

Координати $X_1, X_2, \dots, X_n$ відповідають не реальній, а математичній моделі САУ. Функції $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ доступні спостереженню (вимірюванню) — це реальні вихідні сигнали, які можна спостерігати (вимірювати). Тому рівняння (1.4) називають рівнянням стану, а рівняння (1.6) — рівнянням виходу.

Для опису лінійної стаціонарної неперервної системи іноді в модель (1.4) вводять вектор зовнішніх збурень:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU + D_1 W, \\ Y = CX + D_2 W, \end{cases} \tag{1.7}$$

де $X(t) \in R^n$ — вектор станів системи; $U(t) \in R^m$ — управління (керування); $Y(t) \in R^p$ — вихід системи; $W(t) \in R^{m_1}$ — вхідні сигнали (зовнішні збурення), або сигнали завдання. Матриці: $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times n}$, $D_1 \in R^{n \times m_1}$, $C \in R^{p \times n}$, $D_2 \in R^{p \times m_1}$ також можуть залежати та не залежати від часу t.

Система називається повністю визначеною, якщо матриці A, B, C, D_1, D_2, задані. У системах з невизначеностями ці матриці відомі не повністю (для робастних систем).

Зовнішні діяння $W(t)$ можуть бути відсутніми; детермінованими або випадковими; обмеженими у деякій нормі.

Системи, моделі яких мають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + D_1 W, \\ Y &= CX + D_2 W, \end{aligned} \tag{1.8}$$

називають відкритими (керування відсутнє). При програмному керуванні обрано $U=U(t)$, а у формі зворотного зв'язку за станом $U=KX$.

Розв'язок відкритої системи можна записати в явному вигляді:

$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} D_1 W(\tau) d\tau, \tag{1.9}$$

де $X(0)$ — значення $X(t)$ — у початковий момент $t=0$; e^{At} — матрична експонента.

Отже, фізичну постановку задачі необхідно визначити наперед.

Дискретні системи описуються різницевими рівняннями:

$$\begin{aligned} X_k &= AX_{k-1} + BU_{k-1} + D_1 W_{k-1}, \\ Y_k &= CX_k + D_2 W_k, \end{aligned} \tag{1.10}$$

де k — дискретний час або номер ітерації в ітераційному процесі.

1.2. Матричні передавальні функції

Для перетворень рівнянь у просторі станів вводиться оператор диференціювання $s = \dfrac{d}{dt}$ на гладкі функції $x(t)$ він діє за правилом:

$$SX(t) = \dot{X}(t). \qquad (1.11)$$

Якщо розглядати S як комплексну змінну та функції від неї, то тоді можна отримати певний зміст, наприклад якщо

$$R(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_k s^k, \qquad (1.12)$$

то

$$R(s)x(t) = a_0 x(t) + a_1 \dot{x}(t) + \ldots + a_k x^{(k)}(t); \qquad (1.13)$$

коли підставити у рівняння (1.7) $s = \dfrac{d}{dt}$ при $X(0)=0$ і формально розв'язати перше рівняння відносно x, отримаємо:

$$X = (sI - A)^{-1}(BU + D_1 W), \qquad (1.14)$$

а для виходу буде:

$$Y = C(sI - A)^{-1} BU + \left(C(sI - A)^{-1} D_1 + D_2\right)W. \qquad (1.15)$$

Матрична функція комплексної змінної S

$$H_{yw}(s) = C(sI - A)^{-1} B \qquad (1.16)$$

називається передавальною функцією від збурення W до виходу Y.

Елементами матриць $A(s)$ є дробово-раціональні функції від змінної s, які мають спільний знаменник

$$P(s) = \det(sI - A), \qquad (1.17)$$

що є характеристичним поліномом матриці A (характеристичним поліномом системи), від розташування коренів якого залежить стійкість та інші властивості системи.

Тоді можна записати:

$$H_{yu}(s) = H(s) = \frac{1}{P(s)} W(s), \qquad (1.18)$$

де $W(s)$ — матриця, елементи якої є поліномами від s.

Полюси $H(s)$ збігаються із власними числами матриці A, для решти матриця $H(s)$ визначена. Зокрема, якщо $P(s)$ стійкий, тобто всі його корені лежать у відкритій лівій напівплощині, то $H(s)$ — матрична функція, аналітична у правій напівплощині (такі передавальні функції є стійкими).

Можна записати таку зручну залежність:

$$Y = H_{yu}(s)U + H_{yw}(s)W. \qquad (1.19)$$

Зручність використання передавальних функцій можна показати на такому прикладі.

Для системи відсутні зовнішні збурення та похибки вимірювань виходу:

$$Y = H(s)U, U \in R^m, Y \in R^e, \qquad (1.20)$$

тут $H(s)$ — передавальна функція (матриця $e \times m$, елементи якої — дробово-раціональні функції s, тобто:

$$H(s) = \frac{1}{P(s)} W(s), \qquad (1.21)$$

де елементи $e \times m$ матриці $W(s)$ — поліноми від s; поліном $P(s)$ — загальний знаменник елементів матриці $H(s)$ — характеристичний поліном системи, а його корені — полюси передавальної функції.

Формально можна отримати:

$$P(s)H(s) = W(s)U. \qquad (1.22)$$

Тоді, якщо розглядати s як оператор диференціювання, отримуємо систему диференціальних рівнянь високого порядку відносно $Y(t) \in R^e$, $U(t) \in R^m$. Для реалізовності матриці $H(s)$ формуються умови: степінь полінома чисельника не перевищує степеня полінома знаменника. Такі передавальні функції називають правильними (реалізовними). Вводячи штучні змінні станів, останнє рівняння приводять до вигляду, аналогічного стандартній формі. Це називається реалізацією передавальної функції в просторі станів. Тоді використовується запис

$$H(s)=\left[\frac{A\,|\,B}{C\,|\,D}\right],\tag{1.23}$$

або $H(s)=(A,B,C,D)$, тобто система $Y=H(s)U$ еквівалентна системі:

$$\begin{aligned}&\dot{X}=AX+BU, X(0)=0,\\&Y=CX+DU.\end{aligned}\tag{1.24}$$

При цьому

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D.\tag{1.25}$$

Перехід від $H(s)$ до (A,B,C,D) — реалізації можна здійснити порізному. Приміром, можна забезпечити мінімальну розмірність A (тобто вектора стану X) — мінімальну реалізацію. Відповідна розмірність A називається степенем Мак-Мілана для передавальної функції.

Якщо (A,B,C,D) — мінімальна реалізація $H(s)$, то

$$P(s)=\det(sI-A)\tag{1.26}$$

є характеристичним поліномом системи, а його корені — власні значення A — полюси матричної передавальної функції (полюси системи).

Використання передавальних функцій є зручним також у такому випадку для системи:

$$\begin{aligned}&\dot{X}=AX+BU,\\&Y=CX,\end{aligned}\tag{1.27}$$

коли вхідний сигнал $U(t)$ — комплексний гармонійний сигнал

$$U(t)=ae^{jwt},\tag{1.28}$$

де a — постійний вектор, w — частота.

Тоді

$$X(t)=R^{At}X(0)+e^{At}\int_0^t e^{(jwI-A)^{-1}}Bad\tau=e^{At}X(0)+$$
$$+(jwI-A)^{-1}Bae^{jwt}-(jwI-A)^{-1}Ba, \tag{1.29}$$

усталене значення вектора станів буде

$$\overline{X(t)}=(jwI-A)^{-1}BU(t). \tag{1.30}$$

Якщо матриця A стійка, то всі її власні значення λ_i лежать у лівій напівплощині: $\mathrm{Re}\lambda_i<0, i=1, ..., n$. Тоді для стійких матриць $e^{At}\to 0$ при $t\to\infty$. Тоді $\left|X(t)-\overline{X(t)}\right|\to 0$ при $t\to\infty$. Для усталеного значення виходу маємо:

$$\overline{Y(t)}\dot{=}C\overline{X(t)}=C(jwI-A)^{-1}BU(t), \tag{1.31}$$
$$\left|Y(t)-\overline{Y(t)}\right|\to 0 \text{ при } t\to\infty,$$

або

$$\overline{Y(t)}=H(jw)U(t), \tag{1.32}$$

де матрична передавальна функція $H(jw)$ є частотною характеристикою системи. Це рівняння можна пояснити так. Припустимо, що всі компоненти вхідного вектора $U(t)$ дорівнюють нулю, крім i-тої, яку подамо у вигляді: $U_i(t)=a\cos wt+ja\sin wt$ (a — число). Тоді k-та компонента усталеного значення вихідного сигналу буде:

$$\overline{Y_K}(t)=\left|h_{ki}(jw)\right|a\cos(\omega t+\varphi)+j\left|h_{ki}(jw)\right|a\sin(wt+\varphi), \tag{1.33}$$

де $h_{ki}(jw)-(k_0 i)$ -й елемент матриці $H(jw)$, а $\varphi=\arg h_{ki}(iw)$. З урахуванням лінійності $H(.)$ відклик системи на суму дійсної та уявної складових $U(t)$ дорівнює сумі відкликів на кожну з них, тобто якщо як $U_i(t)$ взяти дійсну гармоніку a cos wt, то усталене значення на k-му виході буде:

$$\overline{Y}_k(t)=\left|h_{ki}(jw)\right|a\cos(wt+\varphi). \tag{1.34}$$

Отже, якщо на i-й вхід системи зі стійкою матрицею A подавати гармонійний сигнал з частотою w, то на k-му виході буде також гармонійний сигнал з тією самою частотою, а його амплітуда в $\left|h_{ki}(jw)\right|$ разів відрізнятиметься від амплітуди вхідного сигналу, тобто $\left|h_{ki}(iw)\right|$ — коефіцієнт підсилення вхідного гармонійного сигналу, а фаза змінюватиме на $\arg h_{ki}(jw)$. Це використовується для експериментального визначення частотної характеристики системи.

Для дискретних систем вводиться оператор зсуву назад z, який розглядається як формальна змінна:

$$ZX_k = X_{k-1}. \tag{1.35}$$

Тоді при $X_0=0$ можна записати:

$$X_k = ZAX_k + ZBUX_k + ZD_1W_k, \tag{1.36}$$

тобто

$$\begin{aligned} X_k &= Z(I-ZA)^{-1} BU_k + Z(I-ZA)^{-1} D_1W_k, \\ Y_k &= ZC(I-ZA)^{-1} BU_k + \left(ZC(I-ZA)^{-1} D_1 + D_2\right)W_k. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Передавальні функції виражаються через змінну Z:

$$H_{yu}(Z) = ZC(I-ZA)^{-1} B,\ H_{yw}(Z) = ZC(I-ZA)^{-1} D_1 + D_2, \tag{1.38}$$

а характеристичний поліном набуває значення:

$$P(Z) \doteq \det(I-ZA). \tag{1.39}$$

Тоді передавальні функції мають вигляд

$$H(Z) = \frac{1}{P(Z)} W(Z), \tag{1.40}$$

де $W(Z)$ — матриця, елементи якої є поліномами від Z.

Якщо $P(Z)$ не має нулів всередині одиничного кола, то він є стійким ($H(Z)$ аналітична в цьому колі).

Якщо для відкритої системи без похибок у спостереженні (D_2=0) матриця A дискретно стійка, а на вхід подається гармонійний сигнал

$$U_k = ae^{jwk}, \qquad (1.41)$$

то вихід прямує до усталеного значення

$$Y_k = H(e^{-jw})U_k;\; H\left(e^{jw}\right) \dot{=} e^{jw}C\left(I - e^{jw}A\right)^{-1} B. \qquad (1.42)$$

Тобто і у цьому випадку гармонічний сигнал перетворюється (гранично) до гармонійного з амплітудою, яка змінилася в $\left|H\left(e^{jw}\right)\right|$ разів і зсувалася за фазою — $\arg H\left(e^{jw}\right)$ (знак «—» відповідає оператору зсуву назад).

1.3. Керованість і спостережність багатовимірних систем

При синтезі систем, у тому числі розрахунку регуляторів, інформацію про стани системи можна отримати за допомогою *спостерігачів*, які аналізують вектор $Y(t)$ (вектор вимірювань) і дають можливість отримати наближене значення (оцінку) вектор-функції $X(t)$. При цьому деякі координати стану можна виміряти, а деякі є комбінацією вихідних сигналів, і їх можна розрахувати.

Математичні моделі в координатах стану (1.7) дають змогу отримати оцінку таких важливих показників, як *спостережність і керованість* системи. Якщо керувати станами системи $X(t)$ можна зміною вектора $U(t)$, а спостерігати за її станами вимірюванням вихідного сигналу $Y(t)$, то необхідно дати відповідь на два запитання:

— чи можна обрати $U(t)$ так, щоб перевести систему (або об'єкт) з деякого довільного стану $X_0(t)$ в інший $X_k(t)$?

— чи можна, спостерігаючи вектор виходу $Y(t)$ протягом тривалого часу, визначити стани системи $X(t)$?

Система, яка описується математичною моделлю (1.7), є повністю *керованою*, якщо для будь-якого початкового стану $X_0(t)$ існує такий сигнал керування $U(t)$, який переводить систему в кінцевий стан $X_k(t)$ за кінцевий проміжок часу $t_0 \le t \le t_k$. Існує математична умова керованості (умова Р. Калмана): лінійна n-вимірна система (1.7) є повністю керованою, коли матриця

$$N_k = \left[B; AB; A^2B; \ldots A^{n-1}B \right] \qquad (1.43)$$

має ранг, який дорівнює порядку системи n :

$$rank\ N_k = n. \qquad (1.44)$$

На рис.1.3 показана структурна схема системи, з якої видно, що вона не повністю керована (сигнал X_1 не з'єднаний із сигналом керування U). Для здійснення процесу керування потрібна інформація про стани системи (об'єкта).

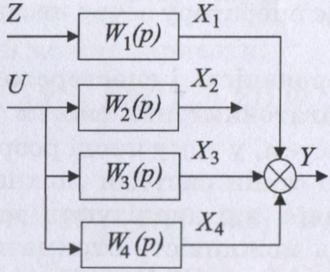


Рис. 1.3. Структурна схема системи

Кількість вимірюваних координат, як правило, менше кількості координат станів. Система називається повністю *спостережною,* якщо можливо визначити стани $X(t)$ за даними вимірювань $Y(t)$ та $U(t)$ за кінцевий інтервал часу $t_0 \le t \le t_k$. Математична умова повної спостережності (умова Р. Калмана) формулюється так: лінійна стаціонарна система (1.7) є повністю спостережною, коли матриця

$$N_c = \left[C^T; A^TC^T; \left(A^T\right)^2 C^T; \ldots; \left(A^{Tn-1}C^T\right) \right] \qquad (1.45)$$

має ранг n:

$$rank\ N_c = n. \qquad (1.46)$$

Система, структурна схема якої показана на рис.1.3, є не повністю спостережною (координата X_2 не зв'язана з виходом Y).

Також більш сильною формою керованості є нормалізованість. Система є нормалізованою, якщо кожна координата вектора управління $U(t)$ окремо забезпечує керованість. Необхідною та достатньою умовою при цьому є така:

$$rank\, N_{c_i} = rank\left[b_i; Ab_i; \dots ; A^{n-1} b_i\right] = n \qquad (1.47)$$

для всіх $i = 1, 2, ..., m$, де b_i, $i = 1, 2, ..., m$ — стовпці матриці B.

Приклад. Дано математичну модель трисекційної пластинчастої пастеризаційно-охолоджувальної установки ОПУ-10 у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dt_{\text{г.в}}}{d\tau} = -0{,}0136 t_{\text{г.в}} + 0{,}676 G_{\text{п}} + 0{,}0136 t_{\text{х.в}}; \\ \dfrac{dt_{\text{м.п}}}{d\tau} = -0{,}0123 t_{\text{м.п}} + 0{,}0066 t_{\text{м.р}} - 0{,}0414 G_{\text{м}} + 0{,}0056 t_{\text{г.в}}; \\ \dfrac{dt_{\text{х.в}}}{d\tau} = -0{,}0055 t_{\text{х.в}} - 0{,}0092 t_{\text{г.в}} + 0{,}0027 t_{\text{м.р}} - 0{,}00355 G_{\text{м}}; \\ \dfrac{dt_{\text{м.р}}}{d\tau} = -0{,}0068 t_{\text{г.в}} + 0{,}0054 t_{\text{м.п}} - 0{,}0169 G_{\text{м}} + 0{,}0013 t_{\text{м.х}}, \end{cases} \qquad (1.48)$$

де $t_{\text{г.в}}$ — температура гарячої води, $t_{\text{м.п}}$ — температура пастеризації, $t_{\text{х.в}}$ — температура холодної води, $t_{\text{м.р}}$ — температура молока рекуперації, $G_{\text{п}}$ — витрата пари, $G_{\text{м}}$ — витрата молока, $t_{\text{м.х}}$ — температура сирого молока.

Необхідно привести об'єкт у простір змінних станів:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + Gw, \qquad (1.49)$$
$$y = Cx + Du + Hw$$

та оцінити спостережність та керованість системи.

За (1.49) складаємо вектор координат станів, вектор управління та вектор зовнішніх збурень:

$$x=\begin{bmatrix} t_{\text{г.в}} \\ t_{\text{м.п}} \\ t_{\text{х.в}} \\ t_{\text{м.р}} \end{bmatrix}; \qquad u=\begin{bmatrix} G_{\text{п}} \\ G_{\text{м}} \end{bmatrix}; \qquad w=\left[t_{\text{м.х}}\right]. \qquad (1.50)$$

Відповідно до виразів (1.50) і згідно з моделлю (1.48) складаємо матриці першого рівняння (1.49):

$$A=\begin{bmatrix} -0{,}0136 & 0 & 0{,}0136 & 0 \\ 0{,}0056 & -0{,}0123 & 0 & 0{,}0066 \\ -0{,}0092 & 0 & -0{,}0055 & 0{,}0027 \\ -0{,}0068 & 0{,}0054 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix} 0{,}676 & 0 \\ 0 & -0{,}0414 \\ 0 & -0{,}00355 \\ 0 & -0{,}0169 \end{bmatrix}; G=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}0013 \end{bmatrix}. \qquad (1.51)$$

Нехай вимірюють лише $t_{\text{г.в}}$ — температура гарячої води, $t_{\text{м.п}}$ — температура пастеризації, $t_{\text{х.в}}$ — температура холодної води, то

$$y=\begin{bmatrix} t_{\text{г.в}} \\ t_{\text{м.п}} \\ t_{\text{х.в}} \end{bmatrix}, \qquad (1.52)$$

тоді матриці другого рівняння мають вигляд

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.53)$$

Визначаємо матрицю керованості об'єкта за виразом (1.43):

$$N_k = \begin{bmatrix} 0.6760 & 0 & -0,0092 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0414 & 0,0038 & 0,0004 & -0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0036 & -0,0062 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0169 & -0,0046 & -0,0002 & 0,00001 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

Відповідно ранг цієї матриці становить

$$rank\ N_k = 4 = n, \quad (1.55)$$

тобто об'єкт повністю керований.

Визначаємо матрицю спостережності об'єкта за формулою (1.45):

$$N_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0,0136 & 0 & 0,0136 & 0 \\ 0,0056 & -0,0123 & 0 & 0,0066 \\ -0,0092 & 0 & -0,0055 & 0,0027 \\ 0,0001 & 0 & -0,0003 & 0 \\ -0,0002 & 0,0002 & 0,0001 & -0,0001 \\ 0,0002 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

Відповідно ранг цієї матриці становить

$$rank\ N_c = 4 = n, \quad (1.57)$$

тобто об'єкт повністю спостережний.

Контрольні запитання

1. Які види зображення об'єкта та системи Ви знаєте?
2. Що таке модель у просторі змінних станів, які змінні до неї входять?
3. Що таке матричні передавальні функції, де їх використовують?
4. Яким чином можна перейти від моделі в матричних передавальних функціях до моделі в просторі змінних стану?
5. Що таке керованість об'єкта?
6. Що таке спостережність об'єкта?

Розділ 2

АНАЛІЗ І СИНТЕЗ СИСТЕМ ПРИ ВИПАДКОВИХ ДІЯХ

2.1. Статистичний підхід. Характеристики випадкових процесів

Для реальних систем зовнішні сигнали є випадковими, значення їх мають імовірнісний характер, наприклад, змінювання витрат матеріальних потоків, їх концентрацій і температур та ін. Непередбачувано змінюються властивості об'єкта, приміром коефіцієнти тепло- та масообміну, а також перешкоди, які діють у каналах вимірювання.

Випадкова величина характеризується тим, що її значення не можна точно передбачити, воно визначається неконтрольованими причинами.

Випадковий **сигнал** (процес) — функція часу, значення якої в кожний момент є випадковою величиною. У теорії ймовірностей користуються також рівнозначними термінами — «стохастичний процес» і «ймовірнісний процес». Випадкові сигнали (процеси) на відміну від детермінованих не можна описати однією функцією часу, тому використовується множина характеристик, які в комплексі оцінюють імовірнісні властивості сигналу.

Функція $x(t)$, яку отримують за результатами експериментальних спостережень, називають **реалізацією** випадкового сигналу на довжині реалізації $0 \le t \le T$.

Часто використовують такі характеристик випадкових сигналів: математичне сподівання; дисперсія; середньоквадратичне відхилення; кореляційні функції; спектральні щільності та ін. Беруть також низку припущень та гіпотез. Передовсім

ЗМІСТ