

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗМІНИ ТЕМПЕРАТУРИ КАВИ ПРИ ДОДАВАННІ ВЕРШКІВ

І.М. Кожухівська, О.П. Зінькевич, К.М. Сологуб

***Анотація.** В результаті дослідження реального процесу (додавання вершків до кави) отримали диференціальну модель зміни температури кави при додаванні до неї вершків в певні моменти часу. На основі цього, враховуючи природні припущення, проведено числові розрахунки і визначено як вплинули домішки на температуру кави.*

***Ключові слова:** диференціальне рівняння, температура кави, вплив домішок, закон зміни температури кави.*

Вступ. Навколишня температура впливає на наше життя набагато сильніше, ніж нам здається на перший погляд. Більшість із нас отримує велике задоволення випивши чашку гарячої кави або чаю. Як стало відомо, ці напої не тільки зігрівають, але і забезпечують появу у людини більш позитивних емоцій.

Американські психологи Джон Барг (John Bargh) із Йельського університету (Yale University) Коннектикут і Лоуренс Уільямс (Dr. Lawrence Williams) із Університету штату Колорадо (University of Colorado) установили взаємозв'язок між температурою тіла і емоційною теплотою людини. Вони провели прості і наглядні експерименти, результати яких опублікували в науковому журналі «Science». В одному із експериментів групі бажаючих пропонували гарячу і охолоджену каву. Всім учасникам надали документи з інформацією про незнайомих для них людей, про яких треба було висловити свою думку. Цікаво, що людина, яка взяла гарячу каву, характеризувала незнайому їй людину більш позитивно, чим людина, яка взяла охолоджену каву.

В другому експерименті (наприклад) учасники тримали або гарячу грілку, або грілку з льодом. Кожному з них пропонували подарунковий сертифікат чи для товариша, чи для себе. Ті хто тримав гарячу грілку просив подарунковий сертифікат для товариша, а ті, хто тримав грілку з льодом — для себе особисто.

Ряд дослідів дозволили зробити висновок, що інформація про температуру тіла людини і емоційну теплоту обробляється однією і тією ж частиною головного мозку. Тому кожен із нас любить прийняти гарячу ванну, випити гарячу каву, з'їсти гарячий курячий бульйон, щоб знову відчувти пов'язані з цим позитивні відчуття. Цією обставиною вчені пояснюють давні традиції різних народів знайомитися і продовжувати знайомство за чашкою кави, чаю чи іншого гарячого напою.

Взявши до уваги подану інформацію, визначимо як впливають домішки на температуру кави, зокрема вершки.

Методи досліджень. Двоє молодих людей замовили у кав'ярні каву і вершки. Коли їм одночасно принесли по чашці однаково гарячої кави і вершків, вони зробили наступне:

Дівчина додала до кави вершки, накрила чашку паперовою серветкою і вийшла зателефонувати подрузі. Хлопець відразу накрив чашку паперовою серветкою, а до кави додав ту саму кількість вершків тільки через 5 хвилин, коли повернулася дівчина, і вони почали пити каву разом. Хто із них пив більш гарячу каву?

Задачу будемо розв'язувати враховуючи природні припущення, які відображають фізичний зміст процесів, що відбуваються, і полягають в наступному. Вважаємо, що теплообмін через поверхню стола і серветки набагато менший теплообміну через бокові стінки чашки; температура пари в чашці над поверхнею рідини дорівнює температурі рідини.

Виведемо спочатку співвідношення, яке показує як зі зміною часу змінилася температура кави в чашці хлопця до змішування кави з вершками.

У відповідності з прийнятими припущеннями згідно відомого закону фізики кількість теплоти, яку отримує повітря від чашки хлопця, визначається співвідношенням

$$dQ = \eta \frac{T - \theta}{l} S dt, \quad (1)$$

де T — температура кави в момент часу t , θ — температура повітря в кав'ярні, η — теплопровідність матеріалу чашки, l — товщина стінок чашки, S — площа бічної поверхні стінок чашки.

Також кількість теплоти, яке буде віддавати кава, можна визначити із рівності

$$dQ = -cm dT, \quad (2)$$

де c — питома теплоємність кави, m — вага кави в чашці. Розглядаючи разом рівняння (1) і (2), приходимо до рівняння

$$\eta \frac{T - \theta}{l} S dt = -cm dT.$$

Відокремимо змінні і прийдемо до рівняння

$$\frac{dT}{T - \theta} = -\frac{\eta S}{lcm} dt. \quad (3)$$

Проінтегруємо диференціальне рівняння (3) і знайдемо, що:

$$\ln|T - \theta| = -\frac{\eta S}{lcm} t + \ln|C|$$

$$\frac{T - \theta}{C} = e^{-\frac{\eta S}{lcm} t}$$

Позначимо початкову температуру кави через T_0 , тобто нехай $T(0) = T_0$, тоді

$$T_0 - \theta = C$$

Отже,

$$\frac{T - \theta}{T_0 - \theta} = e^{-\frac{\eta S}{lcm} t}$$

$$T = \theta + (T_0 - \theta) \cdot e^{-\frac{\eta S}{lcm} t} \quad (4)$$

Формула (4) аналітично описує закон, за яким змінилася температура кави в чашці хлопця до моменту додавання вершків у каву. Тепер розглянемо яким буде закон зміни температури кави після того, коли хлопець додав в чашку вершки. Для цього використаємо рівняння теплового балансу, яке в нашому випадку запишемо у вигляді:

$$cm(T - \theta_{xt}) = c_1 m_1 (\theta_{xt} - T_1) \quad (5)$$

де θ_{xt} — температура суміші в момент часу t , T_1 — температура вершків, c_1 — питома вага вершків, m_1 — вага вершків, які додали до кави.

Із рівняння (5) знайдемо, що

$$\begin{aligned}
 cmT - cm\theta_{xz} &= c_1m_1\theta_{xz} - c_1m_1T_1 \\
 (cm + c_1m_1)\theta_{xz} &= cmT + c_1m_1T_1 \\
 \theta_{xz} &= \frac{c_1m_1}{cm + c_1m_1}T_1 + \frac{cm}{cm + c_1m_1}T
 \end{aligned} \tag{6}$$

Враховуючи рівняння (4), формулу (6) зможемо записати у вигляді

$$\theta_{xz} = \frac{c_1m_1}{cm + c_1m_1}T_1 + \frac{cm}{cm + c_1m_1} \left[\theta + (T_0 - \theta) e^{-\frac{\eta S t}{lcm}} \right] \tag{7}$$

Рівняння (7) описує закон зміни температури кави після додавання вершків в чашку хлопця.

Щоб вивести закон зміни температури кави в чашці дівчини, знову скористасьмося рівнянням теплового балансу, яке в даному випадку набуває вигляду

$$cm(T_0 - \theta_0) = c_1m_1(\theta_0 - T_1) \tag{8}$$

де θ_0 — температура суміші.

Із рівняння (8) визначимо, що

$$\begin{aligned}
 cmT_0 - cm\theta_0 &= c_1m_1\theta_0 - c_1m_1T_1 \\
 (cm + c_1m_1)\theta_0 &= c_1m_1T_1 + cmT_0 \\
 \theta_0 &= \frac{c_1m_1}{cm + c_1m_1}T_1 + \frac{cm}{cm + c_1m_1}T_0
 \end{aligned}$$

Потім, використовуючи рівняння (4), де роль початкової температури грає уже θ_0 , тобто $T_0 = \theta_0$, а добуток $C \cdot m$ заміняємо на суму $cm + c_1m_1$, остаточно отримуємо, що закон зміни температури $\theta_{дівч}$ кави в чашці дівчини аналітично задається формулою

$$\theta_{дівч} = \theta + \left[\frac{c_1m_1}{cm + c_1m_1}T_1 + \frac{cm}{cm + c_1m_1}T_0 - \theta \right] e^{-\frac{\eta S}{l(cm+c_1m_1)}t} \tag{9}$$

Результати та обговорення. Таким чином, для того, щоб дати відповідь на поставлене в задачі питання, залишається тільки звернутися до формул (7) і (9) і провести числові розрахунки, приймаючи до уваги, що

$$c_1 \approx 3,9 \cdot 10^3 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{K}), c \approx 4,1 \cdot 10^3 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{K}), \eta \approx 0,6 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{K})$$

і припустивши для визначеності, що

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 2 \cdot 10^{-2} \text{ кг}, m = 8 \cdot 10^{-2} \text{ кг}, T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \theta = 20 \text{ }^\circ\text{C}, T_0 = 90 \text{ }^\circ\text{C}, S = 11 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \\
 l &= 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, t = 0,3 \cdot 10^3 \text{ с}.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$cm = 4,1 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 328 (\text{Дж} / \text{K})$$

$$c_1 m_1 = 3,9 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 78 \text{ (Дж / К)}$$

$$cm + c_1 m_1 = 328 + 78 = 406 \text{ (Дж / К)}$$

$$\frac{cm}{cm + c_1 m_1} = \frac{328}{406} \approx 0,8; \quad \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} = \frac{78}{406} \approx 0,2$$

$$\frac{\eta S}{lcm} t = \frac{0,6 \cdot 11 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 4,1 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-2}} = \frac{1,98}{0,656} \approx 3$$

$$\frac{\eta S}{l(cm + c_1 m_1)} t = \frac{0,6 \cdot 11 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,406 \cdot 10^3} \approx \frac{1,98}{0,812} \approx 2,4$$

$$\theta_{xl.} = 0,2 \cdot 20 + 0,8 \cdot [20 + (90 - 20) \cdot 0,05] = 4 + 18,8 = 22,8$$

$$\theta_{divch.} = 20 + [0,2 \cdot 20 + 0,8 \cdot 90 - 20] \cdot 0,091 = 20 + 5,1 = 25,1$$

Обчислення показують, що більш гарячу каву пила дівчина.

Висновки.

1. Температура кави залежить від моменту додавання вершків до кави.
2. Більш гарячою буде кава, в яку вершки додали спочатку.
3. Вплив тепла на емоційний стан людини може знайти несподіване застосування в маркетингу. Якщо ви проводите рекламну кампанію на свіжому повітрі в холодний день, то чашка кави чи тепла випічка допоможе вам встановити контакт з покупцями.

Література:

1. В.В. Амелькин. Дифференциальные уравнения в приложениях.- М.: Едиториал УРСС, 2009.—208 с.
2. А.И. Егоров. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями.— 2-е изд., испр.—М.: Физматлит, 2005.—384 с.
3. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння.— 2-ге вид., перероб.і доп. —К.: Либідь, 2003.—600 с.

Авторська довідка:

1. *Зінкевич Олексій Петрович*, доцент; кандидат фіз.-мат. наук, кафедра вищої математики, Національний університет харчових технологій, e-mail: petrozinkevich@mail.ru
2. *Сологуб Катерина Миколаївна*, асистент; кафедра вищої математики, Національний університет харчових технологій, e-mail: skm2011@ukr.net
3. *Кожухівська Ірина Миколаївна*, студентка 1 курсу факультету ХЕТОП.