М.А. Мартиненко,
О.М. Нещадим,
В.М. Сафонов

Математичне програмування

Київ
«Четверта хвиля»
2002

ББК 22.18я73
М29

Р е ц е н з е н т и: д-р. фіз.-мат. наук, проф. М.М. Семко (Академія державної податкової служби України); канд. фіз.-мат. наук, доц. В.О. Борисейко (Київський національний торговельно-економічний університет).

Математичне програмування: Навч. посібник/ М.А. Мартиненко, О.М. Нещадим, В.М. Сафонов. – К.: «Четверта хвиля», 2002. – 220 с.: іл.
ISBN–966-529-073-8.

Навчальний посібник написаний авторами на основі багаторічного досвіду, якого вони набули при читанні курсу лекцій і проведенні практичних занять з дисципліни "Математичне програмування" в Національному університеті харчових технологій та інших навчальних закладах України.

Навчальний стислий теоретичний матеріал посібника відповідає програмі курсу "Математичне програмування" у технологічному університеті, а практичні заняття побудовано на спеціально підібраних задачах, які в основному, мають економічну спрямованість.

Для студентів інженерно-економічних спеціальностей вищих навчальних закладів України.

ББК 22.18я73

ISBN–966-529-073-8.

Передмова

В умовах ринкової економіки особливої актуальності набувають задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів (праці, сировини, обладнання, капіталу), організації виробництва та реалізації продукції. Раціональне вирішення цих проблем неможливе без використання методів математичного програмування та комп'ютерної техніки.

Математичне програмування — розділ прикладної математики, який будує математичні моделі інженерно-економічних процесів і пропонує методи їх дослідження і розв'язування. Дисципліна «Математичне програмування» як складова частина курсу «Математика для економістів» входить до навчальних планів підготовки бакалаврів з економіки та підприємництва. Теоретичною основою цієї дисципліни є лінійна алгебра.

В даному посібнику відображені основні розділи математичного програмування: лінійна алгебра, лінійне, нелінійне, дискретне програмування. Головна увага приділяється методам розв'язування наведених задач. Теоретичні обгрунтування і доведення цих методів наводяться у стислому вигляді. Широко використовуються матрично-векторні позначення, що значно спрощує викладки.

Приведено детальний розв'язок типових задач. Підібрано значну частину задач і вправ для практичних занять. Більшість завдань має умовний характер, а числові параметри підібрано так, щоб спростити обчислення. Розв'язування цих задач — важлива умова оволодіння студентами стаціонарної або заочної форми навчання теоретичними положеннями дисципліни.

Автори сподіваються, що в умовах обмеженості аудиторних годин на вивчення математичних дисциплін даний посібник сприятиме підготовці висококваліфікованих економістів, фінансових працівників комерційних служб і маркетингу, менеджменту, обліку і аудиту, спроможних приймати виважені і обгрунтовані рішення у бізнесі.

Автори

ЧАСТИНА І. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 1. Визначники

Історична довідка. Визначники та їхні властивості. Розкладання Лапласа.

1.1. Історична довідка

Лінійна алгебра як самостійна галузь математики почала формуватися у першій половині XVIII сторіччя, коли вперше у працях німецького математика Лейбніца (1646 – 1716) та швейцарського математика Крамера (1704 – 1752) було введено поняття визначника (детермінанта) і дано загальні формули для розв'язання системи n лінійних рівнянь з n невідомими.

У середині XIX сторіччя у класичних працях англійських математиків Келі (1821 — 1895) і Сільвестра (1814 — 1897) вводиться поняття матриці та закладаються основи матричного числення, що стає зручним апаратом для компактного запису і подальшого аналізу систем лінійних рівнянь. Ідея геометричної інтерпретації розв'язку і дослідження таких систем приводить до основного поняття лінійної алгебри — скінченновимірного векторного (лінійного) простору, що є безпосереднім узагальненням інтуїтивних дво- та тривимірної геометрій. Наведені поняття визначника, матриці, лінійного простору визначаються в найбільш загальній, абстрактній формі, стають об'єктом математичного дослідження.

Паралельно з теоретичними розробками успішно розвиваються і обчислювальні методи лінійної алгебри, які набули особливого значення у зв'язку з розвитком комп'ютерної техніки. В такому напрямі слід перш за все вказати досягнення німецького математика Гаусса (1777 —1855) і французького математика Жордана (1838 — 1922), які запропонували так званий метод послідовних виключень.

Методи лінійної алгебри набули широкого застосування як в різних математичних дисциплінах (теорія диференціальних рівнянь, теорія чисел тощо), так і в інших науках, які потребують математичних досліджень (квантова механіка, математична економіка і т. п.).

1.2. Визначники

Вирази $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.1)$$

$$
\text{і}\ \ \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-
$$

$$
-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1.2)
$$

називаються *визначниками* другого і третього порядків, відповідно.

Символами a_{ij} позначаються елементи визначника, причому індекс i показує номер рядка, а індекс j — номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент. Елементами визначника можуть бути числа, функції тощо.

Схеми обчислення визначників (1.1) і (1.2) безпосередньо випливають з їх означення. Для обчислення визначника третього порядку зручно користуватися *правилом Сарюса*: дописавши за визначником його перші два стовпці, дістаємо додатні і від'ємні члени виразу (1.2), відповідно, із схем:

$$
\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{array}
\quad \text{та} \quad
\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{array}
$$

Приклад 1.1. $\begin{vmatrix} 8 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=8\cdot 3-1\cdot(-2)=26.$ •

Приклад 1.2. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 3\\ 2 & -4 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{vmatrix}=3\cdot(-4)\cdot(-2)+(-5)\cdot 2\cdot(-1)+3\cdot 2\cdot 2-$

$-3\cdot(-4)\cdot(-1)-3\cdot 2\cdot 2-(-5)\cdot 2\cdot(-2)=2,$ оскільки

$$
\begin{array}{ccccc} 3 & -5 & 3 & 3 & -5\\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4\\ -1 & 2 & -2 & -1 & 2\end{array}
\quad \text{і} \quad
\begin{array}{ccccc} 3 & -5 & 3 & 3 & -5\\ 2 & -4 & 2 & 2 & -4\\ -1 & 2 & -2 & -1 & 2\end{array}
$$
•

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається визначник, який утворюється з даного шляхом викреслення i-того рядка та j-того стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток :

$$
A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.
$$

Приклад 1.3. Для елемента $a_{21}=-1$ визначника $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ маємо:

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=5 \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-5\ \bullet$$

Теорема 1.1. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення, тобто

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}\quad \left(i,j=\overline{1,3}\right) \tag{1.3}$$

Формула (1.3), яка доводиться безпосередньо і відома як *розкладання Лапласа*, використовується для обчислення визначників.

Приклад 1.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -8 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}-2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-26\ .\bullet$$

Тут розклали визначник за елементами першого рядка.

Той факт, що визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їхні алгебраїчні доповнення, дає змогу індуктивно ввести означення визначника довільного порядку.

Вираз $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+a_{i4}A_{i4}=$

$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}+a_{4j}A_{4j}$,

де $i,j=\overline{1,4}$ і A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}, називається визначником четвертого порядку.

Отже, визначник четвертого порядку виражається через визначники третього порядку, причому алгебраїчні доповнення його елементів визначаються так само, як і для визначників другого та третього порядків. Аналогічно дають означення визначника п'ятого порядку через визначники четвертого порядку і т. д. Таким чином, вважаючи, що встановлено поняття визначника (n-1)-го порядку, вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad \left(i, j = \overline{1,n}\right)$$

називається визначником n-го порядку.

Визначники мають такі властивості

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями.

Зауважимо, що оскільки наведена властивість встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника, то всі подальші його властивості формулюються лише для рядків, маючи на увазі, що вони одночасно справедливі і для стовпців.

2 Якщо переставити місцями будь-які два рядки, то визначник змінює знак.

3 Якщо один із рядків складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.

4 Якщо визначник має два однакових рядки, то він дорівнює нулю.

5 Спільний множник усіх елементів одного рядка можна винести за знак визначника.

6 Якщо елементи двох рядків пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо кожний елемент і-того рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у першого з яких і-й рядок складається з перших доданків, а у другого — з других, інші ж елементи обох визначників однакові.

8 Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те саме число.

9 Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю.

Зазначимо, що всі властивості визначників доводяться безпосередньою перевіркою.

Зауважимо, що при обчисленні визначника на практиці за допомогою цих властивостей перетворюють його так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, були нулями, а потім розкладають його за елементами цього рядка чи стовпця.

Приклад 1.5.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&-1&-2\\2&1&-1&-2\\-1&1&3&1\\1&2&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&1&2\\-1&1&2&-1\\1&2&0&2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&-1\\2&0&2\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&-1\\2&2\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-(1\cdot2-2\cdot(-1))+2\cdot(1\cdot2-2\cdot2)=-8,$$

де у першому рядку перетворили всі елементи, крім першого, на нулі, додаючи перший стовпець до третього, а до четвертого — перший, помножений на 2 та розклали визначник четвертого порядку за елементами першого рядка, а потім визначник третього порядку — за елементами другого стовпця. •

Запитання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку, третього порядку?
2. Що називається мінором, алгебраїчним доповненням?
3. Сформулюйте основні властивості визначників.
4. Як обчислюються визначники вищих порядків?

Практичне заняття №1.
Визначники.

№ 1.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$.

<u>Розв'язання.</u> За формулою (1.1) маємо:

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-(-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\ \bullet$$

№ 1.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}1 & \log_b a\\ \log_a b & 1\end{vmatrix}$. (Відповідь: 0).

№ 1.3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{vmatrix}$.

<u>Розв'язання.</u> За правилом Сарюса маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot3+1\cdot2\cdot1+3\cdot5\cdot4-3\cdot3\cdot1-2\cdot2\cdot4-1\cdot5\cdot3=40,$$

оскільки

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{matrix} \quad \text{та} \quad \begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}.$$

№ 1.4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. (Відповідь: 0).

№ 1.5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Віднімаючи почленно перший стовпець від усіх інших та після цього розклавши за елементами першого рядка, дістанемо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\cdot(-2)\cdot(-2) = -8. \bullet$$

№ 1.6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. (Відповідь: -3).

В № 1.7 — 1.11 розв'язати рівняння і нерівності:

№1.7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & -x \\ -x & 2x & 1 \end{vmatrix} - 14 = 0$. (Відповідь: $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{3}{2}$).

№1.8. $\begin{vmatrix} (0,5)^{x^2+6} & 0,5 \\ 0,0625 & 2^{-2x} \end{vmatrix} = 0$ (Відповідь: $x = -1$).

№1.9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ x^2 & -4 & x^4 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} < 0$. (Відповідь: $x \in (-2;-1) \cup (1;2)$).

№ 1.10. $\begin{vmatrix} |x+1| & 2 \\ 1 & \frac{1}{x-2} \end{vmatrix} \geq 0$. (Відповідь: $x \in (2;5]$).

№ 1.11. $\begin{vmatrix} 4\sin & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 1$. (Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n = 0, \pm 1, ...$)

В № 1.12. —1.17. обчислити визначники:

№ 1.12. $\begin{vmatrix} -a & 1 & a \\ 0 & -a & 1 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix}$. (Відповідь: 2a).

№ 1.13. $\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -\sqrt{3} & 5 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$. (Відповідь: -12).

№ 1.14. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 17 & -23 & 1 \end{vmatrix}$. (Відповідь:-6).

№ 1.15. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$. (Відповідь: 0).

№ 1.16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. (Відповідь:6).

№ 1.17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. (Відповідь: –7).