

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

---

ИЗВЕСТИЯ  
ВЫСШИХ  
УЧЕБНЫХ  
ЗАВЕДЕНИЙ

# ПИЩЕВАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

---

Издается с 1957 г.

4 (179) • 1987

Выходит 6 раз в год

---

---

**Редакционная коллегия**

**Главный редактор В. Г. Щербаков**

**А. Абдурахимов, С. П. Авакянц, М. П. Асмаев,  
А. С. Большаков, М. А. Гришин, М. И. Даишев (зам. гл. редактора),  
В. Н. Иванец, Е. Д. Казаков, И. Т. Кретов,  
Г. В. Кружков, Н. Н. Липатов, А. М. Маслов, А. П. Николаев,  
И. К. Петров, Т. Н. Прудникова (зам. гл. редактора), Л. И. Пучкова,  
В. Д. Сурков, П. С. Цыганков, И. Г. Чумак**

**Отв. секретарь В. Н. Штатский**

---

Краснодар 1987

распределения толщины пленки сливок по длине камеры сбивания. Анализ безразмерного аналога этого уравнения позволил получить критерии, характеризующие гидродинамику потока сливок в камере сбивания.

2. Полученное дифференциальное уравнение и критерии позволили определить изменение толщины пленки сливок по длине камеры сбивания МНД типа А1-ОЛО/1 в зависимости от ее геометрических и кинематических параметров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кук Г. А. Процессы и аппараты молочной промышленности. — М.: Пищепромиздат, 1960, 2, с. 172.
2. Кук Г. А. Гидродинамическая теория маслообразования. — М.: Пищепромиздат, 1953, вып 4, с. 141.
3. Сурков В. Д., Карнаух В. И. К вопросу о механизме сбивания в маслоизготовителях непрерывного действия. — Изв. вузов СССР, Пищевая технология, 1968. № 6, с. 47.
4. Маслов А. М., Березко В. А. Структурно-механические свойства молочных продуктов. Учеб. пособие. — Л.: ЛТИ им. Ленсовета, 1979.—92 с.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1974. —847 с.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 711 с.
7. Молчанова Н. С., Холпаков Л. П., Шкадов В. Я. Гидродинамика и массообмен в слое жидкости на вращающейся поверхности. — Инж. физ. ж., 1973, 4, с. 648.
8. Картвелишвили Н. А. Нетрадиционные задачи гидравлики. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 169 с.
9. Альтшуль А. Д. Гидродинамические сопротивления. — М.: Недра, 1982. — 224 с.

Кафедра оборудования пищевых производств,  
торговли и общественного питания

Поступила 7 IV 1986

664.1.054:658.5.012.122

## КИНЕТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ САХАРА

В. Г. ТРЕГУБ

Киевский ордена Трудового Красного Знамени технологический институт  
пищевой промышленности

Цель работы — постановка и решение с помощью кинетической модели процесса кристаллизации сахара задач динамической оптимизации режимов функционирования вакуум-аппаратов и кристаллизаторов периодического действия — задачи оптимального быстрогодействия и задачи максимизации выхода готового продукта. Для решения этих задач используем кинетическую модель [1]

$$K_p = K_{p_m} - (K_{p_m} - K_{p_n}) \exp \left[ - \left( \frac{\tau}{\theta} \right)^n \right], \quad (1)$$

где  $K_p$ ,  $K_{p_n}$ ,  $K_{p_m}$  — соответственно текущее, начальное и максимальное массовые содержания кристаллов сахара в утфеле;  $\theta$ ,  $n$  — кинетические константы, постоянная времени и коэффициент формы кинетической кривой;  $\tau$  — время.

Задачу оптимального быстрогодействия сформулируем следующим образом: минимизировать длительность процесса  $\tau_k$  при ограниче-

ниях  $\Omega_1$ , накладываемых на относительное количество новой фазы в конце процесса

$$\tau_k(n, \theta) \rightarrow \min_{n, \theta \in \Omega_1}, \quad (2)$$

$$\Omega_1: \begin{cases} Kp - f(Kp_m, Kp_n, n, \theta, \tau) = 0, \\ (Kp_k/Kp_m)_{доп} - Kp_k(n, \theta)/Kp_m \leq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где (3) другая форма записи уравнения (1);  $(Kp_k/Kp_m)_{доп}$  — допустимое относительное количество новой фазы в конце процесса.

Вторая задача оптимизации заключается в максимизации выхода готового продукта новой (фазы) при ограничениях, накладываемых на длительность процесса:

$$Kp_k/Kp_m(n, \theta) \rightarrow \max_{n, \theta \in \Omega_2}, \quad (5)$$

$$\Omega_2: \begin{cases} Kp - f(Kp_m, Kp_n, n, \theta, \tau) = 0, \\ \tau_{к.о.р} - \tau_k \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\tau_{к.о.р}$  — ограничения по времени окончания процесса. Так как условия протекания процесса влияют прежде всего на кинетические константы  $n$  и  $\theta$ , то в решении этих оптимизационных задач изменение последних рассматривается как управление.

Для решения задачи (2) представим уравнение (1) в виде

$$\tau_k = \theta \left( \ln \frac{Kp_m - Kp_n}{Kp_m - Kp_k} \right)^{1/n}, \quad (7)$$

откуда следует  $\tau_k(n, \theta) \rightarrow \inf \Rightarrow \theta^* = \inf \theta$ , (8)

$$\tau_k(n, \theta) \rightarrow \inf_n \Rightarrow n^* = \begin{cases} \sup n \text{ при } \frac{Kp_k}{Kp_m} > A, \\ \inf n \text{ при } \frac{Kp_k}{Kp_m} < A, \end{cases} \quad (9)$$

где  $A = 1 - 0,368 (1 - Kp_n/Kp_m)$ , при  $Kp_n = 0$   $A = 0,632$ . В случае когда  $Kp_k/Kp_m = A$ ,  $\tau_k$  — инвариантно относительно  $n$ .

Анализ полученного решения выполним с помощью номограммы  $Kp/Kp_m - \tau/\theta$ , построенной для разных  $n$  по уравнению (1) для  $Kp_n = 0$  (рис. 1). Если провести на номограмме прямую ограничений по  $Kp_k$  выше прямой  $Kp/Kp_m = 0,632$ , то точки пересечения этой прямой с кривыми  $Kp/Kp_m(\tau/\theta)$  определяют время окончания процесса  $\tau_k$ . При этом оно будет тем меньше, чем больше  $n$ , что соответствует решению (9). Если провести прямую ограничений по  $Kp_k$  ниже прямой  $Kp/Kp_m = 0,632$ , то  $\tau_k$  будет тем меньше, чем меньше  $n$ , что также соответствует решению (9).

Для решения задачи (5) представим уравнение (1) в виде

$$\frac{Kp}{Kp_m} = 1 - \left( 1 - \frac{Kp_n}{Kp_m} \right) \exp \left[ - \left( \frac{\tau}{\theta} \right)^n \right]. \quad (10)$$

Из уравнения (10) следует очевидное решение этой задачи:

$$\frac{Kp_k}{Kp_m}(n, \theta) \rightarrow \sup \Rightarrow \theta^* = \inf \theta; \quad (11)$$

$$\frac{Kp_k}{Kp_m}(n, \theta) \rightarrow \sup_n \Rightarrow n^* = \begin{cases} \sup n \text{ при } \tau_{к.о.р} > \theta, \\ \inf n \text{ при } \tau_{к.о.р} < \theta. \end{cases} \quad (12)$$

Проанализируем полученное решение с помощью номограммы на рис. 1. Если провести на номограмме прямую ограничений по времени  $\tau/\theta = B > 1$ , то точки пересечения этой прямой с кривыми  $Kp/Kp_m$  ( $\tau/\theta$ ) дадут значения относительного количества новой фазы в конце процесса  $Kp_k/Kp_m$ . При этом  $Kp_k/Kp_m$  будет тем больше, чем больше  $n$ , что соответствует решению (12). Если провести прямую ограничения по времени так, чтобы  $B < 1$ , то  $Kp_k/Kp_m$  будет тем больше, чем меньше  $n$ , что также соответствует решению (12). В случае, когда  $B = 1$ ,  $Kp_k/Kp_m$  инвариантно относительно  $n$ .

Таково решение задач кинетической оптимизации при условии стационарности значений кинетических параметров. Однако можно

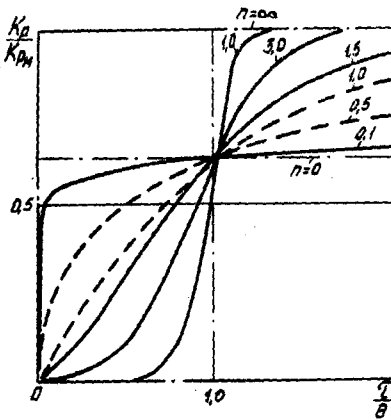


Рис. 1

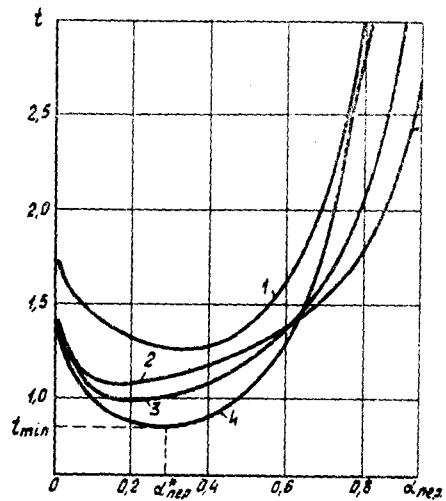


Рис. 2

предположить, что целенаправленное изменение условий реализации периодического процесса может привести к нестационарности кинетических параметров. В этом случае задача оптимального быстрого действия (2) с учетом полученного решения (8) примет вид:

$$\tau_k(n, \theta) \rightarrow \min_{n(\tau) \in \Omega_1} \quad (13)$$

где ограничения  $\Omega_1$  те же, что и в задаче (2). Применим для решения данной задачи принцип максимума [2], приняв в качестве исходного уравнение (1), записанное в дифференциальном виде

$$\frac{dKp}{d\tau} = \frac{n\tau^{n-1}}{\theta^n} (Kp_m - Kp), \quad (14)$$

или введя относительные переменные  $\alpha = Kp/Kp_m$  и  $t = \tau/\theta$

$$\frac{d\alpha}{dt} = n(1-\alpha) \left( \ln \frac{1}{1-\alpha} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (15)$$

Тогда гамильтониан данной задачи имеет вид:

$$H[\Psi_1(t), \alpha(t), n(t)] = \Psi_0 + \Psi_1 n(1-\alpha) \left( \ln \frac{1}{1-\alpha} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad (16)$$

где  $\Psi_0$  — постоянная, а функцию  $\Psi_1(t)$  находим, решая уравнение  $d\Psi_1/dt = -\partial H/\partial \alpha$ . В результате приводим гамильтониан к виду:

$$H[\dots] = \Psi_0 + \Psi_1^0 n \left( \ln \frac{1}{1-\alpha} \right)^2 \frac{n-1}{n} = \Psi_0 + \Psi_1^0 Y, \quad (17)$$

где  $\Psi_1^0$  — постоянная, причем  $\Psi_1^0 > 0$ .

Согласно принципу максимума условием оптимальности процесса в данном случае является определение  $n(t)$ , максимизирующего функцию Гамильтона (17). Так как  $\Psi_1^0 > 0$ , то максимум гамильтониана (17) совпадает с максимумом  $Y$ . Если на параметр  $n$  наложено ограничение  $n \in [n_1, n_2]$ , причем  $n_1 < n_2$ , то в начальной стадии процесса, как следует из выражения (17), максимум  $Y$  доставляет  $n_1$ . В ходе развития процесса для сохранения максимума функции Гамильтона необходимо один раз сменить  $n_1$  на  $n_2$ , т. е. алгоритм управления запишется в следующем виде

$$\min_n \tau \Rightarrow \max_n H \Rightarrow \max_n Y \Rightarrow n^* = \begin{cases} n_{min} & \text{при } \alpha < \alpha_{пер}^* \\ n_{max} & \text{при } \alpha \geq \alpha_{пер}^* \end{cases} \quad (18)$$

$$n \in [n_{min}, n_{max}]$$

где  $\alpha_{пер}$  — относительное содержание твердой фазы в момент переключения.

Так как при  $\alpha = \alpha_{пер}$ ,  $\alpha(n_1) = \alpha(n_2)$ , то, используя (15), можно записать

$$n_1 \left( \ln \frac{1}{1-\alpha_{пер}} \right)^{-1/n_1} = n_2 \left( \ln \frac{1}{1-\alpha_{пер}} \right)^{-1/n_2}. \quad (19)$$

Решая уравнение (19) относительно  $\alpha_{пер}$ , получим:

$$\alpha_{пер}^* = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{\frac{n_1 n_2}{n_2 - n_1}} \right] \quad (20)$$

при  $n_1 < n_2$ .

Например, при ведении процесса в наиболее распространенной области  $n \in [0,5; 3,0]$  максимум функции  $Y$  на первом полузамкнутом промежутке по  $\alpha$  (0; 0,289) достигается при  $n_1 = 0,5$  (рис. 2).

Для достижения максимума функции  $Y$  на втором полузамкнутом промежутке по  $\alpha$  (0,289; 0,95) необходимо при  $\alpha_{пер}^* = 0,289$  сменить  $n_1$  на  $n_2 = 3,0$ . Другие варианты  $\alpha_{пер}$  и  $n_1/n_2 = 0,8/3; 1,1/3; 0,5/2$  дают большие значения  $t$ . Точки пересечения кривых с осью ординат соответствуют длительности процесса, протекающего при стационарных  $n$ . Как видно из рис. 2, ведение процесса при нестационарных  $n$  позволяет сократить его длительность на 25—40%.

Реализация режимов работы вакуум-аппаратов и кристаллизаторов с охлаждением при оптимальных стационарных значениях кинетических параметров достигается выбором таких значений пересыщения и температуры сгущенного раствора в момент закладки кристаллов, скоростей подкачки и выпаривания воды — для вакуум-аппарата; начального кристаллосодержания, пересыщения и скорости охлаждения утфеля — для кристаллизатора, которые в соответствии с полученными ранее [1] соотношениями обеспечивают предельные  $n$  (11, 14) и  $\theta$  (10, 13). Ведение процесса при оптимальных нестационарных значениях  $n$  может быть осуществлено путем разделения утфеля, сваренного в одном аппарате до  $\alpha_{пер}^*$  при нижнем предельном значении  $n$ , на два вакуум-аппарата и окончания в них процесса уже при верхнем предельном значении  $n$ . Уваривание с разделением начального объема сваренного утфеля применяется при варке утфеля grano fino в используемой на Кубе трехпродуктовой схеме без рециркуляции оттеков [3]. В нашей стране испытание такого способа при уваривании утфеля I продукта на Тимашевском сахароза-

воде [4] позволило сократить цикл уваривания на 15—20% при прочих равных условиях, причем начальное количество кристаллов и утфеля до разделения и в момент разделения определялось интуитивно. Полученные соотношения дают возможность использовать для реализации такого процесса расчетные методы и еще больше сократить цикл уваривания.

#### ВЫВОДЫ

1. Ведение кристаллизации сахара при полученных оптимальных стационарных значениях кинетических параметров позволяет минимизировать выход кристаллического сахара.

2. Оптимальное быстрое образование и роста новой фазы, протекающего при нестационарных значениях коэффициента формы кинетической кривой, который изменяется в пределах ограничений  $n_1 \leq n \leq n_2$ , достигается при  $n = n_1$ , если  $\alpha < \alpha_{пер}$  и  $n = n_2$ , если  $\alpha \geq \alpha_{пер}$ .

3. Реализация процесса кристаллизации сахара при нестационарных оптимальных значениях коэффициента формы кинетической кривой с помощью разделения начального объема сваренного утфеля обеспечивает сокращение длительности уваривания на 25—40% по сравнению с процессом при оптимальных стационарных значениях этого параметра.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Трегуб В. Г. Исследование кинетики кристаллизации сахара в утфельных вакуум-аппаратах и кристаллизаторах. — Автореф. канд. дис., Киев, 1969. — 30 с.
2. Понтрягин А. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
3. Армандо Маркес Семпе, Трегуб В. Г. Кинетика кристаллизации сиропов сахарного тростника. — Изв. вузов СССР, Пищевая технология, 1982, № 6, с. 79.
4. Тужилкин В. И., Карагодин М. А., Сапронов А. Р. Уваривание утфеля I продукта на кристаллической основе. — Сахарная пром-сть, 1982, № 5, с. 25.

Кафедра автоматизации производственных процессов пищевых производств

Поступила 2 X 1986

664.1.055.001.24:539.62

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ САХАРНЫХ УТФЕЛЕЙ

С. В. ДАНИЛИН, С. А. ГРИБКОВ

Краснодарский ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт

Показано [1, 2], что между углом наклона фильтровальной перегородки ротора (сита) инерционных центрифуг и углом трения движущегося по ней продукта имеется определенное соответствие. Зависимость коэффициента трения  $f$  сахарных утфелей по никелевому сити от различных факторов исследовал М. И. Ильин [3]. Опыты проводились им по традиционному, классическому методу, когда варьируется значение одного фактора при фиксировании остальных на