

УДК 517.54

НОВАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ПОСТОЯННЫМ РАСТЯЖЕНИЕМ:
Препринт 84.70. /Сафонов В.М. - Киев: Ин-т математики АН УССР,
1984. - 16 с.

В работе доказывается новый критерий постоянства функций.



Институт математики АН УССР, 1984

Известно, что если для непрерывной в области $D \subset \mathbb{C}$ функции $f(z)$ комплексного переменного в каждой точке существует предел

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (1)$$

и если он на плотном множестве в D равен нулю, то $f(z) \equiv \text{const}$.

Цель настоящей работы состоит в доказательстве обобщения этого результата, а именно: то же заключение, но с заменой условия (1) на условие существования

$$\rho(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \quad (2)$$

Все понятия и обозначения, используемые в работе без предварительного объяснения, в точности соответствуют принятым в работе [3].

Т е о р е м а . Пусть для непрерывной в области D функции $f(z)$ существует (конечный или бесконечный) предел $\rho(z)$ (2) в каждой точке, исключая не более чем счетное их множество. Если он равен нулю на плотном множестве, то $f(z) \equiv \text{const}$.

З а м е ч а н и е . То, что утверждение теоремы и в самом деле нетривиально, показывает пример функции $f(z) = \varphi(x) + i\varphi(y)$, где $\varphi(x)$ - пример Помпейю [2] всюду дифференцируемой нигде не постоянной функции на прямой, для которой множество $\{x: \varphi'(x) = 0\}$ всюду плотно; функция $f(z)$ здесь осуществляет к тому же нульмерное отображение плоскости. Конечно, о существовании предела (2) здесь не может быть и речи.

Доказательство нашей теоремы будет основано на определенной последовательности лемм и конструкций.

Заметим прежде всего, что в условиях нашей теоремы множество $\{z: \rho(z) = 0\}$ как множество уровня функции первого класса имеет тип G_δ ; так как оно плотно в \mathcal{D} , то оно - второй категории всюду (в \mathcal{D}). На нем $\rho(z) = 0$, а значит, $df = 0$, следовательно в окрестности любой точки из \mathcal{D} найдется круг, на котором f удовлетворяет условию Липшица [3].

Теперь допустим, что мы сумеем доказать теорему при дополнительном ограничении: $f \in Lip$; покажем, как отсюда следует ее заключение для всей области \mathcal{D} .

Итак, имеем следующую ситуацию: для непрерывной функции $f(z)$ в \mathcal{D} имеем всюду плотное (в \mathcal{D}) открытое множество \mathcal{O} , в каждой компоненте которого $f = const$, причем на оставшемся множестве $\mathcal{P} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{O}$ существует предел (2). Продолжим максимально функцию f с сохранением этого свойства; предположение, что $\mathcal{P} \neq \emptyset$, мы и приведем к противоречию.

Прежде всего, очевидно, что \mathcal{P} (если оно непусто) - совершенно. Далее, если множество $\mathcal{P}\{z: \rho(z) = \infty\}$ - не первой категории на \mathcal{P} , то легко выделить порцию $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap d$ (d - круг в \mathcal{D}), на которой выполняется

$$|f(z') - f(z)| > |z' - z|, \text{ где } z, z' \in \mathcal{P}';$$

но тогда функция $F(z) = f(z) + \frac{1}{2}z$ будет голоморфна в $d \setminus \mathcal{P}'$ и однолистка на \mathcal{P} . Поэтому она осуществляет внутреннее отображение круга $d \subset \mathcal{D}$; очевидно, мы можем считать его однолистным в d . Для обратной функции $\phi(w)$ в области $\delta = F(d)$ мы имеем тогда следующее:

- 1) образ $\mathcal{P}' = F(\mathcal{P}')$ нигде не плотен в δ ;
- 2) в каждой компоненте открытого множества $\delta \setminus \mathcal{P}'$ функция $\phi(w)$ голоморфна;
- 3) растяжение

$$\tau(w) = \lim_{k \rightarrow 0} \left| \frac{\Phi(w+k) - \Phi(w)}{k} \right|$$

существует в каждой точке $w \in \pi'$ (исключая не более чем счетное их множество) и ограничено (числом 2).

Из всего этого следует, что Φ голоморфна всюду в δ , а потому и \mathcal{F} голоморфна всюду в d , значит, голоморфной, а потому постоянной всюду в d . Будет f_2 , но это противоречит условию максимальности множества $\mathcal{O} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$ по отношению к этому свойству.

Итак, множество $\mathcal{P} \{z: \rho(z) = \infty\}$ - первой категории на \mathcal{P} . Но тогда множество $\mathcal{N} = \mathcal{P} \{z: \rho(z) < \infty\}$ - всюду второй категории на \mathcal{P} и представимо в виде:

$$\mathcal{N} = \bigcup_k \mathcal{P}_k,$$

$$\text{где } \mathcal{P}_k = \mathcal{P} \left\{ z: \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \leq k \text{ при } |h| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Так как \mathcal{P}_k - замкнуты ([3]), то можем считать, что на некоторой порции $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap d$ ($d \subset \mathcal{D}$ - круг) имеем $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}_k$; но тогда прежние рассуждения относительно $\mathcal{F}(z)$, применимые в данном случае к функции $\tilde{\mathcal{F}}(z) = f(z) + 2kz$, снова приводят к противоречию со свойством максимальности открытого множества $\mathcal{O} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$.

Таким образом, нам осталось доказать теорему при дополнительном ограничении: $f \in \text{Lip}$.

Поскольку функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица в \mathcal{D} , то она является R -дифференцируемой почти всюду (в \mathcal{D}) [3]. Заметим, так же, что предел (2) существует в каждой точке $z \in \mathcal{D}$, исключая лишь счетное их множество. Поэтому, предполагая противное, на множестве положительной меры в области \mathcal{D} обязательно найдется точка \tilde{z} , в которой выполняется следующее:

- 1) $f(z)$ является R -дифференцируемой функцией;
- 2) существует растяжение $\rho(\tilde{z})$ (2);
- 3) $f(z)$ не является моногенной.

Если бы это было не так, то, как легко показать с помощью формулы Грина, $f(z)$ была бы голоморфной, а значит, и постоянной функцией в \mathcal{D} .

Итак, множество многозначности $m_{\tilde{z}}$ функции $f(z)$ в точке \tilde{z} представляет собой окружность с центром в начале координат и радиуса $R = |f_{\tilde{z}}|$ где $f_{\tilde{z}}$ вычисляется в точке \tilde{z} [3].

Возьмем положительные числа a, b на вещественной оси такие, что $a + b < |f_{\tilde{z}}| = R$ и $a > b$.

Рассмотрим функцию $\mathcal{F}(z) = f(z) + az + b\bar{z}$. Тогда все производные числа функции $\mathcal{F}(z)$ в точках множества второй категории в \mathcal{D} (а именно, там где $\rho(z) = 0$) будут равны $(a - b) > 0$, поэтому в каждом круге $d \subset \mathcal{D}$ мы сумеем найти точки локального гомеоморфизма отображения

$w = \mathcal{F}(z)$, причем гомеоморфизма с положительной степенью (так как якобиан его в точках, где $\rho(z) = 0$, равен $(a^2 - b^2) > 0$).

Заметим, что якобиан отображения $\mathcal{F}(z)$ в точке \tilde{z} отрицателен ($J(\tilde{z}, \mathcal{F}) < 0$) в силу выбора чисел a, b . Поэтому можно выделить непустое замкнутое нигде не плотное множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ такое, что в каждой компоненте открытого множества $\mathcal{O} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$ отображение $w = \mathcal{F}(z)$ является внутренним с положительной локальной степенью.

Поскольку якобиан $J(\tilde{z}, \mathcal{F})$ в точке $\tilde{z} \in \mathcal{D}$ не равен нулю (является отрицательным), то отображение $\mathcal{F}(z)$ является изолированным в \tilde{z} и, следовательно, найдется такая окрестность $\mathcal{U}(\tilde{z})$ этой точки, что $\mathcal{U}(\tilde{z}) \cap \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\tilde{z}) = \tilde{z}$.

Рассмотрим круг $\delta \subset \mathcal{F}(\mathcal{U})$ такой, что $\delta \cap \mathcal{F}(\partial\mathcal{U}) = \emptyset$ и $\delta \ni \tilde{w}$, где $\tilde{w} = \mathcal{F}(\tilde{z})$.

Покажем, что образ $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ содержит внутренние точки.

В самом деле, предполагая противное, найдем точку $w' \in \delta$ и $w' \notin \mathcal{F}(\mathcal{P})$. Так как отображение $\mathcal{F}(z)$ в $\mathcal{U} \setminus \mathcal{P}$ внутреннее, то, как известно,

$$\deg(\mathcal{F}, w') = \sum_{z \in \mathcal{F}^{-1}(w') \cap \mathcal{U}(\tilde{z})} \gamma(z) > 0,$$

где $\gamma(z)$ - локальная степень отображения [5].

С другой стороны, поскольку $D(\tilde{z}, F) < 0$ и точка \tilde{z} - изолирована в множестве $F^{-1}F(\tilde{z})$, то

$$\deg(F, \tilde{w}) = -1,$$

Но это противоречит тому, что степень отображения $F(z)$ в круге \mathcal{D} должна быть постоянной [6].

Далее, выделим в области \mathcal{D} все компактные порции \mathcal{P} , образ каждой из которых нигде не плотен. Такими являются, например, порции меры нуль: ведь липшицево отображение и такие множества отображает также на множества меры нуль.

В результате останется некоторое непустое совершенное множество $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{D}$, обладающее тем свойством, что образ каждой его порции не является нигде не плотным, причем из предыдущего следует, что каждая его порция имеет положительную меру.

Обозначим образ $F(\mathcal{P}_0)$ через K где K - двумерный компакт (замыкание некоторого открытого множества W - плоскости). Оставшееся доказательство сведем к цепи лемм, которые будут представлять и самостоятельный интерес.

Л е м м а I. При выполнении указанных условий найдется множество $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}_0$ всюду второй категории (в \mathcal{P}_0) такое, что каждой точке $z_n \in \mathcal{E}$ соответствует бесконечная последовательность точек $\{z_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) дополнения

$\mathcal{D} \setminus \mathcal{P} \subset \mathcal{D} \setminus \mathcal{P}_0$, для которых $F(z_n) = F(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через \mathcal{F}_p множество точек в W -плоскости, каждой из которых соответствует не более чем p точек дополнения $\mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$ (точки ветвления считаем кратными). Тогда ясно, что имеем $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$

Каждое из множеств \mathcal{F}_p замкнуто на плоскости, как легко видеть. Покажем теперь, что в наших условиях \mathcal{F}_p нигде не плотно на компакте K .

Предположим противное. Тогда найдем множество \mathcal{F}_p содержащее некоторый открытый круг $k \subset K$. Пусть точке $w_0 \in k$ соответствует максимально возможное число N точек $\{z_n\}$ ($n = 1, 2, \dots, N-1, N$) из $\mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$ среди всех точек круга k . Тогда $N \leq p$.

Построим теперь такие окрестности $U(z_n)$ ($n = 1, 2, \dots, N-1, N$) точек z_n в дополнении $\mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$, чтобы образ каждой из них являлся фиксированным кругом k с центром

в точке w_0 и чтобы

$$\overline{U(z_n)} \subset \mathcal{D} \setminus \mathcal{P} \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

Возможность такого построения легко следует из свойств внутренних отображений.

По условию значение w_0 принимается функцией $F(z)$ в некоторой точке $z_0 \in \mathcal{P}_0$. Поэтому так как $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0$ - нигде не плотно в \mathcal{D} и, в силу (3), z_0 лежит вне множества

$\bigcup_{m=1}^N \overline{U(z_m)}$, то существует последовательность точек $\{z_m\}$, $z_m \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$ ($m=1, 2, 3, \dots$), сходящихся к точке z_0 . Поскольку $F(z)$ - непрерывная функция, то $w'_m = F(z'_m) \rightarrow w_0$ и, начиная с некоторого номера m_0 , точки w'_m попадут во внутрь круга k . Это означает, что если w'_m - одна из таких точек, то ей должно соответствовать по крайней мере $N+1$ точек из дополнения $\mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$, что противоречит определению точки w_0 и числа N .

Полученное противоречие и доказывает, что каждое из множеств \mathcal{F}_p ($p=0, 1, 2, \dots$) нигде не плотно на компакте K . Тогда множество $\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_p$ - первой категории в K и, следовательно, дополнение $E = K \setminus \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_p$ - плотное в K множества типа G_δ . Поэтому прообраз $\mathcal{E} = F^{-1}(E)$ на \mathcal{P}_0 также является плотным G_δ а, значит, и всюду второй категории (на \mathcal{P}_0). Это множество \mathcal{E} и есть, очевидно, искомое.

Лемма тем самым доказана.

Л е м м а 2. Множество H точек плотности на \mathcal{P}_0 - всюду второй категории (и, конечно, полной меры).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость леммы следует из того, что множество

$$\mathcal{P}_k = \left\{ z \in \mathcal{P}_0 : \frac{\text{mes}(\mathcal{P} \cap Q(z, r))}{\pi r^2} \leq 1 - \frac{1}{k}, r \leq \frac{1}{k} \right\}$$

($k=1, 2, 3, \dots$) замкнуто при любом k , где $Q(z, r)$ - круг $|z' - z| \leq r$, а так как каждая порция \mathcal{P}_0 - положительной меры, то \mathcal{P}_k нигде не плотны на \mathcal{P}_0 .

Рассмотрим конечное открытое покрытие окружности $|z|=1$ равными дугами длины σ ($\sigma > 0$ - произвольное, но фиксированное число); соответствующие им углы с вершиной в начале координат $z=0$ обозначим через ω_{ϱ} ($\varrho=1, 2, \dots, \varrho_0-1, \varrho_0$). Угол ω_{ϱ} , снесенный параллельно в точку z будем обозначать через $\omega_{\varrho}(z)$.

Рассмотрим теперь множество E из леммы I и обозначим через E_{ϱ} подмножество его точек таких, что если $z_0 \in E_{\varrho}$, то найдется последовательность $\{z_n\}$, $z_n \rightarrow z_0$, $z_n \in (\mathcal{D} \setminus \mathcal{P}) \cap \omega_{\varrho}(z_0)$ ($n=1, 2, \dots$), для которой $F(z_n) = F(z_0)$.

Ясно, что $E = \bigcup_{\varrho=1}^{\varrho_0} E_{\varrho}$. Из доказательства леммы I легко следует, что каждое E_{ϱ} - типа G_{δ} (но плотными они могут оказаться на различных порциях \mathcal{P}_0). Ясно, также, что одно из E_{ϱ} - плотно на некоторой порции \mathcal{P}_0 . Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что этой порцией является все множество \mathcal{P}_0 , а систему координат выберем так, чтобы биссектриса угла ω_{ϱ} совпадала с положительным направлением вещественной оси; E_{ϱ} и ω_{ϱ} обозначим соответственно через E_0 и ω_0 .

Обозначим через V, Ω открытые углы раствора σ , биссектрисы которых соответственно лучи $\arg z = \frac{\sqrt{\sigma}}{2}$ и

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{2} > \arg z > 0.$$

Л е м м а 3. На \mathcal{P}_0 найдется множество точек E' второй категории таких, что для каждой $z_0 \in E'$ существует последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in V(z_0) \cap E_0$, $z_n \rightarrow z_0$, а также последовательность $\{z'_n\}$, $z'_n \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{P}$, $z'_n \in \omega_0(z_n) \cap \Omega(z_n)$, $z'_n \rightarrow z_0$, $F(z'_n) = F(z_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Покажем снова, что дополнение к множеству E' - множество первой категории.

Обозначим через $F_m \subset \mathcal{P}_0$ множество точек z со следующим свойством: какова бы ни была точка $z' \in V(z) \cap E_0$,

$|z' - z| < \frac{1}{m}$ соответствующая ей последовательность $\{z'_n\}$, $z'_n \in (\mathcal{D} \setminus \mathcal{P}) \cap \omega_0(z')$, $z'_n \rightarrow z'$, $F(z'_n) = F(z')$ не содержит точек внутри угла $\Omega(z)$.

Легко видеть, что F_m - замкнуто; так что если их

объединение - на первой категории, то найдется порция $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0 \cap d_0$ (d_0 - круг, $d_0 \subset \mathcal{D}$), которая содержится в одном из \mathcal{F}_m .

Так как множество $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{P}_0$ всюду второй категории, то по лемме 2 найдем точку $\zeta_0 \in \mathcal{E}_0$ плотности \mathcal{P}_0 . Значит, кроме того, существует последовательность $\{\zeta_n\}$, $\zeta_n \in \omega_0(\zeta_0) \cap (d_0 \setminus \mathcal{P})$,

$$\zeta_n \rightarrow \zeta_0, \mathcal{F}(\zeta_n) = \mathcal{F}(\zeta_0).$$

Для удобства возьмем $\frac{1}{2m}$ - окрестность точки ζ_0 и все дальнейшие построения будем проводить именно в ней.

Обозначим через V' вертикальный угол по отношению к V и пусть $\ell \subset V'(\zeta_0)$ - луч, пересекающий \mathcal{P}_0 по линейному множеству $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0 \cap \ell$, для которого точка ζ_0 является точкой (односторонней) плотности.

Для каждой точки $\zeta \in \mathcal{P}'_0$ построим угол $\Omega(\zeta)$.
 Объединение $\bigcup_{\zeta \in \mathcal{P}'_0} \Omega(\zeta)$ есть открытое множество G .

Поскольку граница ∂G - липшицева кривая, пересекающая ℓ по множеству \mathcal{P}'_0 с точкой плотности ζ_0 , то ℓ есть касательная к ∂G . Другими словами, найдется такое α_0 , что объединение $\Omega' = \bigcup_{\zeta \in \mathcal{P}'_0 \cap Q(\zeta, \alpha_0)} \Omega(\zeta)$ содержит часть

правой полуплоскости $\text{Re } \zeta > \text{Re } \zeta_0$, ограниченной сверху лучом $\arg(\zeta - \zeta_0)$.

Но это означает, что Ω' содержит всю последовательность $\{\zeta_n\}$, $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$, а потому найдется точка $\tilde{\zeta} \in \mathcal{P}_0 \cap \ell = \mathcal{P}'_0$, для которой угол $\Omega(\tilde{\zeta})$ содержит точки последовательности $\{\zeta_n\}$, а так как точка ζ_0 для $\tilde{\zeta}$ лежит внутри $V(\tilde{\zeta})$, то получим противоречие.

Этим доказательство леммы исчерпывается.

На основании леммы 3 найдется множество $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}_0$ второй категории (на \mathcal{P}_0) с указанным там свойством; так как \mathcal{P}_0 положительной меры, то \mathcal{E}' несчетно, поэтому найдется точка

$\zeta_0 \in \mathcal{E}'$, в которой существует

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \right|.$$

Покажем, что это невозможно.

В самом деле, пусть биссектриса угла $\Omega(z_0)$ есть луч $\arg z = \frac{\pi}{4}$; угол $V(z_0)$ содержит последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in \mathcal{D}_0$, $z_n \rightarrow z_0$ таких, что для каждой из них пересечение $\omega_0(z_n) \cap \Omega(z_0)$ содержит точку z'_n , $F(z'_n) = F(z_n) = c_n$, $z'_n \rightarrow z_0$; кроме того, в силу выбора точки z_0 найдется последовательность $\{\bar{z}_n\}$, $\bar{z}_n \in \omega_0(z_0) \cap (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0)$, $\bar{z}_n \rightarrow z_0$, для которой $F(\bar{z}_n) = F(z_0) = c_0$.

Выберем последовательности $\{\bar{z}_n\}$, $\{z_n\}$, $\{z'_n\}$ так, чтобы они имели определенные полукасательные в точке z_0 .

Имеем:

$$F(\bar{z}_n) = c_0 = f(\bar{z}_n) + a\bar{z}_n + b\bar{\bar{z}}_n,$$

$$F(z_0) = c_0 = f(z_0) + az_0 + b\bar{z}_0.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}_n \rightarrow z_0} \frac{f(\bar{z}_n) - f(z_0)}{\bar{z}_n - z_0} &= \lim_{\bar{z}_n \rightarrow z_0} \frac{-a\bar{z}_n - b\bar{\bar{z}}_n + c_0 + az_0 + b\bar{z}_0 - c_0}{\bar{z}_n - z_0} = \\ &= -(a + be^{-2i\alpha}), \end{aligned}$$

$$\text{где } |\alpha| \leq \frac{\sigma}{2}.$$

Отсюда имеем:

$$\lim_{\bar{z}_n \rightarrow z_0} \left| \frac{f(\bar{z}_n) - f(z_0)}{\bar{z}_n - z_0} \right| = \left| a + be^{-2i\alpha} \right| =$$

$$= \left| a + b(\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha) \right| = \sqrt{(a + b \cos 2\alpha)^2 + b^2 \sin^2 2\alpha} =$$

$$= \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2ab \left(-\frac{4d^2}{2!} + \frac{16d^4}{4!} - \dots \right)} =$$

$$= a + b + O(\sigma),$$

где $O(\sigma)$ - величина порядка σ .

Далее:

$$F(z_n) = c_n = f(z_n) + a z_n + b \bar{z}_n,$$

$$F(z_0) = c_0 = f(z_0) + a z_0 + b \bar{z}_0.$$

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \lim_{z_n \rightarrow z_0} \frac{c_n - c_0}{z_n - z_0} - (a - b e^{-2i\beta}),$$

где $|\beta| \leq \frac{\sigma}{2}$ и предел $\lim_{z_n \rightarrow z_0} \frac{c_n - c_0}{z_n - z_0} \equiv A$

существует; таким образом, имеем

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = A - a + b e^{-2i\beta} =$$

$$= A - a + b (\cos 2\beta - i \sin 2\beta) =$$

$$= A - a + b \left(1 - \frac{4\beta^2}{2!} + \dots + i \frac{2\beta}{1!} - i \frac{8\beta^3}{3!} + \dots \right) =$$

$$= A - a + b + O(\sigma).$$

Наконец,
$$F(z'_n) = c_n = f(z'_n) + a z'_n + b \bar{z}'_n,$$

$$F(z_0) = c_0 = f(z_0) + a z_0 + b \bar{z}_0.$$

Отсюда

$$\lim_{z'_n \rightarrow z_0} \frac{f(z'_n) - f(z_0)}{z'_n - z_0} = A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \varphi)} - (a - ib e^{-2i\gamma}),$$

где $|\varphi| \leq \frac{\sigma}{2}$, $|\gamma| \leq \frac{\sigma}{2}$.

Итак, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{z'_n \rightarrow z_0} \frac{f(z'_n) - f(z_0)}{z'_n - z_0} &= \frac{A}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\varphi} - a + ib e^{-2i\gamma} = \\ &= \frac{A}{2} (1+i) (\cos \varphi + i \sin \varphi) - a + ib (\cos 2\gamma - i \sin 2\gamma) = \\ &= \frac{A}{2} (1+i) - a + ib + O(\sigma). \end{aligned}$$

Поскольку в точке z_0 существует предел (2) и $O(\sigma)$ - величина порядка σ , где σ - фиксированное малое число, то

$$|A - a + b| = a + b + O(\sigma),$$

$$\left| \frac{A}{2} (1+i) - a + bi \right| = a + b + O(\sigma).$$

Пусть $A = A_1 + i A_2$, тогда

$$(a+b)^2 + O(\sigma) = A_1^2 + a^2 + b^2 + 2A_1 b - 2A_1 a - 2ab + A_2^2,$$

$$(a+b)^2 + O(\sigma) = \frac{A_1^2}{4} + a^2 + \frac{A_2^2}{4} - A_1 a + A_2 a -$$

$$-\frac{A_1 A_2}{2} + \frac{A_1^2}{4} + \frac{A_2^2}{4} + b^2 + A_1 b + A_2 b + \frac{A_1 A_2}{2}$$

Откуда:

$$\begin{cases} A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 b - 2A_1 a = 4ab + O(\sigma) \\ A_1^2 + A_2^2 - 2aA_1 + 2aA_2 + 2A_1 b + 2A_2 b = \\ = 4ab + O(\sigma) \end{cases} \quad (4)$$

Из последних равенств получаем:

$$A_2 = O(\sigma).$$

Итак, подставляя выражение для A_2 в первое равенство из (4), получаем следующее:

$$A_1^2 + 2A_1 b - 2A_1 a - 4ab + O(\sigma) = 0,$$

$$A_1^2 + 2A_1(a-b) - 4ab + O(\sigma) = 0,$$

$$A_{1, II} = (a-b) \pm (a+b + O(\sigma)).$$

Пусть теперь угол $\Omega(z_0)$ имеет в качестве биссектрисы луч $\arg z = \frac{\pi}{6}$. В силу леммы 3 можно выбрать последовательность $\{\xi_n\} \rightarrow z_0$ так, чтобы она имела определенные полукасательные в точке z_0 и $\xi_n \in \Omega(z_0) \cap \omega_0(z_0)$. Вычислим растяжение в этом случае, используя найденные выражения для A_1 и A_2 .

Итак,

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_n \rightarrow z_0} \frac{f(\xi_n) - f(z_0)}{\xi_n - z_0} &= \frac{A}{2} e^{i(\frac{\pi}{6} + \psi)} - a + bi e^{-2i\psi} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} A_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} i A_2 + \frac{1}{4} A_1 i - \frac{1}{4} A_2 - a + bi + O(\sigma), \end{aligned}$$

где $|\psi| \leq \frac{\sigma}{2}$, $|\mu| \leq \frac{\sigma}{2}$, $\mathcal{F}(\xi_n) = \mathcal{F}(z_n) = c_n$.

В случае, когда $A_1 = 2a + O(\sigma)$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_n \rightarrow z_0} \left| \frac{f(\xi_n) - f(z_0)}{\xi_n - z_0} \right| &= \left| \frac{\sqrt{3}}{4} (2a + O(\sigma)) + \right. \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{4} i O(\sigma) + \frac{1}{4} (2a + O(\sigma)) i - \frac{1}{4} O(\sigma) - a + bi + \\ &+ O(\sigma) \left. \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} a + \frac{1}{2} ai - a + bi + O(\sigma) \right| = \\ &= \sqrt{2a^2 - \sqrt{3}a^2 + b^2 + ab + O(\sigma)}. \end{aligned}$$

Поскольку растяжение в точке z_0 постоянное, то приходим к следующему:

$$2a^2 - \sqrt{3}a^2 + b^2 + ab + O(\sigma) = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$ab + (\sqrt{3} - 1)a^2 + O(\sigma) = 0.$$

Так как $O(\sigma)$ - величина малая и $(\sqrt{3} - 1) > 0$, то последнее равенство противоречит выбору числа a, b .

Пусть, теперь, $A_1 = -2b + O(\sigma)$. Аналогично приходим к выражению:

$$\frac{3}{4}b^2 + a^2 + \sqrt{3}ab + \frac{1}{4}b^2 = a^2 + b^2 + 2ab + O(\sigma).$$

Откуда также получаем искомое противоречие, поскольку $O(\sigma)$ - величина малая.

Теорема доказана.

1. Bohr H., Ueber Streckentreue und conforme Abbildung, Math. Ztschr. 1 (1918).
2. Pompeiu T., Sur la continuité des fonctions de variable complexe, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (2) 7 (1905), p.p. 264-315.
3. Трохимчук Ю.Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. - М.: Физматгиз, 1963. - 212 с.
4. Трохимчук Ю.Ю. Теорема Г. Бора и ее обобщение. Матем. сб., 45 (87), № 2 (1958), с. 233-260.
5. Трохимчук Ю.Ю. О непрерывных отображениях областей эвклидова пространства. - Укр. мат. журн., 1964, т. XVI, № 2, с. 196-211.
6. Роднянский А.М. О непрерывных и дифференцируемых отображениях открытых множеств эвклидова пространства. - Матем. сб., т. 42 (84), 1957, с. 179-195.

Сафонов Владимир Михайлович

Новая теорема об отображениях с постоянным
растяжением

Препринт 84.70

Редактор В.Э. Гонтковская

Подп. в печ. 14.12.84. БФ 29035. Формат 60x84/16.
Бумага тип. Офс. печать. Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,8.
Тираж 130 экз. Заказ 875. Цена 10 коп.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН УССР
252601, Киев, ГСП, ул. Решина, 3