

33. ГРАНИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ПЛОСКИХ КВАЗІСТАТИЧНИХ ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

О.М. Нецадим

Національний університет біоресурсів і природокористування України

О.П. Зінкевич, В.М. Сафонов

Національний університет харчових технологій

В плоскій в'язкопружній області $D(t)$, обмеженій гладким замкненим контуром $L(t)$ при $t \geq 0$ розв'язується квазістатичне рівняння руху

$$\mu \Delta \overset{\Gamma}{u}(\overset{\Gamma}{y}, t) + (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \overset{\Gamma}{u}(\overset{\Gamma}{y}, t) - \mu \int_0^t q(t - \tau) [\Delta \overset{\Gamma}{u}(\overset{\Gamma}{y}, \tau) + 1/3 \text{grad} \text{div} \overset{\Gamma}{u}(\overset{\Gamma}{y}, \tau)] d\tau + \overset{\Gamma}{f}(\overset{\Gamma}{y}, t; \overset{\Gamma}{u}) = \overset{\Gamma}{0} \quad (1)$$

при заданих напруженнях $\overset{\Gamma}{p}_n(\overset{\Gamma}{x}, t)$ в точках контуру $L(t)$:

$$2\mu \text{Def} \overset{\Gamma}{u}(\overset{\Gamma}{x}, t) + \lambda \overset{\Gamma}{n} \text{div} \overset{\Gamma}{u}(\overset{\Gamma}{x}, t) - \int_0^t \{2\mu q(t - \tau) \text{Def} \overset{\Gamma}{u}(\overset{\Gamma}{x}, \tau) - 2/3 \mu q(t - \tau) \overset{\Gamma}{n} \text{div} \overset{\Gamma}{u}(\overset{\Gamma}{x}, \tau)\} d\tau = \overset{\Gamma}{p}_n(\overset{\Gamma}{x}, t). \quad (2)$$

Тут позначено: μ, λ – миттєво-пружні сталі; Δ – оператор Лапласа; $\overset{1}{u}(\overset{1}{y}, t)$ – вектор зміщення; $\overset{1}{f}(\overset{1}{y}, t; \overset{1}{u}) = \rho_0 \overset{\Gamma}{m}(\overset{\Gamma}{y}, t) [1 - \text{div} \overset{\Gamma}{u}(\overset{\Gamma}{y}, t)]$ ($\overset{1}{m}(\overset{1}{y}, t)$ – інтенсивність масових сил, $\rho_0 = \rho(\overset{1}{y}, 0)$ – густина матеріалу, $\overset{1}{y} \in D(t)$); $q(t) = ct^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ – ядро релаксації Абеля ($c > 0, \alpha \in (0, 1)$ – параметри матеріалу) [1]; $\text{Def} \overset{1}{u}(\overset{1}{x}, t)$ – тензор деформації; $\overset{1}{n}$ – нормаль до контуру в точці $\overset{1}{x} \in L(t)$.

Із зростанням часу $t > 0$ межа $L(t)$ області $D(t)$ зміщується за законом:

$$\overset{1}{x} = \overset{1}{x}(l, t), \quad \overset{\Gamma}{x}(l, 0) = \overset{\Gamma}{x}(l),$$

де $\overset{\Gamma}{x}(l)$ – задана неперервна функція; l – довжина контуру у початковий момент часу $t = 0$.

Розв'язок задачі (1) - (2) шукається у вигляді в'язкопружних потенціалів

$$\overset{\Gamma}{u}(\overset{\Gamma}{y}, t) = \overset{\Gamma}{u}[f] + \sum_{k=1}^2 e^{\Gamma_k} \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \overset{\Gamma}{v}(l, \tau) \cdot \overset{\Gamma(k)}{v}(\overset{\Gamma}{y} - \overset{\Gamma}{x}; t - \tau) dl, \quad (3)$$

тут $\overset{\Gamma}{u}[f] = \sum_{k=1}^2 e^{\Gamma_k} \int_0^t d\tau \iint_{D(\tau)} \overset{\Gamma(k)}{v}(\overset{\Gamma}{y} - \overset{\Gamma}{x}; t - \tau) \cdot \overset{\Gamma}{f}(\overset{\Gamma}{x}, \tau) ds$, $\overset{\Gamma(k)}{v}(\overset{\Gamma}{y} - \overset{\Gamma}{x}; t - \tau)$ – фундаментальний

розв'язок рівняння (1), який визначається за умови $\overset{1}{f}(\overset{\Gamma}{y}, t) = e^{\Gamma_k} \delta(t - \tau) \delta(\overset{\Gamma}{y} - \overset{\Gamma}{x})$.

Фундаментальний розв'язок у виражено через дві скалярні функції $\omega(\overset{1}{x}, t)$ і $\varphi(\overset{1}{x}, t)$:

$$4\pi v^{(1)}(\vec{x}-\vec{y}, t-\tau) = \text{rot } e^{\Gamma_3} \frac{\partial \omega(\vec{x}-\vec{y}, t-\tau)}{\partial x_2} + \text{grad} \frac{\partial \varphi(\vec{x}-\vec{y}, t-\tau)}{\partial x_1},$$

$$4\pi v^{(2)}(\vec{x}-\vec{y}, t-\tau) = -\text{rot } e^{\Gamma_3} \frac{\partial \omega(\vec{x}-\vec{y}, t-\tau)}{\partial x_1} + \text{grad} \frac{\partial \varphi(\vec{x}-\vec{y}, t-\tau)}{\partial x_2}.$$

Ці функції мають такий вигляд:

$$4\pi \varphi(\vec{x}, t) = \frac{3r^2(1-\ln r)}{2(3k+4\mu)} \left[\delta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4c\mu}{3k+4\mu} \right)^n \frac{t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} \right] - \psi_0(\vec{x}, t);$$

$$4\pi \omega(\vec{x}, t) = \frac{r^2(1-\ln r)}{2\mu} \left[\delta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} \right] - \psi_0(\vec{x}, t),$$

де позначено

$$\psi_0(\vec{x}, t) = \frac{r^2}{8\mu} \left\{ \frac{3k+\mu}{3k+4\mu} \delta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{4\mu}{3k+4\mu} \right)^{n+1} \right] \frac{c^n t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} \right\}, \quad r = |\vec{x}-\vec{y}|.$$

Підстановка виразу (3) у граничну умову (2) приводить до системи інтегральних рівнянь відносно компонент шуканої векторної щільності $\overset{\Gamma}{v}(l, t)$ потенціалу:

$$\begin{aligned} \pi v_1(l_0, t) + \int_{L(t)} \sum_{i=1}^2 v_i(l, t) K_{1i}(l, l_0; t) \left| \frac{\partial \overset{\Gamma}{x}(l, t)}{\partial l} \right| dl + \\ + \int_0^t k(t-\tau) d\tau \int_{L(\tau)} \sum_{i=1}^2 v_i(l, \tau) k_{1i}(l, l_0; t, \tau) \left| \frac{\partial \overset{\Gamma}{x}(l, \tau)}{\partial l} \right| dl = \psi_1(l_0, t); \\ \pi v_2(l_0, t) + \int_{L(t)} \sum_{i=1}^2 v_i(l, t) K_{2i}(l, l_0; t) \left| \frac{\partial \overset{\Gamma}{x}(l, t)}{\partial l} \right| dl + \\ + \int_0^t k(t-\tau) d\tau \int_{L(\tau)} \sum_{i=1}^2 v_i(l, \tau) k_{2i}(l, l_0; t, \tau) \left| \frac{\partial \overset{\Gamma}{x}(l, \tau)}{\partial l} \right| dl = \psi_2(l_0, t), \end{aligned} \quad (4)$$

де $K_{ij}(l, l_0; t)$ і $k_{ij}(l, l_0; t, \tau)$ – ядра рівнянь, $k(t) = \frac{3k}{4\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4c\mu}{3k+4\mu} \right)^n \frac{t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}$, праві

частини $\psi_1(l_0, t)$ та $\psi_2(l_0, t)$ є відповідно нормальною та дотичною компонентами функції $\overset{\Gamma}{\psi}(l_0, t) \equiv \overset{\Gamma}{n}_0 \psi_1(l_0, t) + \overset{\Gamma}{s}_0 \psi_2(l_0, t) = 2\pi \overset{\Gamma}{p}_n(l_0, t) + \overset{\Gamma}{g}[f]$ (вираз $\overset{\Gamma}{g}[f]$ одержується із лівої частини співвідношення (2), якщо туди підставити замість $\overset{\Gamma}{u}$ функцію $\overset{\Gamma}{u}[f]$).

При чисельному розв'язуванні одержаної системи інтегральних рівнянь другого роду (4) застосовується метод “кроків за часом” [2].

Література:

1. Белоносов С.М. Исследование методами теории потенциалов плоских течений диэлектрической несжимаемой жидкости.- В кн.: Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов. Труды симпозиума. Т.3. - К., 1969. - С.3-16.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.