Кросс-корреляционная голография с предварительной модуляцией волнового фронта

А. В. Гнатовский,
О. В. Золочевская,
Н. В. Медведь
Институт Физики НАН Украины
Украина, 252028, Киев, проспект Науки, 46
Тел. (044) 265-9968

В данной работе описан принцип действия и экспериментальные возможности двухэлементной корректирующей голографической системы. Такая система позволяет реализовать кросс-корреляционный тип преобразования пучков, взаимодействующих с голограммой. Это, в отличие от традиционного типа, позволяет расширить область применения известных голографических методик на нестационарные лазерные пучки, что представляет практическое значение.

Корректирующие свойства любой голографической схемы связаны с фундаментальным свойством голограммы — возможностью оперировать с двумя пучками с комплексно-сопряженными амплитудами полей. Таким образом, для голограммы, записанной в момент времени t_1, в плоскости (ξ, η) при участии поля $U(\xi, \eta) = A \exp\left[if(\xi, \eta)\right]$ в одном из дифракционных порядков пропускание $T(\xi, \eta)$ описывается выражением $T \sim A \exp\left[if(\xi, \eta)\right]$. Это позволяет при восстановлении в момент t_2 полем $U(\xi, \eta)$ устранить искажения волнового фронта, связанные с произвольным распределением $\exp\left[if(\xi, \eta)\right]$. Такой принцип действия лежит в основе известных методов компенсации аберраций оптических элементов, схем распознавания оптических изображений, наблюдения объектов сквозь искажающую среду и т. п. [1].

Очевидно, что такие применения основаны на автокорреляционном типе преобразования полей, т. е. одинаковых на стадии записи и восстановления голограммы. Однако, в действительности более реальна ситуация, когда эти поля могут значительно различаться, что подводит нас к необходимости использовать кросс-корреляционный тип восстановления голограммы при условии $U(\xi, \eta, t_2) \neq T(\xi, \eta, t_1)$. В литературе подобная ситуация традиционно трактуется как неблагоприятные условия, которые по возможности следует избегать.

В предлагаемой работе рассмотрен другой подход, изначально ориентированный на различие полей при записи и восстановлении голограммы. Указан возможный путь решения проблемы, состоящий в преднамеренном усложнении структуры волнового фронта используемых пучков. Приводится описание оптической схемы и принцип действия базовой корректирующей системы, а также результаты ее применения в ряде важных практических задач.

1. Оптическая схема и принцип действия корректирующей системы

В наиболее наглядном виде двухэлементной корректирующей системе с предварительной пронстранственной модуляцией волнового фронта соответствует схема, показанная на рис. 1. Излучение лазера *Л* с комплексной амплитудой поля $R(x, y)$ светоделительным элементом S_p расщепляется на два пучка. Один из них—опорный—после поворотного зеркала $З_1$ и телескопа T, формирующего пучок с плоским волновым фронтом, попадает на голограмму *Г*. Другой пучок—сигнальный—зеркалами $З_2$ и $З_3$ направляется на пространственный модулятор волнового фронта с комплексным пропусканием $M(x, y)$ и после преобразования Фурье объективом O_1 попадает на голограмму. При восстановлении голограммы в общем случае изменившимся пучком $Q(x, y)$ наблюдение скорректированного пучка проводится в фокальной плоскости объектива O_2 в направлении бывшего опорного пучка.

Рассмотрим принцип действия описанной схемы. Полагаем, что модулятор $M(x, y)$ обладает свойствами диффузно рассеивающего транспаранта и позволяет мультиплицировать угловой спектр падающего на него излучения. Предполагается также, что угловой спектр модулятора значительно шире углового спектра падающего на него излучения: $F\{M\} >> F\{R\}$, а после мультиплицирования пучка R парциальные угловые спектры $F\{R\}_k = \rho_k$ мало перекрываются друг с другом. При таких предпосылках

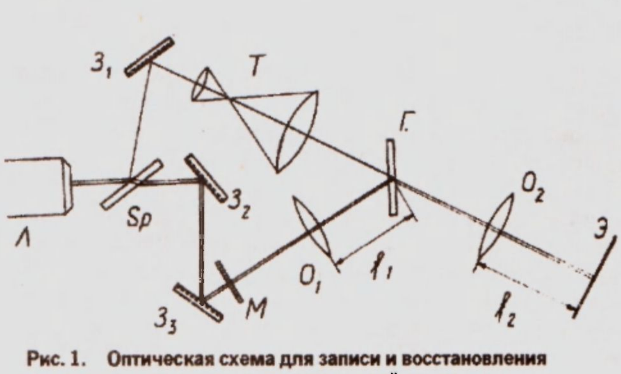

Рис. 1. Оптическая схема для записи и восстановления голограммы в корректирующей системе с предварительной модуляцией волнового фронта.

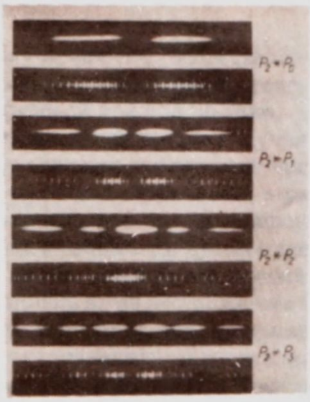

Рис. 2. Распределение энергии на фотоприемнике корректора при обычном и дискретном прдставлениях сравниваемых полей, описываемых одномерными функциями Эрмита – Гаусса.

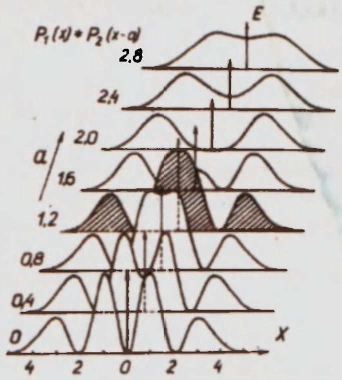

Рис. 3. Распределения пространственных кросс-корреляционных функций для двух одномерных гауссовых пучков при их взаимном поперечном смещении. Заштрихованный график соответствует оптимальному смещению.

записанное на голограмме поле представляет набор функционально одинаковых парциальных голограмм:

$$F\{R^*M^*\} = F(R^*) \otimes \sum_k \delta(\xi - \xi_k, \eta - \eta_k) = \\ = \sum_k \rho_k(\xi - \xi_k, \eta - \eta_k). \tag{1}$$

где $F, \otimes, *$ обозначают соответственно операторы Фурье-преобразования, свертки и комплексного сопряжения, (ξ, η) – координаты в плоскости голограммы.

При восстановлении такой голограммы полем $F\{RM\}$ в плоскости наблюдения (x', y') сформируется пучок

$$W(x', y') = F\left[F\{RM\} \cdot F\{R^*M^*\}\right] = \\ = \left[R \otimes R^*\right] \cdot \sum_k \exp\left(2\pi i(x'\xi_k + y'\eta_k)\right) \tag{2}$$

Выражение (2) описывает спекл-поле, промодулированное огибающей вида $[R \otimes R^*]$. Оно эквивалентно дифракционной картине Фраунгофера от непрозрачного экрана с K статистически независимыми одинаковыми отверстиями, пропускание которых определяется распределением R.

С другой стороны, следует учитывать, что физический механизм, реализующий (2), должен проявляться в форме, удовлетворяющей также требованию корреляционного преобразования для любого сложного поля, рассеянного модулятором. В упрощенном виде модулятор можно рассматривать как набор N' одинаковых рассеивателей с пропусканием $t(x, y)\,\exp if(x, y)$, которые произвольным образом расположены на апертуре модулятора. Полагая, что в пределах расположения $N < N'$ рассеивателей поле, падающее на модулятор, не изменяется, запишем комплексную амплитуду $M(x, y)$ в виде:

$$M(x, y) = t(x, y) \otimes \sum^N \delta(x - x_n, y - y_n)\,\exp if_n(x, y). \tag{3}$$

Пространственная автокорреляционная функция для (3) с учетом теоремы свертки имеет вид:

$$K(x', y') = F\Big[\left|F\{t\}\right|^2 \sum_n^N \sum_m^N \exp 2\pi i(x_n - x_m)\xi \times \\ \times \exp 2\pi i(y_n - y_m)\eta\, \exp 2\pi i(f_m - f_n)\Big] = \left|t \otimes t\right| \times \\ \times \sum_n^N \sum_m^N \delta\left[x' - (x_n - x_m), y' - (y_n - y_m)\right] \exp 2\pi i(f_m - f_n) \tag{4}$$

Выражение (4) описывает спекл-поле, в котором всегда содержится детерминированный центральный максимум на нулевой пространственной частоте, обусловленный N слагаемыми с совпадающими индексами m и n и внеосевой спекл-фон, обусловленный $N(N\text{-}1)$ слагаемыми с различающимися индексами.

Следует подчеркнуть, что форма интенсивного центрального максимума не зависит от структуры поля, падающего на модулятор, и определяется только структурой рассеивателей модулятора, которые задают форму огибающей в распределении поля на апертуре голограммы. Энергетический вклад центрального максимума для автокорреляционной функции (4) при $N \to \infty$ составляет 50% [2].

Объединение механизмов (2) и (4), учитывающих образование детерминированной и фоновой частей в сформированном пучке с учетом возможного различия полей при записи и восстановлении голограмм можно осуществить в виде приближенной формулы

$$W(x', y') \approx [Q \otimes R^*] \cdot [M \otimes M^*]. \tag{5}$$

Отметим, что выражение, аналогичное (5), для случая периодического модулятора может быть строго получено в аналитическом виде [3].

Главным достоинством описанной схемы является возможность разделить структуру сформированного пучка на

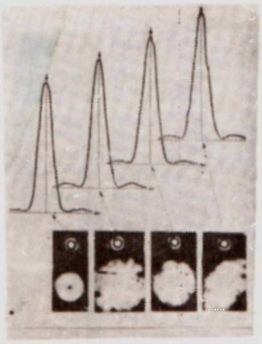

Рис. 4. Синтез пучков с улучшенной пространственной когерентностью из составных мод гелий–неонового лазера.

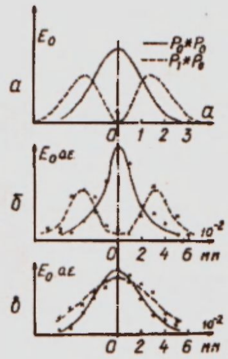

Рис. 5. Величина сигнала на нулевой пространственной частоте при корреляционном сравнении пучков P_1 и P_0 в процессе их поперечного смещения:
а) рассчетные кривые;
б) экспериментальная зависимость без поляризационной модуляции;
в) экспериментальная зависимость после поляризационной модуляции.

детерминированную и фоновую части, причем детерминированная часть определяется только модулятором и не зависит от структуры полей при записи и восстановлении голограммы. Их влияние проявляется в изменениях фоновой части сформированного пучка.

2. Применения двухэлементной корректирующей системы

2.1. Коррелятор с дискретным представлением сигнала.

В корреляционной схеме сравнения будем модулировать исследуемые оптические сигналы при помощи периодических фазовых транспарантов с комплексным пропусканием вдоль одной из декартовых координат:

$$M(x) \sim \exp\left[i\frac{M}{2}\sin 2\pi\nu x\right], \tag{6}$$

где $M/2$ – глубина фазового рельефа, ν – пространственная частота решетки. Тогда на основании (5) можно показать, что интенсивность поля в сформированном пучке описывается выражением:

$$\begin{aligned}|W(x,y)|^2 &\sim [Q\otimes R^*]\cdot[M\otimes M^*] = \\ &= [Q\otimes R^*]\,J_0\left(M\sin\pi\nu\frac{f_1}{f_2}x\right)\end{aligned} \tag{7}$$

где f_1 и f_2 – фокусные расстояния объективов O_1 и O_2, выполняющих Фурье-преобразование, J_0 – функция Бесселя нулевого порядка первого рода. Пространственная кросс-корреляционная функция двух сравниваемых сигналов R и Q оказывается промодулированной периодической автокорреляционной функцией пропускания модулятора. Последняя зависит как от глубины фазовой модуляции $M/2$, так и от приведенной пространственной частоты модулятора $\nu f_1/f_2$. Таким образом, выбирая из соотношения $\Delta x' = \frac{\pi}{\nu}\frac{f_2}{f_1}$ требуемый период «считывания» информации, можно при увеличении рельефа модулятора существенно сузить главные максимумы его автокорреляционной функции. При этом подавляющая часть энергии исследуемого сигнала сконцентрируется в гребенке δ-видных участков поля наблюдения. Поперечное смещение модулятора приводит к смещению гребенки как целого по полю сигнала. Рассчеты показывают, что увеличение энергии на фотоприемнике за счет ее перераспределения может достигать 10 - 30 раз.

В качестве примера дискретного представлени сигнала на рис. 2 приводятся фотографии, полученные при корреляционной обработке (обычной и дискретной) сигналов, описываемых одномерными функциями Эрмита - Гаусса $P_n(x) = H_n \exp-\frac{x^2}{2}$, где H_n – полином Эрмита n-ого порядка: $H_0 = 1$; $H_1 = 2x$; $H_2 = 4x^2 - 2$; ... [4].

2.2. Улучшение пространственной когерентности (на примере сложных поперечных мод газовых лазеров).

Газовые лазеры в режиме наибольшей энергетической отдачи могут генерировать сложные составные поперечные моды, которые представляют собой некогерентное наложение нескольких малоперекрывающихся фундаментальных мод, описываемых функциями Эрмита - Гаусса. Поле составной моды поэтому имеет сложную структуру из перекрывающихся или изолированных модовых пятен, которые пространственно когерентны только «своим» поперечным модам и некогерентны пятнам других составляющих. Степень когерентности такого поля можно повысить, уменьшив расходимость излучения каждой составляющей и направляя преобразованное излучение каждой из них строго в одном и том же направлении. Корреляционная система, согласно соотношению (5) формально позволяет реализовать указанный алгоритм формирования пучка.

Пусть голограмма записывается при участии какой-нибудь одной моды, например близкой к плоской волне TEM_{00}, т.е. $R = P_0 = \exp-\frac{x^2+y^2}{2}$, а восстанавливается составной модой $Q = \sum_s P_n^s$, где s – число пространственно

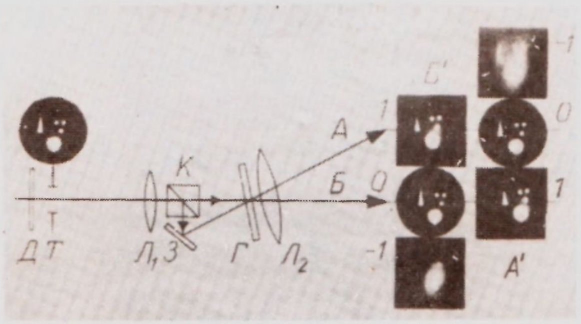

Рис. 6. Схема записи голограммы для изучения компенсации протяженности опорного источника.

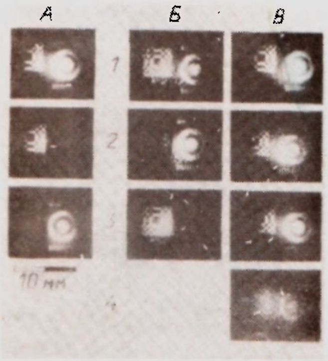

Рис. 7. Изображения транспаранта с различной симметрией фрагментов: А – при диафрагмировании источника; Б – голографические изображения при традиционной компенсации опорного пучка; В – топографические изображения, полученные при использовании двухэлементной схемы коррекции.

некогерентных составляющих, для определенности—одномерных мод. Тогда сформированное поле можно представить в виде:

$$W(x', y') \approx \sum_s \left[P_n^s \otimes P_0^{'} \right] \delta(x_0', y_0') . \quad (8)$$

Это выражение можно трактовать как точечный источник, из которого испускается излучение всех составляющих. При этом, однако, существует трудность принципиального характера, связанная с ортогональностью функций, описывающих гауссовые пучки [4]. Вследствие этого на нулевой пространственной частоте (x_0', y_0') значение распределений $P_n \otimes P_m^* = 0$ при $n \neq m$ и достигает максимума при $n = m$.

Из этой ситуации было найдено по меньшей мере два выхода, каждый из них по сути направлен на устранение ортогональности коррелирующих гауссовых пучков P_n и P_m.

Первый состоит в том, что преобразование поля сложной моды осуществляется при незначительном поперечном смещении голограммы. В результате выражение (8) примет вид:

$$W(x',y') \approx \sum_s \left[P_n^s(x'-\Delta x', y'-\Delta y') \otimes P_0^{'}(x',y') \right] \delta(x_0',y_0') \quad (9)$$

поэтому все составляющие в большей или меньшей степени будут вносить свой энергетический вклад в сформированный пучок. Величина этого вклада зависит от поперечных индексов m и n составляющих, их пространственной ориентации и величины смещений $\Delta x'$ и $\Delta y'$. Численные расчеты, определяющие величину оптимального смещения, приводятся в [5]. На рис. 3 показана динамика преобразования кросс - корреляционных функций для пучков $P_1(x)$ и $P_2(x-a)$ в зависимости от величины a, позволяющая определить оптимальное смещение ($a = 1{,}2$; где $a = 1$ – полуширина пучка моды P_0). На рис. 4 приводятся фотографии нескольких составных мод гелий-неонового лазера и нормированные на максимум распределения энергии в скорректированных пучках с улучшенной пространственной когерентностью.

Другой способ устранения ортогональности в распределении полей P_n и P_m состоит в их дополнительной пространственной поляризационной модуляции, например, при прохождении через анизотропный фазовый клин. При этом пучки меняют форму волнового фронта. В данном случае необходимо использовать поляризационную запись голограммы. Экспериментальная проверка этой идеи проводилась для такой ситуации: запись голограммы осуществлялась осесимметричной модой P_0; преобразовывалась же составная антисимметричная мода, представляющая собой наложение трех мод P_1, повернутых друг относительно друга на 120°. При таких предпосылках, согласно (9) при поперечном смещении a голограммы значения кросс-корреляционных распределений $P_0^{'}(x-a) \otimes P_1(x)$ на нулевой пространственной частоте дают распределения $E(a)$, показанные на рис. 5а. Они имеют максимум при автокорреляционном восстановлении голограмм «своей» модой и двугорбую кривую, достигающую нуля в центре, при восстановлении «чужой» модой. Эти зависимости были подтверждены экспериментально и показаны на рис. 5б. После поляризационной модуляции для любой комбинации $[P_0 \otimes P_0^{'}]$, $[P_1 \otimes P_0^{'}]$ и $[P_1 \otimes P_1^*]$ наблюдается одинаковый ход зависимости $E(a)$ (см. рис. 5в). То есть, имея до и после поляризационной модуляции одинаковые энергетические распределения $|P_n|^2$, пучки P_n после модуляции утрачивают свойство ортогональности, они перестают быть гауссовыми и теперь могут использоваться для восстановления голограмм, обеспечивающих улучшение пространственной когерентности сложной моды, согласно (8).

2.3. Схема Фурье - голографии с нестационарным сложным опорным пучком.

Описанная выше корреляционная схема с предварительной модуляцией волнового фронта естественным образом может реализоваться в наиболее общем виде схемы Фурье - голографии со сложным нестациионарным опорным пучком. Необходимо только, чтобы для него выполнялись условия, обеспечивающие соотнношение (5). В литературе такому вопросу практически не уделялось внимания, поскольку, начиная с основополагающей работы [6], считалось необходимым соблюдать тождественность распределений поля сложного опорного пучка при записи и при восстановлении голограммы.

Предположим, что сложный опорный пучок при записи голограммы формируется после дифракции промодулированной модулятором $M(x, y)$ плоской волны на каком-либо амплитудно-фазовом транспаранте $T(x, y, t_1)$. При восстановлении же пропускание транспаранта изменяется и $T(x, y, t_2) \neq T(x, y, t_1)$. Исходя из известных соотношений для схемы Фурье - голографии [1], для получения изображения предмета, рассеивающего поле $R(x, y)$, необходимо выполнение условия:

$$M(x, y, t_2)\, T(x, y, t_2) \otimes M^*(x, y, t_1)\, T^*(x, y, t_1) \otimes$$

$$\otimes\, R(x, y) = R(x', y)\,. \qquad (10)$$

Выполнение (10) возможно, если

$$M(x,y,t_2)\, T(x,y,t_2) \otimes M^*(x,y,t_1)\, T^*(x,y,t_1) \to \delta(x_0,y_0). \qquad (11)$$

Требование (11) носит слишком общий характер, поскольку отсутствуют априорные сведения о возможной ортогональности распределений $T(x, y, t_1)$ и $T(x, y, t_2)$, о выполнении требования $M(x, y, t_1) \equiv M(x, y, t_2)$ (например, транспарант T может диафрагмировать часть апертуры модулятора). Таким образом, необходимы дополнительные экспериментальные и теоретические исследования корреляционных соотношений вида $M(t_2) \otimes M^*(t_1)$ и $T(t_2) \otimes T^*(t_1)$ для самых разнообразных классов функций.

В связи с этим рассмотрим схему рис. 6, обобщающую схему Фурье-голографии со сложным опорным пучком. Для удобства эксперимента и для наглядности эта схема модифицирована таким образом, что поле, рассеянное предметом, одновременно служило и опорным пучком. В ней модулятором является диффузно рассеивающий фазовый транспарант *Д*, освещающий транспарант *Т*. На голограмме записывается угловой спектр поля *Т Д*. Непосредственно перед голограммой часть излучения отщепляется светоделительным кубиком *К* и поворотным зеркалом *З* направляется на голограмму, формируя опорный пучок. При восстановлении голограммы пучком *А* будем получать изображения, фотографии которых приводятся в колонке *А'*, аналогично—в колонке *Б*. Среди приведенных фотографий следует выделить голографические изображения *1Б'* и *1А'*, повторяющие изображения транспаранта *Т*. Главной их особенностью является значительная устойчивость к изменению транспаранта *Т*: при диафрагмировании частей транспаранта (диска, треугольника и трех точек) качество изображений практически не меняется, изменяется только отношение сигнал - шум. Таким образом, эксперимент показывает, что соотношение (11) в этом случае выполняется.

Такие же результаты получены и для других, более сложных транспарантов. Из них остановимся подробнее на транспаранте, фотография которого приведена на рис. 7, *А1*. Его особенностью является наличие двух фрагментов с прямоугольной и осевой симметрией и, что в рассматриваемом случае важно, с малоперекрывающимися участками углового спектра t_n и t_a. При незначительном продольном смещении голограммы схема рис. 6 позволяет за счет переворачивания отщепленного пучка записать на голограмме в отсутствие модулятора поле вида:

$$U(\xi, \eta) \approx t_n(\xi, \eta)\, t_a(-\xi, -\eta) + t_a(\xi, \eta)\, t_n(-\xi, -\eta)\,, \qquad (12)$$

и при восстановлении получить изображение

$$T(-x', -y') \sim F\left\{t_n(\xi, \eta) + t_a(\xi, \eta)\right\} U^*(\xi, \eta) \approx$$
$$\approx F\left\{t_a(-\xi, -\eta) + t_n(-\xi, -\eta)\right\} \qquad (13)$$

Записанная согласно (12) голограмма имеет интересную особенность: диафрагмируя при ее восстановлении фрагмент с осевой или с прямоугольной симметрией (рис. 7А2,3), получим изображение именно закрытого участка (см. рис. 7Б). С учетом особенностей схемы рис. 6, получение таких изображений согласуется с общеизвестной теорией компенсации протяженности опорного источника [6]. Совершенно иная ситация возникат при записи голограммы с модулятором *Д*, который, благодаря мультиплицирующему свойству (см. выражение (1)), позволяет реализовать соотношение (5), и, вследствие этого, (11). Полученные фотографии восстановленных изображений приведены в колонке рис. 7В. На них отчетливо видно, что независимо от структуры восстанавливающего источника изображение содержит оба фрагмента. Четвертая фотография в этой колонке получена при введении в восстанавливающий пучок дополнительной помехи в виде низкочастотной двумерной фазовой решетки.

Объяснение физического механизма, лежащего в основе полученных результатов, предлагается в [7] и связано со структурными особенностями формируемых спекл-полей.

Приведенные выше результаты не исчерпывают возможностей двухэлементной системы с кросс-корреляционным типом формирования пучков и должна стимулировать поиск новых ее применений.

Литература

1. Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л., *Оптическая голография.* М. "Мир", 1973, 688с.
2. Гнатовский А.В., Зубрилин Н.Г., Николаев М.В. и др. Преобразование световых полей с помощью стохастических когерентно-оптических фильтров. *Укр. физ. журнал*, (1978), т. 23, 9, с. 1452–1454.
3. Гнатовский А.В., Логинов А.П. Корреляционные преобразования фронта лазерных полей. В сб.*"Квантовая электроника"*, К. "Наукова думка", (1979), вып. 17, стр. 62–82.
4. Градштейн И.С.,Рыжин И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М. "Наука" (1971), 1108 с.
5. Гнатовский А.В. Об эффективности коррекции гауссовых пучков голографическими методами. *Укр. физ. журнал*, (1985),т. 30, 9, с. 1313–1320.
6. Строук Дж. *Введение в когерентную оптику и голографию.* М. "Мир", 1967.
7. Гнатовский О.В., и др. Кореляційне видновлення голограф. ~~корреляційних~~ зображень. *Укр. фіз. журнал*, (1994) т. 39, 11, 12 с. 1075–1079. (На укр.)