

# РОЗВ'ЯЗОК ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ ЗАСОБАМИ MATHCAD

О.К. Мазур

О.Л. Сєдих

С.В. Маковецька

*Національний університет харчових технологій*

Розглянемо функцію двох змінних і будемо вважати, що рішення рівняння шукається на квадратній області одиничного розміру. Ідея методу сіток полягає в наступному: розіб'ємо область сіткою, крок сітки по осі  $x$  і по осі  $y$  може бути різний. За визначенням частинна похідна дорівнює

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \approx \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}$$

Якщо розглядати функцію тільки у вузлах, то частинну похідну можна записати у формі

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{h}$$

де вузол  $(i, j)$  відповідає точці  $(x, y)$ . Отриманий вираз називається правою кінцевою різницею. Назва пов'язана з тим, що для обчислення похідної в точці використовуються значення функції в точці, що лежить правіше. Очевидно, що подібний вираз можна було б отримати, використовуючи точку, що лежить зліва

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \approx \frac{u_{i, j} - u_{i-1, j}}{h}$$

Такий вираз називається лівою кінцевою різницею. Можна отримати центральну кінцеву різницю, знайшовши середнє значення цих виразів. Тепер отримаємо вираз для другої похідної

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h^2}$$

В якості прикладу розглянемо рішення хвильового рівняння (рівняння гіперболічного типу).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Рівняння будемо вирішувати методом сіток. Запишемо рівняння в кінцевих різницях

$$\frac{u_{i+1, j} - 2u_{i, j} + u_{i-1, j}}{h^2} = \frac{1}{v^2} \frac{u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}}{\tau^2}$$

Отримане рівняння дозволяє обчислити значення функції  $u$  в момент часу  $j+1$  через значення функції в попередні моменти часу.

$$u_{i,j+1} = v^2 \left( \frac{\tau}{h} \right)^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}$$

Така різницева схема називається явною, так як шукана величина виходить в явному вигляді. Вона стійка, якщо  $\tau \leq h/v$ .

Задамо початкові умови: зміщення струни  $U$  в початковий і подальший моменти часу описується синусоїдальною функцією.

$$n := 20 \quad j := 0..n \quad i := 0..100$$

$$U_{i,0} := \sin\left(\pi \cdot \frac{i}{50}\right) \quad U_{i,1} := U_{i,0}$$

(Збіг зсувів при  $j = 0$  та  $j = 1$  відповідає нульовій початковій швидкості).

Задамо граничні умови: на кінцях струни зсув дорівнює 0 в будь-який момент часу

$$U_{0,j} := 0 \quad U_{100,j} := 0$$

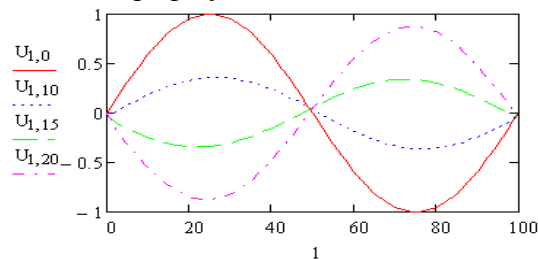
Будемо вважати, що коефіцієнт

$$i := 1..99 \quad j := 1..n-1 \quad \tau := 0..100 \quad a := 1 \quad k := 0.02$$

Записуємо рівняння в кінцевих різницях, відповідно до  $U_{i,j+1}$

$$U_{i,j+1} := a^2 \cdot k \cdot (U_{i+1,j} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i-1,j}) + 2 \cdot U_{i,j} - U_{i,j-1}$$

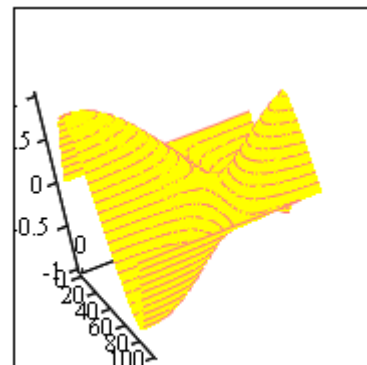
Представляємо результати на графіку



Розв'язок даної задачі представимо у вигляді програми:

```

V := a ← 1
    k ← 0.02
    n ← 20
    for i ∈ 1..99
        Vi,0 ← sin(π i / 50)
        Vi,1 ← Vi,0
        for j ∈ 1..n-1
            V0,j ← 0
            V100,j ← 0
            Vi,j+1 ← a2 · k · (Vi+1,j - 2Vi,j + Vi-1,j) + 2 · Vi,j - Vi,j-1
    
```



### Література:

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами.-М: Наука,1978.-458 с.
2. *Тарасевич Ю.Ю.* Численные методы на Mathcad'e. – Астраханский гос.пед. ун-т: Астрахань, 2000. 70 с.