

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 23(№ 2)

Ужгород 2011

ББК 22.1+72.4 (4УКР)

У-33

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. /
Редкол.: П. М. Гудивок (гол. ред.) та інші. – Ужгород: УжНУ, 2011. – Вип. 23,
№ 2. – 9 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Гудивок П. М., доктор фізико-математичних наук,
професор.

Заст. головн. редактора — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук,
професор.

Відповідальний секретар — Король І. І., доктор фізико-математичних наук,
доцент.

Члени редакційної колегії:

Бабич М. Д., доктор фізико-математичних наук, професор;

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор;

Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор;

Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор;

Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор;

Задирака В.К., член-кореспондент НАН України,

доктор фізико-математичних наук, професор;

Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор;

Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Маляр М. М., кандидат технічних наук, доцент;

Моца А. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Перестюк М. О., академік НАН України,

доктор фізико-математичних наук, професор;

Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор.

Рекомендовано до друку Вченою радою Ужгородського національного
університету, протокол №10 від 26.05.2011

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення
і радіомовлення України

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «ужгородський
національний університет»

Виходить два рази на рік

Збірник наукових праць видається з 1994 року

Адреса редакційної колегії: Україна, 88016 Ужгород, вул. Університетська, 14,
математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): (0312) 642725.

© П. М. Гудивок,

І. І. Король, упорядкування, 2011

© Ужгородський національний університет,
2011

ЗМІСТ

1. <i>Mazur O. K.</i> Optimal control in non-self-adjoint elliptic boundary value problem with terminal criterion	4
--	---

УДК 517.9

О. К. Mazur (National University of Food Technologies)

Optimal control in non-self-adjoint elliptic boundary value problem with terminal criterion

We obtain precise solution of the optimal control problem for elliptic equation with nonlocal boundary conditions in a circular sector with terminal quadratic cost functional in the class of controls that depend only on the angular variable.

В роботі одержано точний розв'язок задачі оптимального керування для еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі та з квадратичним термінальним критерієм якості, в класі керувань, що залежать лише від кутової змінної.

1. Introduction.

The theory of linear-quadratic optimal control problems for distributed systems is well researched [1], [2] and for many cases with the help of Fourier method it can be reduced to countable number of finite-dimensional problems [3]. In this paper we consider control problem for elliptic equation with non-local boundary conditions in circular sector [4], [5] with terminal quadratic cost functional. This problem does not allow total splitting and using L^2 -theory. For resolving this problem in the class of controls that depend only on the angular variable we use apparatus of specially constructed biorthonormal basis systems of function [6].

2. Setting of the problem.

In circular sector $Q = \{(r, \theta) | r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi)\}$ we consider the optimal control problem

$$\begin{cases} \Delta y := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial y}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = u(\theta), & (r, \theta) \in Q, \\ y(1, \theta) = p(\theta), & p(0) = 0, \\ y(r, 0) = 0, & r \in (0, 1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \pi), & r \in (0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

$$J(y, u) = \|y(\alpha)\|_D^2 + \|u\|_D^2 \rightarrow \inf, \quad (2)$$

where $p \in C^1([0, \pi])$ is given function, $\alpha \in (0, 1)$ is given number, $\|\cdot\|_D$ is norm in $L^2(0, \pi)$, which is equivalent to standard one and is given by the equality

$$\|v\|_D = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \right)^{1/2}, \quad \text{where } v_n = \int_0^{\pi} v(\theta) \varphi_n(\theta) d\theta,$$

$$\varphi_0(\theta) = \frac{2}{\pi^2}, \quad \varphi_{2n}(\theta) = \frac{4}{\pi^2} (\pi - \theta) \sin 2n\theta, \quad \varphi_{2n-1}(\theta) = \frac{4}{\pi^2} \cos 2n\theta.$$

The aim of the paper is to find optimal process of the problem (1), (2) in classical sense, that is, to find optimal among admissible processes

$$\{u, y\} \in C([0, \pi]) \times (C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)).$$

For the application of the spectral method we use biorthonormal and complete in $L^2(0, \pi)$ well-known Samarsky-Ionkin systems of functions [6] $\Psi = \{ \varphi_n \}_{n=1}^{\infty}$ and

$$\Phi = \{ \varphi_0(\theta) = \theta, \varphi_{2n}(\theta) = \sin 2n\theta, \varphi_{2n-1}(\theta) = \theta \cos 2n\theta \}_{n=1}^{\infty}. \quad (3)$$

Then $\forall u \in L^2(0, \pi)$

$$u(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot \varphi_n(\theta), \quad (4)$$

where $u_n = \int_0^\pi u(\theta) \varphi_n(\theta) d\theta$. So we seek solution of the problem (1) in the form

$$y(r, \theta) = y_0(r)\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (y_{2n-1}(r)\theta \cos 2n\theta + y_{2n}(r) \sin 2n\theta), \quad (5)$$

where functions $\{y_k(r)\}_{k=0}^{\infty}$ are solutions of the system of ordinary differential equations

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dy_0}{dr} \right) = r \cdot u_0, \quad y_0(1) = p_0, \quad (6)$$

$$r \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dy_{2k-1}}{dr} \right) - (2k)^2 y_{2k-1} = r^2 \cdot u_{2k-1}, \quad y_{2k-1}(1) = p_{2k-1}, \quad (7)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dy_{2k}}{dr} \right) - (2k)^2 y_{2k} - 4k \cdot y_{2k-1} = r^2 \cdot u_{2k}, \quad y_{2k}(1) = p_{2k}, \quad (8)$$

where $p_k = \int_0^\pi p(\theta) \cdot \varphi_k(\theta) d\theta$.

Thus the original problem (1), (2) is reduced to the following one: among admissible pairs $\{u_n(r), y_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ of the problem (6) - (8) one should minimize the cost functional

$$J(y, u) = y_0^2(\alpha) + u_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(y_{2k-1}^2(\alpha) + y_{2k}^2(\alpha) + u_{2k-1}^2 + u_{2k}^2 \right) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} J_k, \quad (9)$$

and for obtained process $\{\tilde{u}_n, \tilde{y}_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ one should prove that the formula (4) defines function from $C([0, \pi])$, and the formula (5) defines function from $C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$.

3. The main result.

For fixed set $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ after integration of (6) - (8) and using conditions at $r = 1$ and conditions $\lim_{r \rightarrow 0} y_n(r) = 0$ we obtain the following formula

$$y_0(r) = p_0 - \frac{u_0}{4} + \frac{r^2}{4} u_0, \quad (10)$$

$$y_1(r) = p_1 r^2 + \frac{u_1}{4} r^2 \ln r. \quad (11)$$

$$y_2(r) = p_2 r^2 + r^2 \left(\frac{u_1}{8} \ln^2 r + \left(\frac{u_2}{4} + p_1 - \frac{u_1}{16} \right) \ln r \right), \quad (12)$$

and for $k \geq 2$:

$$y_{2k-1}(r) = \left(p_{2k-1} - \frac{u_{2k-1}}{4 - (2k)^2} \right) r^{2k} + r^2 \frac{u_{2k-1}}{4 - (2k)^2}, \quad (13)$$

$$y_{2k}(r) = p_{2k} r^{2k} - \frac{1}{4 - (2k)^2} \left(u_{2k} + \frac{4k \cdot u_{2k-1}}{4 - (2k)^2} \right) r^{2k} + \frac{1}{4 - (2k)^2} \left(u_{2k} + \frac{4k \cdot u_{2k-1}}{4 - (2k)^2} \right) r^2 + \left(p_{2k-1} - \frac{u_{2k-1}}{4 - (2k)^2} \right) r^{2k} \ln r. \quad (14)$$

Then admissible set $\{\tilde{y}_k(r), \tilde{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ minimizes (9) if and only if when \tilde{u}_0 is solution of

$$J_0 \rightarrow \inf, \quad (15)$$

and for $\forall k \geq 1$ $\{\tilde{u}_{2k-1}, \tilde{u}_{2k}\}$ is solution of the problem

$$J_k \rightarrow \inf. \quad (16)$$

From formula (10) – (14) we can deduce that J_0 and J_k are quadratic forms on variables u_0 and $\{u_{2k-1}, u_{2k}\}$, and, additionally, $J_0 \geq u_0^2$, $J_k \geq u_{2k-1}^2 + u_{2k}^2$. So the problems (15), (16) have unique solution $\{\tilde{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$, where for $k \geq 2$

$$\tilde{u}_{2k-1} = \Delta_k^{-1} \left(-(a_k^2 + 1)(a_k p_{2k-1} \alpha^{2k} + d_k(a_k b_k - c_k)) + a_k^2 d_k(a_k b_k - c_k) \right), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{2k} = \Delta_k^{-1} & \left(-a_k d_k (a_k^2 + (a_k b_k - c_k)^2 + 1) + \right. \\ & \left. + a_k (a_k b_k - c_k) (a_k p_{2k-1} \alpha^{2k} + d_k (a_k b_k - c_k)) \right), \end{aligned} \quad (18)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_k &= (1 + a_k^2)^2 + (a_k b_k - c_k)^2, \\ a_k &= \frac{\alpha^2 - \alpha^{2k}}{4 - 4k^2}, \quad b_k = \frac{4k}{4 - 4k^2}, \quad c_k = \frac{\alpha^{2k} \ln \alpha}{4 - 4k^2}, \quad d_k = \alpha^{2k} (p_{2k-1} \ln \alpha + p_{2k}). \end{aligned}$$

As $\Delta_k \sim 1$, $k \rightarrow \infty$, so for all sufficiently large $k \geq 1$ we have

$$|\tilde{u}_{2k-1}| + |\tilde{u}_{2k}| \leq \alpha^{2k-1} k^{-1} (|p_{2k-1}| + |p_{2k}|). \quad (19)$$

Functions $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ from (3) are bounded, $|\varphi'_k(\theta)| \leq M \cdot k$, so formula

$$\tilde{u}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k \cdot \varphi_k(\theta) \quad (20)$$

defines function from the class $C^1([0, \pi])$.

The following theorem guarantees, that the formula (20) defines optimal control of our problem in classical sense and, moreover, the class of admissible controls includes smooth on $[0, \pi]$ functions.

Теорема 1. *For every $u \in C^1([0, \pi])$, $u(0) = 0$ the formula (5) with coefficients $\{y_k(r)\}_{k=0}^{\infty}$ from (10) – (14) defines classical solution of the problem (1).*

Доведення. Let us prove that the formula (5) defines function $y(r, \theta)$, for which

$$y \in C([0, 1] \times [0, \pi]), \quad y \in C^2([0, 1] \times [0, \pi]). \quad (21)$$

Let us denote

$$F_1(r, \theta) = \sum_{k=2}^{\infty} (p_{2k-1} \cdot r^{2k} \cdot \theta \cos 2k\theta + p_{2k} \cdot r^{2k} \sin 2k\theta + p_{2k-1} \cdot r^{2k} \ln r \sin 2k\theta).$$

Then F_1 satisfies condition (21). Indeed, functions $r^{2k} \cdot \sin 2k\theta$ and $r^{2k}(\theta \cos 2k\theta + \ln r \sin 2k\theta)$ are harmonic, so for (21) it is sufficient to prove the uniform convergence

of series F_1 on $[0, 1] \times [0, \pi]$, which follows from [5]. For remainder of the series $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot r^{2k} \cdot \theta \cos 2k\theta$ due to Bessel inequality $\sum_{k=2}^{\infty} u_k^2 < \infty$ and Cauchy-Schwarz inequality we have

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} r^{2k} \cdot \theta \cos 2k\theta \right| \leq \left(\sum_{k=N}^{\infty} u_{2k-1}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{((2k)^2 - 4)^2} \right)^{1/2} < \varepsilon, \quad (22)$$

beginning from some $N \geq 1$ uniformly on $[0, 1] \times [0, \pi]$.

Moreover, because of the multiplier $\frac{r^{2k}}{4-(2k)^2}$ the partial derivatives of this series on r and θ up to second order are uniformly convergent series on every compact in $(0, 1) \times (0, \pi)$.

Let us conduct a similar argument for the series $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4-(2k)^2} \left(u_{2k} + \frac{4k \cdot u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \right) \cdot r^{2k} \sin 2k\theta$.

For remainder of the series $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot r^{2k} \cdot \ln r \sin 2k\theta$ we have:

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot r^{2k} \cdot \ln r \sin 2k\theta \right| \leq \left(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{u_{2k-1}^2}{(4-(2k)^2)^2} \right)^{1/2} \times \left(\sum_{k=N}^{\infty} r^{4k} \cdot \ln^2 r \right)^{1/2} < \left(\sum_{k=N}^{\infty} u_{2k-1}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{r^{4N} \cdot \ln^2 r}{1-r^4} \right)^{1/2}$$

for every $\theta \in [0, \pi]$, $r \in (0, 1)$. Then $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1$

$$\sup_{r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi]} \left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot r^{2k} \cdot \ln r \sin 2k\theta \right| < \varepsilon.$$

Let us consider the series $F_2(r, \theta) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot r^k \cdot \theta \cos 2k\theta$. It is uniformly convergent on $[0, 1] \times [0, \pi]$ due to Cauchy-Schwarz inequality.

In the same way one can prove convergence of the series $\frac{\partial F_2}{\partial r}$, $\frac{\partial F_2}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 F_2}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 F_2}{\partial r \partial \theta}$. Convergence of the series $\frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta^2}$ will follow from convergence of the series $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2} \cdot (2k)^2 \cdot r^2 \cdot \theta \cos 2k\theta$, which is convergent with the series

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_{2k-1} \cdot r^2 \cdot \theta \cos 2k\theta. \quad (23)$$

For $u \in C^1([0, \pi])$ we obtain

$$u_{2k-1} = \int_0^{\pi} u(\theta) \cdot \frac{4}{\pi^2} \cos 2k\theta d\theta = -\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} u'(\theta) \sin 2k\theta d\theta = -\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k} u_{2k}.$$

As for $v = u' \in C([0, \pi])$ $\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 < \infty$, $v_n = \int_0^{\pi} v(\theta) \varphi_n(\theta) d\theta$, then $\sum_{k=2}^{\infty} v_{2k}^2 < \infty$ and from Cauchy-Schwarz inequality the series (23) converges uniformly on $[0, 1] \times [0, \pi]$.

Applying the previous discussion to the series

$$F_3(r, \theta) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4 - (2k)^2} \left(u_{2k} + \frac{4k \cdot u_{2k-1}}{4 - (2k)^2} \right) \cdot r^2 \sin 2k\theta,$$

we need to prove the convergence of the series

$$\sum_{k=2}^{\infty} u_{2k} \cdot r^2 \cdot \sin 2k\theta. \quad (24)$$

For $u \in C^1([0, \pi])$, $u(0) = 0$ we have:

$$\begin{aligned} u_{2k} &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} u(\theta) (\pi - \theta) \sin 2k\theta d\theta = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} u'(\theta) (\pi - \theta) \cos 2k\theta d\theta - \\ &\quad - \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} u(\theta) \cos 2k\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} u'(\theta) \cos 2k\theta d\theta - \\ &\quad - \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} u'(\theta) \theta \cos 2k\theta d\theta - \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} u(\theta) \cos 2k\theta d\theta = \frac{1}{k} (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k), \end{aligned}$$

where $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2) < \infty$, as $u' \in C([0, \pi])$. Then from Cauchy-Schwarz inequality the series (24) converges uniformly on $[0, 1] \times [0, \pi]$. Theorem is proved.

1. *Lions J.-L.* Optimal problem in PDE systems. — M.: Mir, 1972. — 414 p.
2. *Egorov A.I.* Optimal control in heat and diffusion processes. — M.: Nauka, 1978. — 463 p.
3. *Kapustyan V.E., Belozherov V.E.* Geometrical methods of modal control. — K.: Naukova Dumka, 1999. — 259 p.
4. *Kapustyan V.E., Lazarenko I.S.* Optimal stabilization by distributed control of solutions of parabolic equations with non-local boundary-value conditions // Computer Math. — 2010. — № 2. — P. 149 – 155.
5. *Moiseev E.I., Ambarzumyan V.E.* About resolvability of non-local boundary-value problem with equality of fluxes // Differential equations.— 2010. — vol. 46, № 5. — P. 718 – 725.
6. *Ionkin N.I.* Solution of boundary-value problem from heat theory with non-classical boundary conditions // Differential equations. — 1977. — vol. 13, № 2. — P. 294 – 304.

Одержано 28.04.2011

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Рукопис повинен бути надрукований за допомогою комп'ютера на аркушах формату А4 (з одного боку). Об'єм статті не повинен перевищувати 15 сторінок.
- 3) Рукопис подається у двох екземплярах, а також електронною копією у вигляді L^AT_EX-файлу (див. пункт 4). Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською, англійською або російською. Перша сторінка оформляється таким чином:
УДК №
Ініціали, прізвище автора, офіційна назва установи, де працює автор
Назва роботи
Текст анотації англійською мовою.
Текст анотації українською мовою.
Текст статті.
- 4) Вимоги до набору:
 - а) програма набору — L^AT_EX2 ϵ ;
 - б) стильовий файл набору — Uzhgorod-Mathematical-Paper.cls (його можна одержати електронною поштою; звертатись у редколегію журналу за адресою dermath@univ.uzhgorod.ua)
 - в) обов'язковий аргумент команд `\label{...}` і `\cite{...}` повинен містити прізвище першого автора статті латиницею (наприклад `\label{IvanenkoEqaution1}`).
 - г) використання власних оточень, макрокоманд та додаткових пакетів не допускається.
- 5) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 6) Використана література подається загальним списком (у порядку посилань на джерела в тексті статті). Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:
 1. Холл М. Теория групп. — М.: Из-во иностр. лит., 1962. — 468 с.
 2. Іванчук І. І. Назва // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №2. — С. 274–278.
 3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2010. — Вип. 22. — С. 94–109.
 4. Можжаев В. М. Название. — М., 1981. — 17 с. — Деп. в ВИНТИ, №8884.
 5. Карпенко С. М. Назва // Чисельні методи і застосування: Тез. допов. конф. (Київ, 27 серп.–2 вер. 1997 р.). — Київ, 1997. — С. 21–22.
- 7) Рукопис слід старанно вчитати.
- 8) Рукописи, оформлені без дотримання зазначених правил, розглядатися редакцією не будуть.

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 23 № 2

2011

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

П. М. Гудивок (головний редактор), В. В. Маринець (заст. головн. редактора),
І. І. Король (відповідальний секретар), М. Д. Бабич, А. А. Бовді, О. Ф. Волошин,
Й. Г. Головач, Д. В. Гусак, В. К. Задирака, Ю. В. Козаченко, О. І. Кузка,
М. М. Маляр, А. І. Моца, М. О. Перестюк, М. Й. Ронто.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат математичного факультету УжНУ: редакція збірника наукових праць
"Науковий вісник Ужгородського національного університету",
серія "Математика і інформатика".

Тел. +38(0312)642725, +38(0312)643395, +38(0312) 64-33-54

E-mail: depmath@univ.uzhgorod.ua

Підписано до друку . 06.2011. Формат 60×84/8. Друк офсетний.

Умов. друк. арк. . Замовлення № .

Тираж .

Видавництво УжНУ "Говерла"

м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.

Тел.: (0312) 233248.

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції —*

Серія Зт №32 від 31 травня 2006р.