

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Трегуб В.Г., Глушенко М.С.

*Проведено математичне моделювання періодичних процесів, на прикладі процесу згущення утфелю, що дало можливість більш детально дослідити процес кристалізації цукру у вакуум-апараті. Математична модель перевірена на адекватність та визначена її чутливість до збурень. Розроблена математична модель дала змогу прослідкувати динаміку зміни процесу та в подальшому розробити алгоритми оптимального управління періодичними процесами в вакуум-апараті.*

**Вступ.** Для розв'язання задач аналізу та синтезу системи керування вакуум-апаратом, відомі різні математичні моделі на основі лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь. Моделі можуть бути побудовані у вигляді загальної моделі процесу уварювання утфелю або окремих складових цього процесу.

Вибір математичної моделі залежить від обраного принципу синтезу системи оптимального керування та найсуттєвіших нестационарностей. Врахувати всі нестационарності в об'єкті неможливо, тому, що по-перше, неможливо побудувати математичну модель, яка буде враховувати всі особливості об'єкта, по-друге, математична модель, що враховує багато нестационарностей в об'єкті є громіздкою, що призведе до значного ускладнення побудови системи оптимального керування, а отже і до її реалізації.

**Постановка та вирішення задачі.** Складність самого процесу варіння утфелю привела до поетапного моделювання періодичних процесів в вакуум-апараті, тобто моделювання проводилось на кожній стадії окремо. В даній статті розглянута математична модель згущення утфелю.

Змінними керування обрали температуру гріючої пари в камері  $t_n$  і тиск вторинної пари  $p_a$ . У цьому випадку на границі зазначеного простору знаходиться камера, що гріється, і паровий простір вакуум-апарату. Одержаний розв'язок, пов'язаний з необхідними значеннями  $t_n$  і  $p_a$ , що досить просто реалізуються за допомогою регуляторів стабілізації.

В процесі згущення утфелю змінюється його густина, теплоємність та температура. Зміна температури при абсолютному тиску в апараті пов'язана з тим, що більш концентровані розчини киплять при більш високій температурі. Отже, основними змінними стану в рівняннях, які описують зміну їх значень при кристалізації, є температура стінки  $t_{cm}$ , температура утфелю  $t_y$ , приріст гідростатичного рівня утфелю  $\Delta h$ , масовий вміст сухих речовин  $CB_y$  і кристалів в утфелі  $Kp$ .

Динаміка зміни температури стінки така сама, як при кристалізації. З врахування відсутності підкачки, рівняння набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dU}{d\tau} = \Phi_{ct.ж} + \Phi_k - \Phi_W - \Phi_{nom}; \\ \frac{dm_y}{d\tau} = -W_{II}, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\Phi_{n.cm}$ ,  $\Phi_{ct.ж}$ ,  $\Phi_W$ ,  $\Phi_{nom}$  - теплові потоки відповідно від пари, що гріє, до поверхні нагрівання; від останньої до розчину; що йде з випареною водою; втрат у навколишнє середовище, кВт;  $U$  - сумарна внутрішня енергія парорідинного простору, кДж;  $m_y$  - маса утфелю, кг;  $W_{II}$  - швидкість випаровування води, кг/с

Для формування математичної моделі уварювання утфелю за основу взята математична модель згущення сиропу з врахуванням кристалічної фази, але вже без підкачування. Після перетворення системи (1) математична модель уварювання утфелю приймає такий вигляд:

$$\begin{cases}
 a_7 \frac{dt_{cm}}{d\tau} = \alpha_1 t_n + \alpha_2 t_y - (\alpha_1 + \alpha_2) t_{cm}, \\
 (V_H \rho_H C_y + S_a \Delta h \rho_y C_y + m_{MT} C_{MT}) \frac{dt_y}{d\tau} = \alpha_2 S_{cm,ac} (t_{cm} - t_y) + \\
 -1.05 W i_y'' + (r_k \frac{Kp}{100} - C_y t_y) - W_H + \frac{\rho_y}{100} (V_H + S_a \Delta h) \times \\
 \times (r_k + C_M t_y - C_k t_y) \\
 S_a \rho_y \frac{d(\Delta h)}{d\tau} = - \left[ (3.45 + 0.04 C_{B_y} - 0.0025 t_y) C_{B_y} / \rho_y \right] W_H, \\
 \rho_y (V_H + S_a \Delta h) \frac{dC_{B_c}}{d\tau} = C_{B_y} W_H, \\
 \frac{\theta^n}{n} \tau^{1-n} \frac{dKp}{d\tau} = Kp_m - Kp
 \end{cases} \quad (2)$$

де  $V_H$  - початковий об'єм утфелю в апараті,  $m^3$ ;  $\rho_H$ ,  $\rho_y$  - відповідно початкова густина сиропу та густина утфелю,  $kg/m^3$ ;  $C_y$ ,  $C_{MT}$  - питомі масові теплоємності утфелю та матеріалу, з якого виготовлений апарат,  $kJ/(kg \cdot ^\circ C)$ ;  $m_{MT}$  - сумарна маса металу апарату,  $kg$ ;  $m_{cm}$  - маса поверхні нагріву,  $kg$ ;  $C_m$  - питома масова теплоємність матеріалу поверхні нагріву,  $kJ/(kg \cdot ^\circ C)$ ;  $S_{n,cm}$ ,  $S_{cm,ac}$  - площа поверхні нагріву відповідно з боку пари і рідини,  $m^2$ ;  $t_c$ ,  $t_n$ ,  $t_{cm}$  - температури сиропу, пари та стінки нагріву відповідно,  $^\circ C$ ;  $i_c''$  - ентальпія парової фази парорідинної суміші,  $kJ/kg$ ;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  - коефіцієнти тепловіддачі відповідно від гріючої пари до стінки та від стінки труб до киплячого утфелю  $kW/m^2 \cdot ^\circ C$ ;  $a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}$  - коефіцієнти, які залежать від характеристик утфелю;  $t_n$  - температура пари в гріючій камері,  $^\circ C$ ;  $\Delta h$  - гідростатичний рівень,  $m$ ;  $C_{B_c}$  - вміст сухих речовин в сиропі, %,  $p_e$  - тиск вторинної пари,  $kPa$ .

Отриманий результат моделювання процесу уварювання утфелю, наведений на рис.1. Так як на цій стадії відсутнє підкачування, то рівень в вакуум-апараті за рахунок випаровування води з розчину починає зменшуватися. Температура утфелю, вміст кристалів цукру та вміст сухих речовин в утфелі повільно зростають.

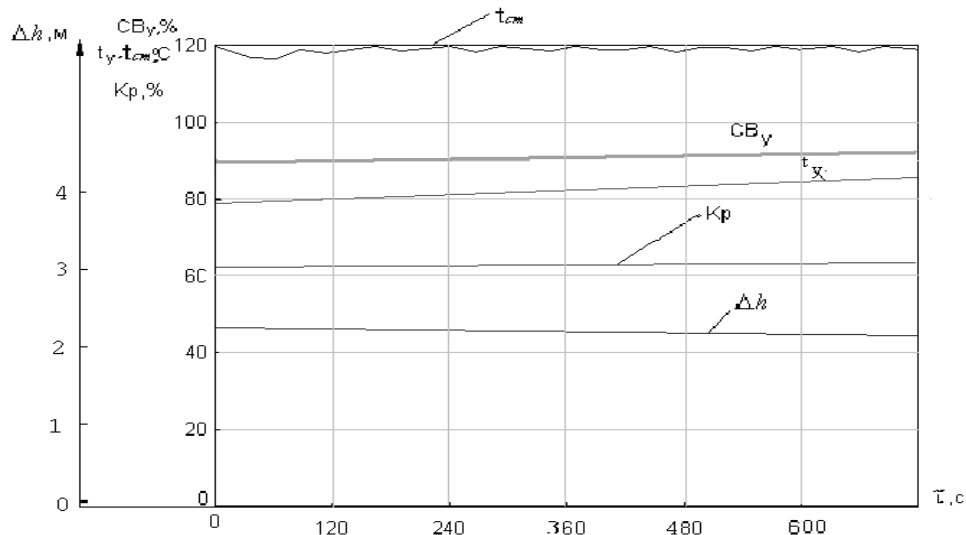


Рис.2. Графік розрахункових залежностей змінних стану від часу для стадії уварювання утфелю

Адекватність моделі перевірялась за допомогою експериментальних даних, отриманих в 2004 році на Бучачському цукровому заводі, і в 2006 році на Лохвицькому цукровому заводі для утфелю першої кристалізації в апаратах з масою звареного утфелю 40 тон, а також в 2007 році на Андрушівському цукровому заводі для утфелю першого продукту з масою звареного утфелю 60 тон при стабільній нормальній роботі. На Лохвицькому цукровому заводі для автоматичної варки утфелю першого продукту застосовується автоматичний «варщик» утфелю, який контролює варку за значенням в'язкості.

Дані про вміст сухих речовин в сиропі та утфелю були отримані в лабораторіях заводу, на Лохвицькому заводі для 8-ми варок, на Андрушівському цукровому заводі для 2-ох варок. На Бучачському цукровому заводі застосовується автоматизована система варіння утфелю фірми «Рабица». З цього заводу були отримані тренди вимірювання температури сиропу та утфелю.

Зауважимо, що були відкинута найбільші та найменші викиди експериментальних даних, що викликані збоями в роботі комунікаційного обладнання між контролером та операторською станцією або вимиканням самого контролера.

Для стадії згущення утфелю перевірку проводили за температурою утфелю та вмісту сухих речовин в утфелі. Закінчення варіння утфелю зумовлено досягненням максимального вмісту сухих речовин, а відстежування зміни температури утфелю і перевірка моделі на адекватність в подальшому допоможе правильно оптимізувати цей процес. На рис.2 зображена розрахункова крива та експериментальні точки для вмісту сухих речовин в утфелі.

Середньоквадратична похибка відхилення від експериментальних значень для кривої вмісту сухих речовин в утфелі дорівнює 0,9%. Максимальна похибка відхилення експериментальних точок від розрахункової кривої для вмісту сухих речовин для стадії уварювання становить не більше 1,6%.

Середньоквадратичні похибки відхилення  $\sigma_x$  та максимальні відхилення  $\zeta$  для масиву експериментів за вмісту сухих речовин в утфелі для 5 варок приведені в табл. 1.

Таблиця 1

Перевірка адекватності математичної моделі за  $CB_y$

№ варки	1	2	3	4	5
$\sigma_x$	0,8	0,75	0,82	0,9	0,51
$\zeta, \% CP$	1,1	1,5	1,6	1,3	0,96

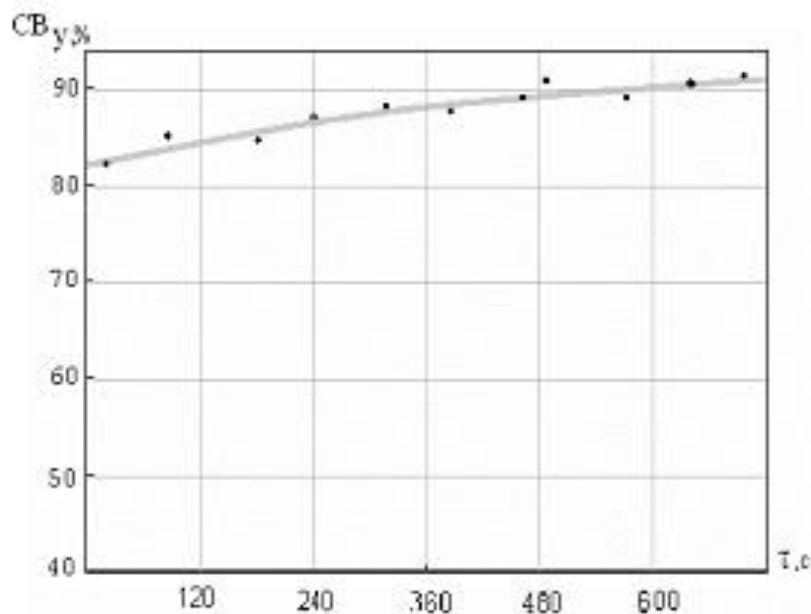


Рис.2. Графік розрахункових залежностей і експериментальних даних вмісту сухих речовин для стадії уварювання утфелю

На рис.3 наведені розрахункові і експериментальні дані для температури утфелю. Середньоквадратична похибка відхилення від експериментальних значень для температурної кривої 1,25<sup>0</sup>C. Максимальне відхилення дорівнює 2,01<sup>0</sup>C.

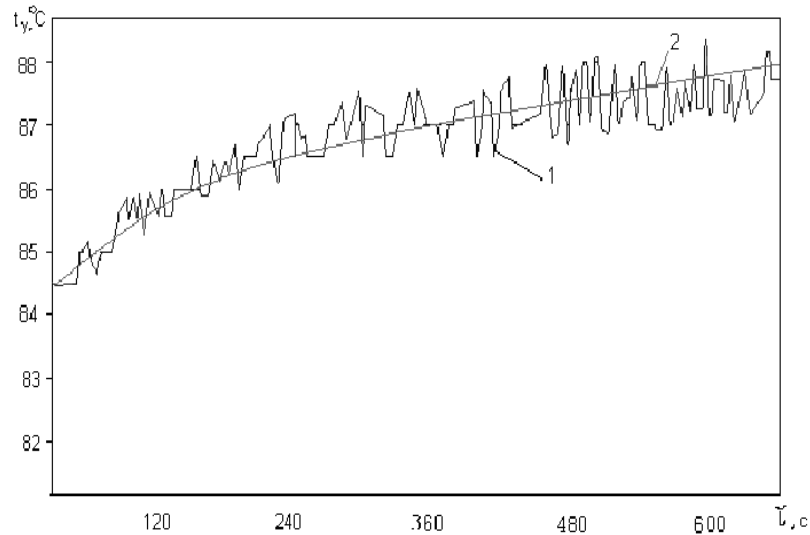


Рис.3. Графік розрахункових залежностей (2) і експериментальних даних (1) температури утфелю для стадії уварювання утфелю

Середньоквадратична похибка відхилення  $\sigma_x$  та максимальне відхилення  $\zeta$  для масиву експериментів по вмісту сухих речовин для 5 варок приведено в табл.2.

Таблиця 2

Перевірка адекватності математичної моделі за  $t_\delta$

№ варки	1	2	3	4	5
$\sigma_x$	1,06	1	0,6	0,9	1,25
$\zeta, ^\circ C$	1,8	2,01	1,1	1,25	2

Отже, після перевірки математичних моделей на адекватність, прийшли до висновку, що вони можуть бути використані для знаходження оптимального керування.

Щоб забезпечити точність моделювання процесу в вакуум-апараті, необхідно розглянути відхилення характеристик вакуум-апарату від номінальних значень, до яких можуть призводити деякі збурення, що впливають на тривалість перебігу процесу. Для цього проводили перевірку чутливості моделі до збурень.

В даному випадку збуреннями будуть: температура сиропу, який поступає з випарної станції, доброякісність сиропу та вміст сухих речовин в сиропі, який підкачується. Збурення змінюються стохастично, тому для їх реалізації використовували генератор випадкових чисел і оцінювали їх вплив на тривалість проходження процесу. Коефіцієнтом чутливості в даному випадку буде відхилення часу від допустимого, який розраховувався наступним чином:

$$U = \frac{\tau_{\ddot{a}} - \tau_t}{\tau_{\ddot{a}}} * 100\% ,$$

де  $\tau_{\ddot{a}}$  - тривалість процесу за технологічним регламентом, с;  $\tau_t$  - тривалість процесу при відхиленнях, с.

Вважаємо, що при  $U \leq 5\%$  (приблизно не більше 30 секунд), математична модель є нечутливою до зміни цього збурення.

Кінець уварювання є досягнення  $CB_y = 92.5\%$  і приблизний час 10 хвилин. В табл.3 приведена оцінка чутливості.

Таблиця 3

Оцінка впливу зміни  $CB_{cn}$ ,  $Дб_{cn}$  на тривалість проходження стадії уварювання утфелю

№	$CB_{cn}, \% CP$	$Дб_{cn}, \text{од.Дб}$	$\tau, c$	$U, \%$
1	62,9	90	601	0,16
2	65	92	596	0,66
3	64,8	91	615	2,5

Як видно з табл.3, час майже не змінився. Дослідження математичної моделі показало також несуттєві зміни в змінних стану, приблизно до 1%.

Отже, оцінивши чутливість математичної моделі процесу згущення утфелю, прийшли до висновку, що збурення, які виникають в цьому процесі мало впливають ( $\nu \leq 5\%$ ) на тривалість процесу, що дає можливість враховувати їх тільки на початку циклу.

**Висновок.** Розроблена математична модель дала змогу прослідкувати динаміку процесу та в подальшому використовувати дані моделі для знаходження оптимальної роботи періодичних процесів в вакуум-апаратах. Оцінка чутливості моделі до збурень дає змогу корегувати оптимальні значення змінних керування тільки на початку циклу.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Трегуб В.Г. Побудова математичної моделі автоматизованого апарата періодичної дії // Харчова промисловість. – 2004. – №3. – С.165 – 169.

2. Глущенко М.С., Трегуб В.Г. Моделювання періодичних процесів в утфельних вакуум-апаратах // Харчова промисловість. - Київ: НУХТ. - 2005, С.96

#### Анотація

##### **Математичне моделювання періодичних процесів**

**Глущенко М.С., Трегуб В.Г**

В даній статті представлено математичне моделювання періодичних процесів, які відбуваються в утфельних вакуум-апаратах періодичної дії. Моделювання даних процесів є актуальною темою для задач автоматизації та для знаходження оптимального керування продуктивним відділенням на цукровому виробництві.

#### Аннотация

##### **Математическое моделирование периодических процессов**

**Глущенко М.С., Трегуб В.Г.**

В данной статье представлено математическое моделирование периодических процессов, которые происходят в утфельных вакуум-аппаратах периодического действия. Моделирование данных процессов актуальная тема для задач автоматизации и для нахождения оптимального управления продуктового отделения в сахарном производстве.

#### Annotation

##### **Mathematical design of processes of batches**

**Gluschenko M.S., Tregub V.G.**

The mathematical design of processes of batches, which take place in utfel'nykh vacuum-devices of periodic action, is presented in this article. Design of these processes actual theme for the tasks of automation and for finding of optimum management of food separation in a saccharine production.

Трегуб Виктор Григорович  
м.Київ, Володимирська 68, Національний університет харчових технологій  
8-068-598-46-45, 8-044-550-84-31  
д.т.н., професор кафедри Автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих систем

Глуценко Маргарита Сергіївна,  
м.Київ, Володимирська 68, Національний університет харчових технологій  
8-066-197-56-72, 8-00-331-99-47  
к.т.н., асистент кафедри Автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих систем

Научні інтереси:

Дослідження процесів, які відбуваються при кристалізації цукру, оптимізація даного процесу, прогнозування та автоматизація процесу кристалізації. Використання ситуаційного управління в харчовій промисловості, особливо на цукрових заводах.