УДК 681.3.05

ЗИНЧЕНКО Т.В.

ОСОБЕННОСТИ И РАЗЛИЧИЯ МАТРИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ БЫСТРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ХАРТЛИ В ЗАДАЧАХ «БЕГУЩЕГО» СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Использован единый матричный подход к алгоритмам БПФ, описанный в [1], для синтеза алгоритмов, позволяющих реализовать операцию «бегущего» (или «скачущего») спектрального анализа, в котором для каждого нового положения временного окна максимально используется информация о спектре предыдущего шага. Получена формула расчета преобразования Хартли для последовательности данных, представленных в матричном виде, являющаяся обобщением для произвольного основания известной формулы Хартли, использующей разбиение исходной последовательности на две — с нечетными и четными номерами.

В устройствах цифровой обработки сигналов для решения задач спектрального анализа может использоваться принцип «бегущего» или «скользящего» окна, реализованный на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ) или дискретного преобразования Хартли (ДПХ). Для уменьшения времени этих преобразований используют многообразные алгоритмы быстрых преобразований — БПФ и БПХ. Дискретное преобразование Фурье конечной последовательности $\{x(n)\}$, $0 \le n \le N-1$, определяется формулой [1]:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot 2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W^{nk}, \qquad (1)$$

где $W = e^{-j \cdot 2\pi/N}$, $k = 0, 1, 2..., (N-1)$. Последовательность W^{nk} — периодическая с периодом N, т. е. $W^{(n+mN)(k+lN)} = W^{nk}$, $W_N^2 = W_{N/2}$, $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, m, $l = 0, \pm 1, \ldots$.

ДПФ $X(k)$ можно представить через $X_1(k)$ и $X_2(k)$ — $N/2$-точечные ДПФ последовательности четных элементов $x_1(n) = x(2n)$ и последовательности нечетных элементов $x_2(n) = x(2n+1)$:

$$X(k)=\begin{cases} X_1(k)+W_N^k\cdot X_2(k), & 0\le k\le \dfrac{N}{2}-1 \\ X_1\left(k-\dfrac{N}{2}\right)-W_N^{k-N/2}\cdot X_2\left(k-\dfrac{N}{2}\right), & 0\le k\le \dfrac{N}{2}-1 \end{cases} \quad (2)$$

Процесс вычисления БПФ с разделением обрабатываемой последовательности сигналов на четную и нечетную части называют прореживанием по времени.

При другом подходе — с прореживанием по частоте — входная последовательность разбивается на две последовательные части:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)\cdot W_N^{nk}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)\cdot W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)\cdot W_N^{nk}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x\left(n+\frac{N}{2}\right)\cdot W_N^{\left(n+\frac{N}{2}\right)k}=$$
$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x_1(n)+e^{-j\pi k}\cdot x_2(n)]\cdot W_N^{nk}. \quad (3)$$

Четные и нечетные отсчеты ДПФ входной последовательности $X(2k)$ и $X(2k+1)$ — это $N/2$-точечные ДПФ последовательностей $f(n)$, $g(n)$,

$$f(n)=x_1(n)+x_2(n),\ g(n)=[x_1(n)-x_2(n)]\cdot W_N^n,\ n=0, 1, ..., (N/2-1),$$

которые представляются формулами:

$$X(2k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x_1(n)-x_2(n)]\cdot W_N^{2nk}=\sum_{n=0}^{N/2-1}f(n)\cdot W_{N/2}^{nk},$$
$$X(2k+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x_1(n)-x_2(n)]\cdot W_N^{n(2k+1)}=\sum_{n=0}^{N/2-1}g(n)\cdot W_{N/2}^{nk}. \quad (4)$$

Если последовательность N отсчетов входного сигнала расположить строками в виде матрицы размером L на M (L — число строк, M — число столбцов), то текущий номер отсчета n можно представить в виде $n=Ml+m$, где l — текущий номер строки, m — текущий номер столбца, а текущий номер элемента матрицы выходных сигналов ДПФ $k=Lr+s$, то выражение для ДПФ приобретает вид [1]:

$$X(k)=X(s,r)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1}x(l,m)\cdot W^{(Ml+m)(Lr+s)}=$$
$$=\sum_{m=0}^{M-1}(W^L)^{mr}\cdot\left[W^{ms}\cdot\sum_{l=0}^{L-1}x(l,m)\cdot(W^M)^{sl}\right]. \quad (5)$$

Последовательность операций согласно представлению (5) следующая:

1. Вычислить L-точечные ДПФ с ядром преобразования W^M всех столбцов (вычисление внутренней суммы).

2. Умножить каждый элемент результата п. 1 на поворачивающий множитель W^{ms}.

3. Вычислить M-точечные ДПФ всех строк, полученных в результате выполнения п.1, п.2, с ядром преобразования W^L (вычисление внешней суммы).

Изменение порядка суммирования в (5) на обратный дает

$$X(s,r)=\sum_{l=0}^{L-1}(W^{M})^{ls}\cdot\sum_{m=0}^{M-1}[x(l,m)\cdot W^{ms}]\cdot(W^{L})^{rm}, \tag{6}$$

что определяет следующий порядок вычисления $X(k)$:

1. Умножить отсчеты сигнала $x(1,r)$ на поворачивающие множители W^{ms}.

2. Вычислить M-точечные ДПФ всех строк с ядром преобразования W^{ms} (вычисление внутренней суммы).

3. Вычислить L-точечные ДПФ всех столбцов с ядром преобразования W^M.

Различия в вычислениях согласно (5) и (6) соответствуют различию между алгоритмами БПФ (с основанием 2) с прореживанием по времени и с прореживанием по частоте. При прореживании по времени умножение на поворачивающие множители предшествует основным операциям ДПФ, а при прореживании по частоте следует за ними.

Алгоритмы (5) и (6) предполагают разное количество выполняемых операций. Алгоритм (5): N L-точечных преобразований (сумм), N M-точечных преобразований, N умножений на поворачивающие множители. Алгоритм (6): N L-точечных преобразований (сумм), $N\times L$ M-точечных преобразований, $N\times L$ умножений на поворачивающие множители. Большее количество операций алгоритма (6) можно объяснить тем, что внутренняя сумма имеет больше множителей, чем в (5), и есть функцией трех переменных параметров, а не двух. Поэтому при матричном представлении одномерного ДПФ (с последовательным расположением элементов по строкам) предпочтительнее матрицу исходных данных обрабатывать сначала по столбцам, а затем по строкам.

Наряду с преобразованием Фурье представляется возможным использовать преобразование Хартли в задачах цифровой обработки сигналов [2]. Преобразование Хартли является действительной функцией действительного аргумента. Дискретное преобразование Хартли (ДПХ) для отсчетов функции $x(i)$, $i=0, 1,\ldots, (N-1)$ определяется в виде

$$H(k)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}x(i)\mathrm{cas}\,(2\pi ki/N),\; k=0, 1,\ldots, (N-1), \tag{7}$$

где $\mathrm{cas}\theta=\cos\theta+\sin\theta$.

Преобразование Хартли симметрично, обратное преобразование имеет вид:

$$x(i)=\sum_{k=1}^{N-1}H(k)\mathrm{cas}\,(2\pi ki/N). \tag{8}$$

Преобразование Хартли можно представить в виде суммы четной и нечетной составляющих $H(k) = E(k) + O(k)$, при этом

$$E(k) = (H(k) + H(N-k))/2, \; O(k) = (H(k) - H(N-k))/2.$$

Как показано в [2], между преобразованиями Фурье и Хартли существует взаимосвязь. Если преобразование Фурье представлено в виде $F(k) = R(k) + i \cdot X(k)$, то

$$R(k) = (H(k) + H(N-k))/2, \qquad X(k) = -(H(k) - H(N-k))/2. \tag{9}$$

Спектральная плотность Z^2 равна

$$Z^2(k) = R^2(k) + X^2(k) = [H^2(k) + H^2(N-k)]/2. \tag{10}$$

Для оценки фазы преобразования Фурье можно вычислить значение

$$\arg F(x) = \operatorname{arctg}\left[\frac{H(N-k) - H(k)}{H(N-k) + H(k)}\right] = \operatorname{arctg}\left[-\frac{O(k)}{E(k)}\right]. \tag{11}$$

В [2] описаны принципы построения алгоритмов быстрого преобразования Хартли (БПХ). Если входную N-элементную последовательность $x(i)$ разбить на 2 последовательности с четными и нечетными номерами (прореживание по времени) — $\{x(0), 0, x(2), 0, x(4),...\}$, $\{x(1), 0, x(3), 0, x(5),...\}$, и вычислить для них преобразования Хартли $H_1(k)$, $H_2(k)$ с периодом N, то ПХ всей последовательности можно вычислить по формуле

$$H(k) = H_1(k) + H_2(k) \cdot \cos(2\pi k/N) + H_2(N-k) \cdot \sin(2\pi k/N). \tag{12}$$

Значения $H_1(k)$, $H_2(k)$ могут быть получены путем повторяющегося разбиения вплоть до, например, четырехэлементных последовательностей, состоящих из двухэлементных сегментов; преобразование двухэлементной последовательности включает два действия сложения и ни одного умножения.

Принято полагать, что если $N = 2^P$, вычисление БПХ требует выполнения количества операций пропорционально $N \times P$ [2]. Для увеличения скорости вычисления алгоритма БПХ целесообразно использовать размерность $N = 4^P$ с элементарными 4-элементными ДПХ, как и в случае БПФ [2].

В ряде научных работ [4] прозвучали утверждения о том, что БПХ по быстродействию превосходит БПФ. К такому выводу можно прийти, если сравнивать преобразование последовательности вещественных данных посредством БПХ и посредством БПФ, что некорректно. БПФ — идеальный инструмент для обработки данных в комплексной форме. БПХ можно использовать для обработки массивов действительных чисел, например, для обработки изображений.

С точки зрения единого матричного подхода выражение для БПХ, аналогичное выражению (5) для БПФ, имеет вид:

$$H(k)=H(s,r)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1}x(l,m)\cdot\mathrm{cas}\left[\frac{2\pi}{N}(Ml+m)\cdot(Lr+s)\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1}x(l,m)\cdot\mathrm{cas}\left[\frac{2\pi}{N}(Mls+ms+mLr)\right]. \tag{13}$$

В соотношениях (5) и (13) выражено главное отличие преобразований Фурье и Хартли с точки зрения синтеза быстрых алгоритмов, а именно: разделяемость ядра преобразования Фурье, что обеспечивает многообразие вариантов реализации в зависимости от характеристик и особенностей задачи, и неразделимость ядра преобразования Хартли, что существенно ограничивает возможные варианты реализации. Преобразование cas-функции приводит (13) к виду:

$$H(s,r)=\sum_{l=0}^{L-1}\left[\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi}{N}Mls\right)\sum_{m=0}^{M-1}x(l,m)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{N}m(Lr+s)\right)\right]+$$

$$+\sum_{l=0}^{L-1}\left[\mathrm{cas}\left(-\frac{2\pi}{N}Mls\right)\sum_{m=0}^{M-1}x(l,m)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{N}m(Lr+s)\right)\right]. \tag{14}$$

Покажем, что формула Хартли (12) является частным случаем формулы (14) при $M = 2$. В этом случае матрица исходных данных имеет два столбца ($m = 0, 1$) и $L = N/2$ строк. Если представить элементы исходного массива их номерами, элементы в матрице располагаются следующим образом:

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ \dots & \dots \\ N-2 & N-1 \end{matrix}$$

Первый столбец состоит из элементов с четными номерами, второй — с нечетными. Преобразуем выражение (14), учитывая обозначения, принятые при переходе к матричному представлению входной последовательности (перед выражением (5)):

$$H(s,r)=\sum_{l=0}^{L-1}\left[\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi}{N}Mls\right)\cdot\left(x(l,0)+x(l,l)\cos\left(\frac{2\pi}{N}(Lr+s)\right)\right)\right]+$$

$$+\sum_{l=0}^{L-1}\left[\mathrm{cas}\left(-\frac{2\pi}{N}Mls\right)\cdot x(l,l)\sin\left(\frac{2\pi}{N}(Lr+s)\right)\right]=$$

$$=\sum_{l=0}^{L-1}\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi}{N}2ls\right)\cdot x(l,0)+\cos\left(\frac{2\pi}{N}(Lr+s)\right)\sum_{l=0}^{L-1}\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi}{N}2ls\right)\cdot x(l,l)+$$

$$+\sin\left(\frac{2\pi}{N}(Lr+s)\right)\sum_{l=0}^{L-1}\mathrm{cas}\left(-\frac{2\pi}{N}2ls\right)\cdot x(l,l)=$$

$$= H_1(k) + \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\cdot H_2(k) + \sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\cdot H_2(N-k) = H(k), \qquad (15)$$

где $H_1(k)$, $H_2(k)$ — преобразования Хартли последовательностей, состоящих из элементов каждого столбца соответственно — $\{x(0), 0, x(2), 0, x(4), 0,...\}$, $\{x(1), 0, x(3), 0, x(5), 0,...\}$ с периодом N.

Таким образом, формула Хартли (12) доказана как частный случай матричного алгоритма (14).

Практический интерес представляет алгоритм преобразований по основанию 4, по аналогии с быстрым преобразованием Фурье по основанию 4, которое в некоторых случаях считается предпочтительным с точки зрения количества операций [1]. Представим элементы исходного массива их номерами в виде матрицы с 4 столбцами:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N-4 & N-3 & N-2 & N-1 \end{array}$$

Для случая $M = 4$ из соотношения (14) можно получить:

$$H(k) = H_0(k) + H_1(k)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + H_1(N-k)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + H_2(k)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{N}2k\right) +$$

$$+ H_2(N-k)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{N}2k\right) + H_3(k)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{N}3k\right) + H_3(N-k)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{N}3k\right). \qquad (16)$$

В (16) $H_0(k)$, $H_1(k)$, $H_2(k)$, $H_3(k)$ — преобразования Хартли последовательностей, состоящих из элементов каждого столбца соответственно — $\{x(0),0,0,0,x(4),0,0,0,x(8),0...\}$, $\{x(1),0,0,0,x(5),0,0,0,x(9),0...\}$, $\{x(2),0,0,0,x(6),0,0,0,x(10),0...\}$, $\{x(3),0,0,0,x(7),0,0,0,x(11),0...\}$. Объединение преобразований Хартли отдельных столбцов осуществляется при помощи двух операций умножения и одной операции сложения на каждый столбец, что заметно увеличивает общее количество операций умножения. В общем случае при матричном представлении входной последовательности размерности $N = L\times M$ число операций умножения Km и сложения Ka равно:

$$Km = (N-L)\times[2(M-1) + MK_{Lm}],\ Ka = (N-1)\times[2(M-1) + MK_{La}] + M - 1,$$

где K_{Lm}, K_{La} — число операций соответственно умножения и сложения при вычислении преобразования Хартли одного столбца (L элементов). Число операций посчитано с учетом того, что при $k = 0$ при вычислении $H(0)$ операции умножения не используются. Для $N = 16$ и $M = L = 4$ $Km = 90$, $Ka = 125$. Для алгоритма (12) это составляет соответственно 82 и 105. И хотя алгоритм (16) требует большего количества операций, он допускает существенную возможность распараллеливания вычислительного процесса, что делает его привлекательным для реализации.

Различия между преобразованиями особенно проявляются при реализации «бегущих» процедур при помощи матричных алгоритмов.

«Скользящее» или «скачущее» N-точечное ДПФ для входного дискретного сигнала $x(n)$ представляется в виде:

$$F(n,k)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}s(n-m)\exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi mk}{N}\right), \tag{17}$$

где m, $k = 0, 1, \ldots, (N-1)$.

При фиксированном n функция $F(n, k)$ представляет собой ДПФ по переменной m отрезка $s(n–m)$ потока данных $s(n)$. Если n = 0, 1, 2,..., то БПФ — «скользящее». Если шаг Δn изменения n больше 2, то БПФ — «скачущее». Функцию $F(n, k)$ удобно называть текущим спектром Фурье [5].

Рассмотрим схематично в матричном виде смещение временного окна, содержащего N отсчетов, изображая отсчеты их номерами в поступающей временной последовательности. Например, для $N = 16 = 4 \times 4$ и $\Delta n = 1$ имеем:

I 1 окно				II 2 окно				III 3 окно				IV окно
1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5	6	4
5	6	7	8	6	7	8	9	7	8	9	10	8
9	10	11	12	10	11	12	13	11	12	13	14	12
13	14	15	16	14	15	16	17	15	16	17	18	16

2–4 столбцы первого окна становятся 1–3 столбцами второго окна, 2–4 столбцы второго окна становятся 1–3 столбцами третьего окна и т. д. Это означает, что на каждом следующем шаге (для следующего положения временного окна) значения $(M–\Delta n)$ L-точечных столбцовых БПФ (M — количество столбцов, L — количество строк) могут быть использованы с предыдущего шага.

Возможна другая схема с использованием значений построчных БПФ. Например, для $N = 16 = 4\times4$ и $\Delta n = 4$ имеем:

1 окно				2 окно				3 окно			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

2–4 строки первого окна становятся 1–3 строками второго окна, 2–4 строки второго окна становятся 1–3 строками третьего окна и т. д. Это означает, что на каждом следующем шаге (для следующего положения временного окна) значения $(L–1)$ M-точечных строковых ДПФ могут быть использованы с предыдущего шага.

Таким образом, задаваясь определенной длиной временного окна N, и шагом смещения Δn, а также сравнивая возможности алгоритмов (5) и (6) — с прореживанием по времени или по частоте — можно выбрать (относительно просто) наиболее быстродействующее схемное решение расчета БПФ в скользящем окне.

«Бегущее» БПХ представляется в виде:

$$H(n,k)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}s(n-m)\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi mk}{N}\right), \qquad (18)$$

где m, $k = 0, 1, \ldots, (N-1)$.

В [3, 5] описан матричный алгоритм реализации «бегущего» БПХ с прореживанием по времени по основанию 2, который основан на принципе повторяющегося разбиения исходной последовательности на две части.

Как следует из соотношения (13), вычисление БПХ, в отличие от БПФ, допускает только постолбцовую обработку отсчетов, представленных в матричном виде. Как показали расчеты количества операций, практическую полезность представляют алгоритмы вычисления преобразования Хартли только по основанию 2 или 4. Для вычисления текущих спектров в «скользящем» окне следует использовать приемы по использованию значений спектра на предыдущем шаге, как в случае БПФ с постолбцовой обработкой данных, представленных в виде матрицы с 2-мя либо 4-мя столбцами (рис. 1).

Таким образом, используя единый матричный подход к алгоритмам БПФ, описанный в работе [1], легко синтезировать алгоритмы, позволяющие реализовать операцию «бегущего» (или «скачущего») спектрального анализа с максимальным использованием информации о спектре для предыдущего положения временного окна. Кроме того, при матричном подходе в самом алгоритме заложены основные группирующие фрагменты для эффективного распараллеливания вычислительного процесса.

Получена общая формула расчета преобразования Хартли с произвольным основанием для последовательности данных, представленных в матричном виде, частным случаем которой является известная формула Хартли, использующая разбиение исходной последовательности на две — с нечетными и четными номерами. Практически пригодны алгоритмы по основанию не выше 4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. —М.: Мир, 1978.
2. *Брейсуэлл Р. Н.* Преобразование Хартли. -М.: Мир, 1990.
3. *Бондьопадхьяй П. К.* // ТИИЭР,—1988,— т.76, № 10.
4. *Злобин С. Л., Стальной А. Я.* // Радиотехника,— 2000,— № 4.
5. *Злобин С. Л., Стальной А. Я.* // Радиотехника,—2001,— № 1.

НИИ «Квант-радиолокация», Киев

Поступила в редакцию 13.09.06