

УДК 539.3

©2007

Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикла

**КРАТКОВРЕМЕННАЯ МИКРОПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛОКНИСТОГО МАТЕРИАЛА ПРИ СОВМЕСТНОМ НОРМАЛЬНОМ И КАСАТЕЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ**

**Введение.** Теория кратковременной микроповреждаемости однородных и композитных материалов, предложенная в работах [6, 7, 9 – 26], основана на структурных представлениях механики микронеоднородных тел стохастической структуры. Рассеянные микроповреждения моделируются системой стохастически расположенных квазисферических микропор [6]. Процесс накопления микроповреждений при увеличении деформаций моделируется ростом пористости.

В настоящей работе структурная теория кратковременной микроповреждаемости материала обобщается на случай, когда в неповрежденном материале изотропной матрицы однонаправленного волокнистого композита с трансверсально-изотропными волокнами деформации следуют физически нелинейному закону при воздействии нагрузок, вызывающих в композите сложное напряженное состояние, причем микроразрушения происходят только в матрице. В основу положены стохастические уравнения упругости волокнистого композита с пористой матрицей, материал каркаса которой деформируется нелинейно. Критерий разрушения микрообъемов материала матрицы принимается в форме Губера – Мизеса, где предел прочности является случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается степенным законом или законом Вейбулла. Исходя из свойства функции распределения статистически однородного случайного поля предела микропрочности материала, сформулировано уравнение баланса разрушенных микрообъемов для физически нелинейного материала матрицы композита, которое представляет собой нелинейное уравнение относительно пористости матрицы. Это уравнение совместно с уравнениями связи между макронапряжениями и макродеформациями волокнистого композита с пористой физически нелинейной матрицей образует замкнутую систему, описывающую совместный процесс физически нелинейного деформирования и микроповреждаемости. Построены алгоритмы вычисления зависимостей макронапряжений в композите от макродеформаций и микроповрежденности матрицы от макродеформаций, а также получены соответствующие кривые при совместном воздействии нормальной и касательной нагрузок на материал в случае, когда матрица композита деформируется по линейно упрочняющемуся закону. Исследованы диаграммы деформирования в зависимости от объемного содержания компонентов при наличии нормальных и касательных нагрузок для волокнистого композитного материала.

**§ 1.** Рассмотрим физически нелинейное деформирование однонаправленного волокнистого материала с трансверсально-изотропными волокнами и изотропной матрицей, описываемое зависимостью модулей объемного сжатия  $K_2$  и сдвига  $\mu_2$  матрицы от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью матрицы в процессе нагружения. Микроповреждаемость матрицы будем моделировать образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Волокна считаем трансверсально-изотропными, направленными по нормали к плоскости изотропии  $x_1x_2$ . Обозначим модули упругости волокон  $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1$ , модули объемного сжатия и сдвига материала каркаса

матрицы  $K_2$ ,  $\mu_2$ , ее пористость  $p_2$ , а объемные содержания волокон и пористой матрицы соответственно  $c_1$  и  $c_2$ . Тогда зависимости между макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и макродеформациями  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  можно представить в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij};$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r=1, 2), \quad (1.1)$$

причем эффективные модули упругости композита  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$  будут функциями пористости матрицы  $p_2$  и макродеформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ .

Определение эффективных модулей упругости физически нелинейного волокнистого композита с пористой матрицей сводится к следующему итерационному алгоритму. Эффективные модули упругости композита в  $n$ -ом приближении  $\lambda_{11}^{*(n)}$ ,  $\lambda_{12}^{*(n)}$ ,  $\lambda_{13}^{*(n)}$ ,  $\lambda_{33}^{*(n)}$ ,  $\lambda_{44}^{*(n)}$  определяются [4, 5, 7] через соответствующие модули волокон  $\lambda_{11}^1$ ,  $\lambda_{12}^1$ ,  $\lambda_{13}^1$ ,  $\lambda_{33}^1$ ,  $\lambda_{44}^1$  и пористой матрицы  $\lambda_{2p}^{(n)}$ ,  $\mu_{2p}^{(n)}$  ( $\lambda_{2p}^{(n)} = K_{2p}^{(n)} - 2/3 \mu_{2p}^{(n)}$ ) в  $n$ -ом приближении формулами

$$\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} = c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})^2}{2c_1(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}};$$

$$\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} = c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p}^{(n)} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)})^2}{2c_1\mu_{2p}^{(n)} + c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + \frac{2m^{(n)}n^{(n)}}{n^{(n)} + 2m^{(n)}}};$$

$$\lambda_{13}^{*(n)} = c_1\lambda_{13}^1 + c_2\lambda_{2p}^{(n)} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})(\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})}{2c_1(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}};$$

$$\lambda_{33}^{*(n)} = c_1\lambda_{33}^1 + c_2(\lambda_{2p}^{(n)} + 2\mu_{2p}^{(n)}) - \frac{2c_1 c_2 (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})^2}{2c_1(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}};$$

$$\lambda_{44}^{*(n)} = c_1\lambda_{44}^1 + c_2\mu_{2p}^{(n)} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{44}^1 - \mu_{2p}^{(n)})^2}{c_1\mu_{2p}^{(n)} + c_2\lambda_{44}^1 + s^{(n)}}, \quad (1.2)$$

где

$$2m^{(n)} = c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p}^{(n)};$$

$$2n^{(n)} = c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}); \quad s^{(n)} = c_1\lambda_{44}^1 + c_2\mu_{2p}^{(n)}, \quad (1.3)$$

если жесткость связующего больше жесткости волокон, и

$$2m^{(n)} = \left( \frac{c_1}{\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2\mu_{2p}^{(n)}} \right)^{-1};$$

$$2n^{(n)} = \left( \frac{c_1}{\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)})} \right)^{-1}; \quad s^{(n)} = \left( \frac{c_1}{\lambda_{44}^1} + \frac{c_2}{\mu_{2p}^{(n)}} \right)^{-1}, \quad (1.4)$$

если жесткость волокон больше жесткости связующего.

Эффективные модули пористой матрицы в  $n$ -ом приближении  $K_{2p}^{(n)}$ ,  $\lambda_{2p}^{(n)}$ ,  $\mu_{2p}^{(n)}$  согласно [6, 7] определяются формулами

$$K_{2p}^{(n)} = \frac{4K_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right) \mu_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right) (1-p_2)^2}{3K_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right) p_2 + 4\mu_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right) (1-p_2)};$$

$$\mu_{2p}^{(n)} = \frac{\left[ 9K_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right) + 8\mu_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right) \right] \mu_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right) (1-p_2)^2}{3K_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right) (3-p_2) + 4\mu_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right) (2+p_2)}, \quad (1.5)$$

где  $\langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)}$  – средние деформации по неповрежденной части матрицы в  $n$ -ом приближении. Они связаны со средними по матрице деформациями  $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)}$  в  $n$ -ом приближении зависимостями

$$\langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} = \frac{1}{(1-p_2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\mu_{2p}^{(n-1)}}{\mu_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right)} \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)} + \frac{1}{3} \left[ \frac{K_{2p}^{(n-1)}}{K_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right)} - \frac{\mu_{2p}^{(n-1)}}{\mu_2 \left( \langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)} \right)} \right] \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle^{(n)} \delta_{ij} \right\}. \quad (1.6)$$

Средние по матрице деформации в  $n$ -ом приближении  $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)}$  определяются через макродеформации  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  по формулам

$$\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)} = \frac{\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1}{c_2(2\mu_{2p}^{(n)} - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle -$$

$$- \frac{1}{\Delta_2^{(n)}} \left\{ \left[ (\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{11}^1) a_1^{(n)} - (\lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{12}^1) a_2^{(n)} - (\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) a_3^{(n)} \right] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \right.$$

$$\left. + \left[ (\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) (a_1^{(n)} - a_2^{(n)}) - (\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{33}^1) a_3^{(n)} \right] \langle \varepsilon_{33} \rangle \right\} \delta_{ij};$$

$$\langle \varepsilon_{33}^2 \rangle^{(n)} = - \frac{1}{\Delta_2^{(n)}} \left\{ \left[ (\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) a_4^{(n)} - (\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) a_3^{(n)} \right] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \right.$$

$$\left. + \left[ (\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{33}^1) a_4^{(n)} - 2(\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) a_3^{(n)} \right] \langle \varepsilon_{rr} \rangle \right\};$$

$$\langle \varepsilon_{i3}^2 \rangle^{(n)} = \frac{\lambda_{44}^{*(n)} - \lambda_{44}^1}{c_2(\mu_{2p}^{(n)} - \lambda_{44}^1)} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2), \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_2^{(n)} &= c_2 \left( \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)} \right) \times \\ &\times \left[ \left( \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)} \right) \left( \lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)} \right) - 2 \left( \lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} \right)^2 \right]; \\ a_1^{(n)} &= \left( \lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} \right)^2 - \left( \lambda_{12}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} \right) \left( \lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)} \right); \\ a_2^{(n)} &= \left( \lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} \right)^2 - \left( \lambda_{11}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)} \right) \left( \lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)} \right); \\ a_3^{(n)} &= \left( \lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} \right) \left( \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)} \right); \\ a_4^{(n)} &= \left( \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)} \right) \left( \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)} \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

а эффективные коэффициенты пористой матрицы в  $n$ -ом приближении  $K_{2p}^{(n)}$ ,  $\lambda_{2p}^{(n)}$ ,  $\mu_{2p}^{(n)}$  определяются формулами (1.5).

Эффективные модули при заданных макродеформациях  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  определяются как предельные значения итерационного процесса

$$\lambda_{im}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{im}^{*(n)}. \quad (1.9)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала матрицы примем критерий прочности Губера – Мизеса

$$I_\sigma^{12} = k_2, \quad (1.10)$$

где  $I_\sigma^{12} = \left( \langle \sigma_{ij}^{12} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{12} \rangle' \right)^{1/2}$  – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений  $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle'$  по неповрежденной части материала матрицы,  $k_2$  – предел микропрочности матрицы, являющийся случайной функцией координат.

Одноточечную функцию распределения  $F_2(k_2)$  предела микропрочности  $k_2$  неповрежденной части материала матрицы можно принять в виде степенного закона на некотором отрезке

$$F_2(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{02}; \\ \left( \frac{k_2 - k_{02}}{k_{12} - k_{02}} \right)^{n_2}, & k_{02} \leq k_2 \leq k_{12}; \\ 1, & k_2 > k_{12}, \end{cases} \quad (1.11)$$

или распределение Вейбулла

$$F_2(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{02}; \\ 1 - \exp[-m_2(k_2 - k_{02})^{n_2}], & k_2 \geq k_{02}, \end{cases} \quad (1.12)$$

где  $k_{02}$  – минимальное значение предела микропрочности матрицы;  $k_{12}$ ,  $m_2$ ,  $n_2$  – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования матрицы.

Предположим, что до начала деформирования в матрице композита существовала начальная микроповрежденность, характеризуемая пористостью  $p_{02}$ . Тогда функция распределения  $F_2(k_2)$  определяет относительное содержание материала неразрушенной части матрицы, в котором предел прочности меньше соответствующего значения  $k_2$ . Поэтому при ненулевых напряжениях  $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle$  функция  $F_2(I_\sigma^{12})$  согласно (1.10) – (1.12) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета матрицы. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов матрицы или ее пористости

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02}) F_2(I_\sigma^{12}), \quad (1.13)$$

где средние в неразрушенной части матрицы напряжения в  $n$ -ом приближении  $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle^{(n)}$  связаны с макродеформациями  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  зависимостями [7] (1.7), (1.8) и

$$\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle^{(n)} = \frac{1}{1 - p_2} \left[ \left( K_{2p}^{(n)} - \frac{2}{3} \mu_{2p}^{(n)} \right) \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle^{(n)} \delta_{ij} + 2 \mu_{2p}^{(n)} \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right]. \quad (1.14)$$

Уравнения (1.1), (1.13), (1.7), (1.8), (1.14) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и повреждаемости однонаправленного волокнистого материала с трансверсально-изотропными волокнами и физически нелинейной микроповреждающейся изотропной матрицей.

Физическая нелинейность матрицы композита влияет на образование пористости в ней при деформировании, изменение пористости матрицы в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита.

Поэтому результирующая диаграмма деформирования волокнистого композита обусловлена физической нелинейностью материала его матрицы и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в ней при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и повреждаемости такого волокнистого композита при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости волокнистого материала с пористой матрицей, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (1.2) – (1.9), и определению пористости из уравнения (1.13), (1.7), (1.8), (1.14), что осуществляется также определенным итерационным методом. Представим уравнение (1.13) для  $n$ -го шага итерационного процесса (1.2) – (1.9) в виде

$$f_2^{(n)} \equiv p_2 - p_{02} - (1 - p_{02}) F_2(I_\sigma^{12(n)}), \quad (1.15)$$

где

$$I_{\sigma}^{12(n)} = \left( \left\langle \sigma_{jk}^{12(n)} \right\rangle' \left\langle \sigma_{jk}^{12(n)} \right\rangle' \right)^{1/2}. \quad (1.16)$$

Тогда вычисление корня  $p_2$  уравнения (1.15), (1.16) на  $m$ -ом шаге некоторого итерационного процесса можно представить формулой

$$p_2^{(m,n)} = A_2 f_2^{(n)} \left( p_2^{(m-1)} \right), \quad (1.17)$$

где  $A_2$  – определенный оператор, действующий на функцию  $f_2^{(n)}(p_2)$ .

Искомый корень определяется как предельное значение

$$p_2 = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} p_2^{(m,n)}. \quad (1.18)$$

Соотношения (1.1) – (1.9), (1.7), (1.8), (1.15) – (1.18) дают решение поставленной задачи, т.е. для заданного волокнистого композита с физически нелинейной матрицей они определяют диаграммы макродеформирования (зависимости  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  от  $\langle \varepsilon_{pq} \rangle$ ) и микроповрежденности матрицы (зависимость  $p_2$  от  $\langle \varepsilon_{pq} \rangle$ ).

**§ 2.** В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости волокнистого композита, когда матрица композита деформируется по линейно упрочняющемуся закону. Предположим, что объемные деформации линейно упрочняющейся матрицы являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в ее микрообъеме имеют место соотношения

$$\sigma_{rr}^2 = K_2 \varepsilon_{rr}^2; \quad \sigma_{ij}^{2'} = 2\mu_2(S_2) \varepsilon_{ij}^{2'}. \quad (2.1)$$

Здесь модуль объемного сжатия  $K_2$  не зависит от деформаций, а модуль сдвига  $\mu_2(S_2)$  описывается функцией

$$\mu_2(S_2) = \begin{cases} \mu_{02}, & T_2 \leq T_{02}; \\ \mu_2' + \left(1 - \frac{\mu_2'}{\mu_{02}}\right) \frac{T_{02}}{2S_2}, & T_2 \geq T_{02}, \end{cases} \quad (2.2)$$

причем

$$S_2 = \left( \varepsilon_{ij}^{2'} \varepsilon_{ij}^{2'} \right)^{1/2}; \quad T_2 = \left( \sigma_{ij}^{2'} \sigma_{ij}^{2'} \right)^{1/2}; \quad T_{02} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{02}, \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon_{ij}^{2'}$ ,  $\sigma_{ij}^{2'}$  – девиаторы соответственно тензоров деформаций и напряжений,  $\sigma_{02}$  – предел пропорциональности на растяжение, который принимаем независимым от координат;  $\mu_{02}$ ,  $\mu_2'$  – постоянные материала.

Алгоритм определения корня  $p_2$  уравнений (1.7), (1.8), (1.15), (1.16) будем строить на основе метода секущих [1]. Так как корень  $p_2$  находится в интервале  $[p_{02}, 1]$ , что следует из неравенств

$$f_2^{(n)}(p_{20}) \leq 0; \quad f_2^{(n)}(1) \geq 0, \quad (2.4)$$

то, согласно методу секущих, нулевое приближение корня  $p_2^{(0,n)}$  определяется формулой

$$p_2^{(0,n)} = \frac{a_2^{(0)} f_2^{(n)}(b_2^{(0)}) - b_2^{(0)} f_2^{(n)}(a_2^{(0)})}{f_2^{(n)}(b_2^{(0)}) - f_2^{(n)}(a_2^{(0)})}, \quad (2.5)$$

где  $a_2^{(0)} = p_{02}$ ,  $b_2^{(0)} = 1$ .

Последующие приближения метода секущих определяются итерационным процессом

$$p_2^{(m,n)} = A_2 f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \equiv \frac{a_2^{(m)} f_2^{(n)}(b_2^{(m)}) - b_2^{(m)} f_2^{(n)}(a_2^{(m)})}{f_2^{(n)}(b_2^{(m)}) - f_2^{(n)}(a_2^{(m)})}, \quad (2.6)$$

$$a_2^{(m)} = a_2^{(m-1)}; \quad b_2^{(m)} = p_2^{(m-1,n)} \quad \text{при } f_2^{(n)}(a_2^{(m-1)}) f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \leq 0;$$

$$a_2^{(m)} = p_2^{(m-1,n)}; \quad b_2^{(m)} = b_2^{(m-1)} \quad \text{при } f_2^{(n)}(a_2^{(m-1)}) f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \geq 0.$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

который продолжается до выполнения условия

$$\left| f_2^{(n)}(p_2^{(m,n)}) \right| < \delta, \quad (2.7)$$

где  $\delta$  – точность вычисления корня.

На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости волокнистого композита при распределении предела микропрочности матрицы по закону Вейбулла для различных случаев нагружения. В качестве компонентов приняты соответственно эпоксидная матрица, которая имеет диаграмму линейного упрочнения (2.1), (2.2) с постоянными [2, 3]

$$K_2 = 3,33 \text{ ГПа}; \quad \mu_{02} = 1,11 \text{ ГПа}; \quad \mu_2' = 0,331 \text{ ГПа} \quad (2.8)$$

и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{3}{2}} k_{02}$$

$$\sigma_{20} = 0,015 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{2p} = 0,003 \text{ ГПа}, \quad (2.9)$$

и высокомодульные углеродные волокна с характеристиками [3]

$$E_1^1 = 8 \text{ ГПа}; \quad E_3^1 = 226 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12}^1 = 0,2; \quad \nu_{13}^1 = 0,3; \quad G_{12}^1 = 60 \text{ ГПа}, \quad (2.10)$$

где  $E_1^1$  и  $E_3^1$ ,  $\nu_{12}^1$  и  $\nu_{13}^1$ ,  $G_{12}^1$  и  $G_{13}^1$  – соответственно поперечный и продольный модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига волокон, которые связаны с модулями упругости  $\lambda_{11}^1$ ,  $\lambda_{12}^1$ ,  $\lambda_{13}^1$ ,  $\lambda_{33}^1$ ,  $\lambda_{44}^1$  формулами

$$\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 = E_1^1 E_3^1 \left[ E_3^1 \left( 2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right) - 2E_1^1 (v_{13}^1)^2 \right]^{-1}; \quad \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 = 2G_{12}^1;$$

$$\lambda_{13}^1 = \nu_{13}^1 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1); \quad \lambda_{33}^1 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) \frac{E_3^1}{E_1^1} \left( 2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right); \quad \lambda_{44}^1 = G_{13}^1. \quad (2.11)$$

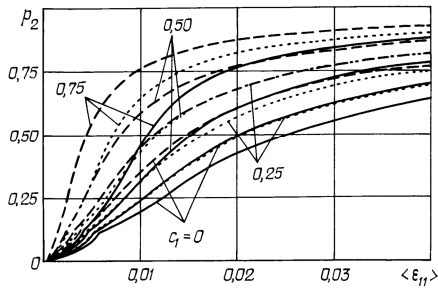


Рис. 1

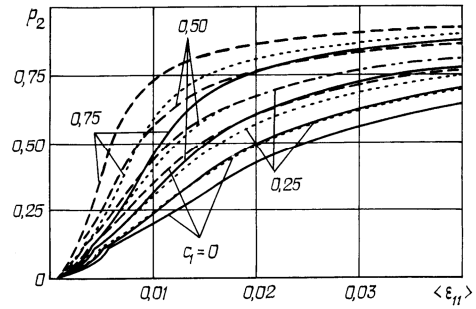


Рис. 2

В случае задания макропараметров

$$\langle \sigma_{11} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{13} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0 \quad (2.12)$$

или

$$\langle \sigma_{11} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{12} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0 \quad (2.13)$$

согласно (1.1) макронапряжения  $\langle \sigma_{11} \rangle$  в композите связаны с макродеформацией  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \left[ (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2 \right] \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (2.14)$$

При этом в уравнении баланса пористости (1.7), (1.8), (1.15), (1.16) имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{(\lambda_{13}^*)^2 - \lambda_{12}^* \lambda_{33}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{(\lambda_{12}^* - \lambda_{11}^*) \lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (2.15)$$

В случае задания макропараметров

$$\langle \sigma_{33} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{13} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (2.16)$$

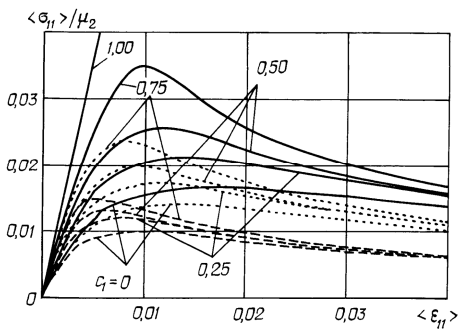


Рис. 3

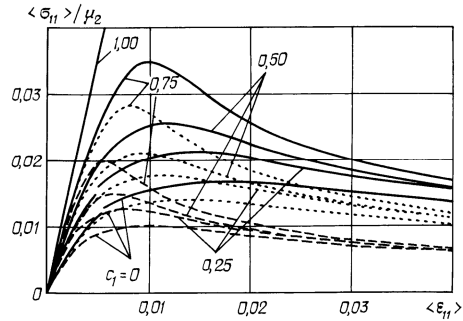


Рис. 4

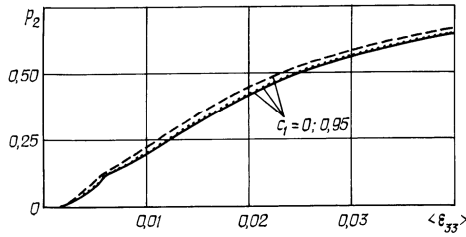


Рис. 5

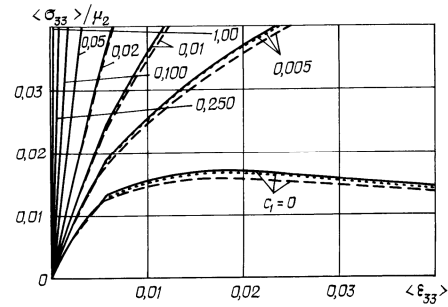


Рис. 6

или

$$\langle \sigma_{33} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{12} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (2.17)$$

согласно (1.1) макронапряжения  $\langle \sigma_{33} \rangle$  в композите связаны с макродеформацией  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  соотношением

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \frac{1}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \left[ (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2 \right] \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (2.18)$$

При этом в уравнении баланса пористости (1.7), (1.8), (1.15), (1.16) имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{-\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (2.19)$$

На рис. 1, 2 соответственно при условиях (2.12), (2.13) изображены кривые зависимостей пористости связующего  $p_2$  от макродеформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  для волокнистого композита при различных объемных содержаниях волокон  $c_1$  и различных значениях соответственно макронапряжения  $\langle \sigma_{12} \rangle$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle$ . На графиках сплошной линией показаны кривые деформирования при  $\langle \sigma_{12} \rangle = 0$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle = 0$ , штриховой линией – при  $\langle \sigma_{12} \rangle = \langle \sigma_{11} \rangle$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle = \langle \sigma_{11} \rangle$ , точечной линией – при  $\langle \sigma_{12} \rangle = 1/2 \langle \sigma_{11} \rangle$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle = 1/2 \langle \sigma_{11} \rangle$ . Такие же обозначения приняты и на рис. 3 – 6. Как видим, с увеличением  $\langle \sigma_{12} \rangle$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle$  микроразрушения начинаются раньше и проходят более интенсивно (фиксированным значениям макродеформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  соответствуют большие значения пористости связующего  $p_2$ ). Отметим, что на зависимости  $p_2$  от  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  существенно влияет, что задано:  $\langle \sigma_{12} \rangle \neq 0$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle \neq 0$ . В случае, когда  $\langle \sigma_{13} \rangle \neq 0$  микроразрушения начинаются раньше и проходят более интенсивно, чем в случае  $\langle \sigma_{12} \rangle \neq 0$ .

На рис. 3, 4 соответственно при условиях (2.12), (2.13) изображены кривые зависимостей макронапряжения  $\langle \sigma_{11} \rangle$  от макродеформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  для волокнистого композита при различных объемных содержаниях волокон  $c_1$  и различных значениях соответственно макронапряжения  $\langle \sigma_{12} \rangle$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle$ . Отметим, что как и для зависимостей  $p_2$  от  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ , на зависимости  $\langle \sigma_{11} \rangle$  от  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  существенно влияет, что задано:

$\langle \sigma_{12} \rangle \neq 0$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle \neq 0$ . В случае, когда  $\langle \sigma_{13} \rangle \neq 0$ , максимальное значение напряжения  $\langle \sigma_{11} \rangle$  меньше, чем в случае  $\langle \sigma_{12} \rangle \neq 0$ .

На рис. 5 при условиях (2.16), (2.17) изображены кривые зависимостей пористости связующего  $p_2$  от макродеформации  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  для волокнистого композита при различных объемных содержаниях волокон  $c_1$  и различных значениях макронапряжения  $\langle \sigma_{12} \rangle$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle$ .

Отметим, что кривые не зависят от того, что задано: макронапряжение  $\langle \sigma_{12} \rangle \neq 0$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle \neq 0$ . Графики показывают что в данном случае, как и при условиях (2.12), (2.13), с увеличением  $\langle \sigma_{12} \rangle$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle$  микроразрушения начинаются раньше и проходят более интенсивно.

На рис. 6 при условиях (2.16), (2.17) изображены кривые зависимостей макронапряжения  $\langle \sigma_{33} \rangle$  от макродеформации  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  для волокнистого композита при различных объемных содержаниях волокон  $c_1$  и различных значениях макронапряжения  $\langle \sigma_{12} \rangle$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle$ . Отметим, что, как и на рис. 5, кривые не зависят от того, что задано: макронапряжение  $\langle \sigma_{12} \rangle \neq 0$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle \neq 0$ .

Графики показывают, что, как и при условиях (2.12), (2.13), с увеличением  $\langle \sigma_{12} \rangle$  или  $\langle \sigma_{13} \rangle$  максимальное значение напряжения  $\langle \sigma_{33} \rangle$  уменьшается и фиксированным значениям макродеформации  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  соответствуют меньшие значения макронапряжения  $\langle \sigma_{33} \rangle$ .

**РЕЗЮМЕ.** Побудовано узагальнення структурної теорії короткочасної мікропошкоджуваності матеріалу на випадок, коли неушкоджений матеріал ізотропної матриці волокнистого композита з трансверсально-ізотропними волокнами деформується нелінійно під впливом навантажень, що викликають в композиті складний напружений стан, причому мікроруйнування мають місце тільки в матриці. В основу покладено стохастичні рівняння пружності волокнистого композита з пористою матрицею, матеріал каркаса якої деформується за нелінійним законом. Критерій руйнування мікрооб'ємів матеріалу матриці приймається у формі Губера – Мізеса. Виходячи з властивості функції розподілу статистично однорідного випадкового поля границі мікроміцності матеріалу, сформульовано рівняння балансу зруйнованих мікрооб'ємів для фізично нелінійного матеріалу матриці, що разом з рівняннями зв'язку між макронапруженнями і макродеформаціями волокнистого композиту з пористою фізично нелінійною матрицею утворює замкнуту систему, яка описує спільний процес фізично нелінійного деформування і мікропошкоджуваності. Побудовано алгоритми обчислення залежностей макронапружень в композиті від макродеформацій і мікропошкодженості матриці від макродеформацій, а також отримано відповідно криві при спільній дії нормального і дотичного навантажень на композит у випадку, коли матриця композита деформується за лінійно зміцнюючим законом. Досліджено діаграми деформування в залежності від об'ємного змісту волокон і наявності дотичних навантажень для волокнистого композитного матеріалу.

**SUMMARY.** A generalization of the structural theory of short-term microdamageability of material on the case of physically nonlinear law of deformation of nondamaged material of isotropic matrix of fibrous composite with transversally isotropic fibers on conditions of complicated stress state, microdamages been only in matrix, is constructed. The basis are the stochastic equations of the elasticity for of fibrous composite with porous matrix, a skeleton materials of what is deformed according to nonlinear law. Failure criterion for the microvolumes of matrix material is assumed in the Guber – Mizes form. The equation of damaged microvolumes balance for physically nonlinear materials of matrix is formulated. This equation together with connection law between macrostresses and macrodeformations for fibrous composite with porous physically nonlinear matrix forms closed system what describes joint process of phycally nonlinear deformation and microdamageability. Calculation algorithms of dependence of matrix microdamageability on macrodeformations and of deformation diagrams are constructed for, as well as corresponding curves for joint influence of normal and tangent loading of material in the case matrix is deformed on linearly strengthened law. A de-

pendence of deformation diagrams of fibrous material on volume content of fibers and presence of tangent loading is studied.

**Key words:** fibrous composite, microdamageability of binder, physically nonlinear binder, joint process of physically nonlinear deformation and microdamageability, complicated stress state, joint influence of normal and tangent loading.

1. Березикович Я.С. Приближенные вычисления. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 462 с.
2. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. Механика материалов. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).
3. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
4. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микро неоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – 14, № 2. – С. 3 – 17.
5. Хорошун Л.П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 10. – С. 100 – 108.
6. Хорошун Л.П. Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость // Прикл. механика. – 1998. – 34, № 10. – С. 120 – 127.
7. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикула Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т.3).
8. Хорошун Л.П., Шикула Е.Н. К теории кратковременной микроповреждаемости композитных материалов зернистой структуры // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 8. – С. 87 – 93.
9. Хорошун Л.П., Шикула Е.Н. Моделирование кратковременной микроповреждаемости слоистых композитных материалов // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 9. – С. 67 – 72.
10. Хорошун Л.П., Шикула Е.Н. Кратковременная микроповреждаемость волокнистых композитных материалов с трансверсально-изотропными компонентами при микроуражениях в связующем // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 12. – С. 78 – 84.
11. Хорошун Л.П., Шикула Е.Н. Влияние температуры на микроповреждаемость зернистого материала // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2001. – № 5. – С. 382 – 387.
12. Khoroshun L.P., Shikula E.N. The Micromechanics of Short-Term Damageability of Fibrolaminar Composites // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 5. – P. 638 – 646.
13. Khoroshun L.P., Shikula E.N. A Note on the Theory of Short-Term Microdamageability of Granular Composites under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 1. – P. 60 – 67.
14. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of Laminated Materials under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 4. – P. 432 – 439.
15. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of Fibrous Materials with Transversely Isotropic Fibers under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 6. – P. 701 – 709.
16. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Damage Micromechanics of Laminated Fibrous Composites under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 9. – P. 1083 – 1093.
17. Khoroshun L.P., Shikula E.N. A Theory of Short-Term Microdamage for a Homogeneous Material under Physically Nonlinear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 4. – P. 338 – 395.
18. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of Granular Material under Physically Nonlinear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 6. – P. 656 – 663.
19. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Influence of Physically Nonlinear Deformation on Short-Term Microdamage of Laminar Material // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 8. – P. 878 – 885.
20. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Influence of Physically Nonlinear Deformation on Short-Term Microdamage of a Fibrous Material // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 10. – P. 1137 – 1144.
21. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation of Particulate Composite with Physically Nonlinear Inclusions and Microdamageable Matrix // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 2. – P. 111 – 117.

22. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Influence of the Physical Nonlinearity of Matrix on the Deformation of a Particulate Composite with Microdamageable Inclusions // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 345 – 351.
23. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation of a Laminated Composite with a Physically Nonlinear Reinforcement and Microdamageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 11. – P. 1246 – 1253.
24. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamage of a Laminated Material with Nonlinear Matrix and Microdamaged Reinforcement // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 12. – P. 1331 – 1338.
25. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation of Fibrous Composite with Physically Nonlinear Fibers and Microdamageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 1. – P. 32 – 39.
26. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamageability of a Fibrous Composite with Physically Nonlinear Matrix and Microdamaged Reinforcement // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 2. – P. 127 – 135.

Ин-т механики им. С.П.Тимошенко  
НАН Украины, Киев (Украина)

Поступила 14.07.2005

