

УДК 539.3

©2007 Л. П. Хорошун, Д. В. Бабич, Е. Н. Шикула

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА

Введение. Постановка и решение задач устойчивости для пластин и оболочек вращения из однородных и неоднородных линейно-упругих повреждающихся материалов рассмотрены в работах [3 – 7]. Микроповреждаемость материала моделируется появлением в процессе нагружения стохастически рассеянных по объему квазисферических пор. Повреждаемость линейно-упругого материала приводит к нелинейности диаграммы деформирования, связанной с увеличением концентрации микродефектов с ростом параметров нагружения. В случае физически нелинейных материалов, в которых нелинейность диаграммы деформирования связана в основном с пластичностью, повреждаемость материала приводит к дополнительному механизму нелинейности, физическая природа которого отличается от пластичности материала. Характер нелинейности диаграммы деформирования физически нелинейного повреждающегося материала, таким образом, будет определяться совместным влиянием физической нелинейности (пластичности) и повреждаемости материала.

В настоящей статье осуществляется постановка и решение задачи о бифуркационной устойчивости выпуклых оболочек вращения из однородных изотропных повреждающихся физически нелинейных материалов. В [3] показано, что подход к исследованию устойчивости тонкостенных конструкций из повреждающихся материалов на основе концепции продолжающегося нагружения (отсутствие зон разгрузки по толщине конструкции) является более предпочтительным по сравнению с концепцией постоянной нагрузки (наличие зон разгрузки и догрузки) как с точки зрения точности результатов, так и с точки зрения упрощения решения подобного рода задач, поскольку в этом случае отпадает необходимость в определении зон разгрузки и догрузки. В связи с этим ниже рассматривается устойчивость оболочек на основе концепции продолжающегося нагружения [1, 2].

§1. Определяющие уравнения с учетом повреждаемости физически нелинейного материала. В работе [8] построена теория деформирования физически нелинейного материала, которое сопровождается микроповреждаемостью в процессе нагружения. Микроповреждаемость материала моделируется системой стохастически рассеянных по объему квазисферических микропор плотностью p . Связь макронапряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$ с макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ повреждающегося физически нелинейного материала определяется соотношениями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \left(K^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle. \quad (1.1)$$

В (1.1) секущие эффективные модули объемного сжатия K^* и сдвига μ^* являются функциями пористости p и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Определение эффективных модулей K^* и μ^* пористого физически нелинейного материала сводится к итерационному процессу

$$K^{*(n)} = \frac{4K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) (1-p)^2}{3K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})p + 4\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) (1-p)};$$

$$\mu^{*(n)} = \frac{[9K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})p + 8\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})] \mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) (1-p)^2}{3K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) (3-p) + 4\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) (2+p)}; \quad (1.2)$$

$$\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} = \frac{1}{(1-p)} \left[\frac{K^{*(n-1)}}{K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})} V_{ij\alpha\beta} + \frac{\mu^{*(n-1)}}{\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})} D_{ij\alpha\beta} \right] \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle,$$

где K, μ – модули упругости для физически нелинейного материала; $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle$ – средние деформации в скелете пористого материала; $V_{ij\alpha\beta}, D_{ij\alpha\beta}$ – объемная и девиаторная составляющие единичного тензора $I_{ij\alpha\beta}$, которые определяются соотношениями

$$I_{ij\alpha\beta} = V_{ij\alpha\beta} + D_{ij\alpha\beta}; \quad V_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta};$$

$$D_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha j} \delta_{i\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (1.3)$$

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ определяются как предельные значения итерационного процесса

$$K^* = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{*(n)}; \quad \mu^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*(n)}. \quad (1.4)$$

При постановке задач устойчивости оболочек используются секущие модули упругости E^* и коэффициенты Пуассона ν^* , которые определяются формулами

$$E^* = \frac{9K^* \mu^*}{3K^* + \mu^*}; \quad \nu^* = \frac{3K^* - 2\mu^*}{6K^* + 2\mu^*}. \quad (1.5)$$

Процедура вычисления пористости p состоит в следующем. В качестве критерия прочности в микрообъемах неразрушенной части материала принимается критерий Губера – Мизеса

$$I_{\sigma}^1 = k; \quad I_{\sigma}^1 = (\langle \sigma_{ij}^1 \rangle' \langle \sigma_{ij}^1 \rangle')^{1/2}, \quad (1.6)$$

где $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle'$ – компоненты девиатора средних напряжений по неповрежденной части материала; I_{σ}^1 – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений по неповрежденной части материала; k – предельное значение микропрочности, являющееся случайной функцией координат. Так как средние по неповрежденной части материала напряжения $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$ связаны с макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ зависимостью

$$\langle \sigma_{ij}^1 \rangle = \frac{1}{1-p} \langle \sigma_{ij} \rangle,$$

то из (1.6) следует критерий прочности в пространстве макронапряжений

$$\frac{1}{1-p} I_{\sigma} = k, \quad (1.7)$$

где $I_{\sigma} = (\langle \sigma_{ij} \rangle' \langle \sigma_{ij} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора макронапряжений.

Одноточечную функцию распределения случайной функции координат k можно принять в виде степенного закона

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ \left(\frac{k - k_0}{k_1 - k_0} \right)^n, & k_0 \leq k \leq k_1; \\ 1, & k > k_1 \end{cases} \quad (1.8)$$

или распределения Вейбулла

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ 1 - \exp \left[-m(k - k_0)^n \right], & k \geq k_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Здесь k_0, k_1 – соответственно минимальная и максимальная величины предельных значений k ; m, n – постоянные, выбираемые из условия аппроксимации разброса микропрочности материала.

Предположим, что до начала деформирования в материале существовала начальная микроповрежденность, характеризуемая пористостью p_0 . Функция распределения $F(k)$ в этом случае определяет относительное содержание материала неразрушенной части, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k . Поэтому, если в неразрушенной части материала напряжения равны $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$, то функция $F(I_{\sigma}^1)$ определяет, согласно (1.7) – (1.9), относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета материала. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то можно записать уравнение баланса пористости [8]

$$p = p_0 + (1 - p_0) F \left(\frac{1}{1-p} I_{\sigma} \right). \quad (1.10)$$

Если заданы макродеформации, то в (1.10) следует положить

$$I_{\sigma} = \frac{2\mu^* (p, \langle \varepsilon_{ij} \rangle)}{1-p} I_{\varepsilon}; \quad I_{\varepsilon} = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}, \quad (1.11)$$

где I_{ε} – второй инвариант девиатора тензора макродеформаций.

Уравнения (1.1), (1.6), (1.9) – (1.11) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и повреждаемости материала.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и повреждаемости материала при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости пористого материала и определению пористости. С этой целью к уравнениям (1.2), (1.10), (1.11) применяется метод итераций [8].

§2. Уравнения устойчивости оболочек вращения с учетом повреждаемости физически нелинейного материала. Постановка и решение задач устойчивости оболочек вращения с учетом микроповреждаемости физически нелинейного материала проводится на основе уравнений состояния для плоского напряженного состояния, для которого выполняются такие условия: $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$. С учетом равенства

$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu^*}{1-\nu^*} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$ связь между макронапряжениями и макродеформациями (здесь и далее угловые скобки опускаются) в этом случае имеет вид

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu^* E^*}{1-\nu^{*2}} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \frac{E^*}{1+\nu^*} \varepsilon_{ij};$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu^*}{E^*} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu^*}{1+\nu^*} \sigma_{rr} \delta_{ij} \right) \quad (i, j, r = 1, 2). \quad (2.1)$$

Эффективные секущие характеристики упругости в (2.1) определяются формулами (1.5).

При выводе уравнений устойчивости оболочек используются уравнения связи конечных значений и приращений интенсивностей макронапряжений и макродеформаций, которые определяются вторыми инвариантами девиаторов тензоров макронапряжений и макродеформаций

$$I'_\sigma = \sqrt{2/3} \sqrt{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)}. \quad (2.2)$$

$$I'_\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(1-\nu^*)} \sqrt{(\varepsilon_{11} + \nu^* \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} + \nu^* \varepsilon_{11})^2 - (\varepsilon_{11} + \nu^* \varepsilon_{22}) \times$$

$$\times (\varepsilon_{22} + \nu^* \varepsilon_{11}) + 3(1-\nu^*)^2 \varepsilon_{12}^2}. \quad (2.3)$$

С учетом (2.1) связь между интенсивностями (2.2), (2.3) и их приращениями определяется соотношениями

$$I'_\sigma = 2\mu^* I'_\varepsilon; \quad dI'_\sigma = 2\mu_k dI'_\varepsilon, \quad (2.4)$$

где $\mu_k = \mu^* + I'_\varepsilon \frac{\partial \mu^*}{\partial I'_\varepsilon}$ – касательный модуль сдвига.

Оболочка вращения толщиной h относится к системе координат $0x_1x_2x_3$, связанной со срединной поверхностью. Координаты x_1, x_2, x_3 отсчитываются соответственно в меридиональном, окружном и нормальном к срединной поверхности направлениях. Перемещения точек срединной поверхности в указанных направлениях обозначаются u, v, w . Для рассматриваемого типа оболочек при решении задач устойчивости можно воспользоваться аппаратом теории пологих оболочек [1]. Тогда в рамках

гипотез Кирхгофа – Лява в произвольной точке оболочки деформации будут определяться соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + x_3 \chi_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (2.5)$$

где выражения для мембранных деформаций, кривизн и кручения срединной поверхности имеют вид

$$\bar{\varepsilon}_{11} = u_{,1} - k_1 w; \quad \bar{\varepsilon}_{22} = v_{,2} - k_2 w; \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}(u_{,2} + v_{,1}); \quad (2.6)$$

$$\chi_{11} = -w_{,11}; \quad \chi_{22} = -w_{,22}; \quad \chi_{12} = -w_{,12}.$$

Уравнения местной потери устойчивости оболочек вращения в смешанной форме имеют вид [1]

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} + h(k_1 \bar{\sigma}_{11} + k_2 \bar{\sigma}_{22}) + h(\sigma_{11}^0 w_{,11} + \sigma_{22}^0 w_{,22}) = 0;$$

$$\bar{\varepsilon}_{11,22} + \bar{\varepsilon}_{22,11} - 2\bar{\varepsilon}_{12,12} = -k_1 w_{,22} - k_2 w_{,11}. \quad (2.7)$$

В (2.7) $M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \bar{\sigma}_{ij} dx_3$; $\bar{\sigma}_{ij}$; $\bar{\varepsilon}_{ij}$; χ_{ij} ; w обозначают приращения моментов

и полных напряжений в оболочке вследствие изгиба, а также мембранных напряжений, деформаций, кривизн и прогибов срединной поверхности в возмущенном состоянии; σ_{ii}^0 – напряжения в основном безмоментном напряженном состоянии; k_1, k_2 – главные кривизны оболочки в меридиональном и окружном направлениях. К этим уравнениям необходимо присоединить выражения для возмущений мембранных напряжений через функцию напряжений Φ

$$\bar{\sigma}_{11} = \Phi_{,22}; \quad \bar{\sigma}_{22} = \Phi_{,11}; \quad \bar{\sigma}_{12} = -\Phi_{,12}. \quad (2.8)$$

Приращения полных напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ и мембранных деформаций $\bar{\varepsilon}_{ij}$ определяются путем варьирования в окрестности основного состояния уравнений вида (2.1) с учетом зависимостей (2.2) – (2.4). При этом интенсивности напряжений и деформаций в конечном счете будут определяться компонентами основного напряженного состояния σ_{ij}^0 в силу исчезающе малых, как это следует из постановки задачи о бифуркационной устойчивости, возмущений докритического напряженного состояния при переходе в бесконечно близкое равновесное состояние.

В результате варьирования соотношений (2.1), которые справедливы для полных и мембранных напряжений и деформаций, приращения полных напряжений и мембранных деформаций представляются в виде

$$\bar{\sigma}_{11} = a_{11} \bar{\varepsilon}_{11} + a_{12} \bar{\varepsilon}_{22} + a_{13} \bar{\varepsilon}_{12}; \quad \bar{\sigma}_{22} = a_{21} \bar{\varepsilon}_{11} + a_{22} \bar{\varepsilon}_{22} + a_{23} \bar{\varepsilon}_{12};$$

$$\bar{\sigma}_{12} = a_{31} \bar{\varepsilon}_{11} + a_{32} \bar{\varepsilon}_{22} + a_{33} \bar{\varepsilon}_{12}; \quad (2.9)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = A_{11} \bar{\sigma}_{11} + A_{12} \bar{\sigma}_{22} + A_{13} \bar{\sigma}_{12}; \quad \bar{\varepsilon}_{22} = A_{21} \bar{\sigma}_{11} + A_{22} \bar{\sigma}_{22} + A_{23} \bar{\sigma}_{12};$$

$$\bar{\varepsilon}_{12} = A_{31} \bar{\sigma}_{11} + A_{32} \bar{\sigma}_{22} + A_{33} \bar{\sigma}_{12}, \quad (2.10)$$

где коэффициенты a_{ij}, A_{ij} , определяемые соотношениями

$$a_{11} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{11}}, a_{12} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{22}}, \dots; A_{11} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{11}}{\partial \tilde{\sigma}_{11}}, A_{12} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{12}}{\partial \tilde{\sigma}_{22}}, \dots,$$

ИМЕЮТ ВИД

$$a_{11} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*) \left[(2-\nu^*) \sigma_{11}^0 + (2\nu^* - 1) \sigma_{22}^0 \right] \sigma_{11}^0}{3(1-\nu^{*2}) I_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{12} = \frac{\nu^* E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*) \left[(2-\nu^*) \sigma_{22}^0 + (2\nu^* - 1) \sigma_{11}^0 \right] \sigma_{11}^0}{3(1-\nu^{*2}) I_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{22} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*) \left[(2-\nu^*) \sigma_{22}^0 + (2\nu^* - 1) \sigma_{11}^0 \right] \sigma_{22}^0}{3(1-\nu^{*2}) I_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{21} = \frac{\nu^* E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*) \left[(2-\nu^*) \sigma_{11}^0 + (2\nu^* - 1) \sigma_{22}^0 \right] \sigma_{22}^0}{3(1-\nu^{*2}) I_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{31} = \frac{(E_k - E^*) \left[(2-\nu^*) \sigma_{11}^0 + (2\nu^* - 1) \sigma_{22}^0 \right] \sigma_{12}^0}{3(1-\nu^{*2}) I_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{32} = \frac{(E_k - E^*) \left[(2\nu^* - 1) \sigma_{11}^0 + (2-\nu^*) \sigma_{22}^0 \right] \sigma_{12}^0}{3(1-\nu^{*2}) I_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{13} = 2(E_k - E^*) \frac{\sigma_{11}^0 \sigma_{12}^0}{(1+\nu^*) I_{\sigma^0}^2}; a_{23} = 2(E_k - E^*) \frac{\sigma_{22}^0 \sigma_{12}^0}{(1+\nu^*) I_{\sigma^0}^2};$$

$$a_{33} = \frac{E^*}{1+\nu^*} + 2(E_k - E^*) \frac{(\sigma_{12}^0)^2}{(1+\nu^*) I_{\sigma^0}^2}; \quad (2.11)$$

$$A_{11} = \frac{1}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{(\sigma_{11}^0 - \nu^* \sigma_{22}^0) (2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)}{3 I_{\sigma^0}^2};$$

$$A_{12} = -\frac{\nu^*}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{(\sigma_{11}^0 - \nu^* \sigma_{22}^0) (2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)}{3 I_{\sigma^0}^2};$$

$$A_{22} = \frac{1}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{(\sigma_{22}^0 - \nu^* \sigma_{11}^0) (2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)}{3 I_{\sigma^0}^2};$$

$$\begin{aligned}
A_{12} &= -\frac{\nu^*}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{(\sigma_{22}^0 - \nu^* \sigma_{11}^0) (2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)}{3I_{\sigma^0}^2}; \\
A_{13} &= 2 \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{(\sigma_{11}^0 - \nu^* \sigma_{22}^0) \sigma_{12}^0}{I_{\sigma^0}^2}; \\
A_{23} &= 2 \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{(\sigma_{22}^0 - \nu^* \sigma_{11}^0) \sigma_{12}^0}{I_{\sigma^0}^2}; \\
A_{31} &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{(1 + \nu^*) (2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0) \sigma_{12}^0}{I_{\sigma^0}^2}; \\
A_{32} &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{(1 + \nu^*) (2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0) \sigma_{12}^0}{I_{\sigma^0}^2}; \\
A_{33} &= \frac{1 + \nu^*}{E^*} + 2 \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{(1 + \nu^*) (\sigma_{12}^0)}{I_{\sigma^0}^2}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

В случае однородного докритического напряженно-деформированного состояния уравнения (2.7) с учетом соотношений (2.8) – (2.12) принимают вид

$$\begin{aligned}
D[a_1 w_{,1111} + a_2 w_{,1122} + a_3 w_{,2222} + 2a_4 w_{,1112} + 2a_5 w_{,1222}] - \\
-T_{11}^0 w_{,11} - T_{22}^0 w_{,22} - h(k_1 \Phi_{,22} + k_2 \Phi_{,11}) = 0; \tag{2.13}
\end{aligned}$$

$$A_1 \Phi_{,1111} + A_2 \Phi_{,1122} + A_3 \Phi_{,2222} - A_4 \Phi_{,1112} - A_5 \Phi_{,1222} = -Eh(k_1 w_{,22} + k_2 w_{,11}),$$

где

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} / E; \bar{A}_{ij} = EA_{ij};$$

$$a_1 = \bar{a}_{11}; \quad a_2 = \bar{a}_{12} + \bar{a}_{21} + 2\bar{a}_{33}; \quad a_3 = \bar{a}_{22}; \quad a_4 = \bar{a}_{13} + \bar{a}_{31}; \quad a_5 = \bar{a}_{23} + \bar{a}_{32};$$

$$A_1 = \bar{A}_{22}; \quad A_2 = \bar{A}_{12} + \bar{A}_{21} + 2\bar{A}_{33}; \quad A_3 = \bar{A}_{11}; \quad A_4 = \bar{A}_{32} + \bar{A}_{23}; \quad A_5 = \bar{A}_{13} + \bar{A}_{31};$$

$D = Eh^3 / 12$; E – модуль упругости для неповрежденного материала; $T_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 h$ – усилия в докритическом напряженном состоянии.

§3. Осесимметричное нагружение оболочки. В качестве иллюстративного примера рассмотрим местную потерю устойчивости замкнутой оболочки вращения при действии внутреннего либо внешнего равномерного давления интенсивности q . В этом случае усилия в основном напряженном состоянии определяются соотношениями

$$T_{11}^0 = h\sigma_{11}^0 = \pm \frac{qR_2}{2}; \quad T_{22}^0 = h\sigma_{22}^0 = \pm \frac{qR_2}{2} (2 - \chi); \quad \chi = \frac{k_1}{k_2}. \tag{3.1}$$

Верхний знак относится к случаю внутреннего давления.

Решение системы уравнений (2.13) представляется в виде [1]

$$w = A \sin(k_2 \lambda x_1) \sin(k_2 n x_2); \quad \lambda = \chi m, \quad (3.2)$$

где m, n – количество волн в меридиональном и окружном направлениях.

Критическое давление q_* определяется формулой

$$q_* = \frac{2k_2}{1 \mp (2 - \chi)\gamma} \left[Dk_2^2 \lambda^2 (a_1 + a_2 \gamma + a_3 \gamma^2)^2 + \frac{Eh(1 + \gamma\chi)^2}{\lambda^2 (A_1 + A_2 \gamma + A_3 \gamma^2)} \right]. \quad (3.3)$$

Верхний и нижний знаки относятся к случаю внутреннего и внешнего давлений соответственно. При $\gamma = n^2 / \lambda^2 \gg 1$ минимальное значение критического давления определяется формулой

$$q_* = \frac{2Eh^2 k_1 k_2^2}{\mp \sqrt{3} (2k_2 - k_1)} \sqrt{\frac{a_3}{A_3}}. \quad (3.4)$$

В случае сферической оболочки формула (3.4) принимает вид

$$q_* = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3} R^2} \sqrt{\frac{a_3}{A_3}}. \quad (3.5)$$

Для сплошного упругого материала выражение (3.4) переходит в известную формулу [1]

$$q_* = \frac{2E}{\mp \sqrt{3} (1 - \nu^2)} \frac{h^2 k_1 k_2^2}{2k_2 - k_1}.$$

В формуле (3.4) k_1, k_2 представляют собой некоторые средние значения главных кривизн участков оболочки, ограниченных узловыми линиями локальных форм потери устойчивости. Из бесчисленного множества значений q_* , определяемых формулами (3.4), искомым является минимальное. В случае замкнутых выпуклых оболочек наиболее слабыми в смысле локальной устойчивости участками будут области поверхности оболочки, содержащие касательные к образующей, параллельные либо перпендикулярные к оси вращения. В частности, в эллипсоидальных оболочках такие области расположены на экваторе и в полюсах. Кривизны в полюсах (индекс p) и экваториальных точках (индекс e) в оболочке с полуосями a (радиус экватора) и b определяются выражениями

$$k_{1p} = b/a^2, \quad k_{2p} = b/a^2; \quad k_{1e} = a/b^2, \quad k_{2e} = 1/a. \quad (3.6)$$

Из формулы (3.4) с учетом выражений (3.6) следует, что критические значения давления для эллипсоидальных оболочек при внешнем воздействии в зависимости от соотношения полуосей будут определяться формулами

$$q_* = q_*^0 \times \begin{cases} (2b^2/a^2 - 1)^{-1}, & a < b; \\ b^2/a^2, & a > b; \end{cases} \quad q_*^0 = \frac{2h^2 E}{\sqrt{3} a^2} \sqrt{\frac{a_3}{A_3}}. \quad (3.7)$$

При внутреннем давлении возможна местная потеря устойчивости вблизи экватора:

$$q_* = q_*^0 \left(1 - 2b^2/a^2\right)^{-1} \quad (a > \sqrt{2}b).$$

§5. Числовые примеры. Выражения (3.4), (3.5) с учетом (3.1) являются трансцендентными уравнениями относительно критических напряжений и не несут явной информации о влиянии повреждаемости и физической нелинейности материала на устойчивость оболочек. Критические напряжения для оболочек заданных геометрических размеров можно определить с помощью прямого решения этих уравнений итерационными методами с привлечением методики расчета эффективных параметров деформативности физически нелинейного материала при прогрессирующей микроповреждаемости, подробно изложенной в [8].

Исследование влияния микроповреждаемости на устойчивость оболочек вращения из физически нелинейных материалов можно провести с помощью упрощенной процедуры. Целью этой процедуры является установление явной зависимости безразмерной толщины сферической (эллипсоидальной) оболочки h/R (h/a) от параметра нагружения q_* , которые связаны соотношениями (3.5) и (3.4). Сущность указанной процедуры покажем на примере сферической оболочки:

в подходящем образом выбранном интервале $[0, (\varepsilon_{11}^0)_k]$ с некоторым шагом задается последовательность значений макродеформаций $(\varepsilon_{11}^0)_i$;

с использованием формул (1.2), (1.10) итерационным методом определяется последовательность соответствующих значений пористости, эффективных модулей $(E^*)^i$, ν^*_i и макронапряжений $(\sigma_{11}^0)_i$, которые отождествляются с критическими напряжениями для оболочки;

последовательность значений касательного модуля вычисляется по формуле

$$(E_k)^i = \frac{(\sigma_{11}^0)_{i+1} - (\sigma_{11}^0)_i}{(\varepsilon_{11}^0)_{i+1} - (\varepsilon_{11}^0)_i}.$$

Относительные толщины оболочки, соответствующие последовательности значений $(\sigma_{11}^0)_i$, находятся из соотношения $\left(\frac{h}{R}\right)_i = (\sigma_{11}^0)_i \frac{\sqrt{3(1-\nu_i^{*2})}}{\sqrt{(E^*)^i (E_k)^i}}$.

Критические значения давления q_*^i , соответствующие критическим напряжениям $(\sigma_{11}^0)_i$, вычисляются по формуле (3.1). Результаты вычислений по указанной схеме представлены на рис. 1 в виде графиков, где $l - 4$ соответственно обозначают зависимости безразмерного параметра критического давления q_*/μ_0 от обратной величины относительной толщины оболочки для линейно-упругого материала, для физически нелинейного материала, для повреждающегося линейно-упругого материала и физически нелинейного повреждающегося материала. Вычисления выполнены для оболочек из физически нелинейного материала, объемные деформации которого являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т. е. в микрообъеме сплошного материала имеют место соотношения

$$\langle \sigma_{rr}^1 \rangle = K \langle \varepsilon_{rr}^1 \rangle; \quad \langle \sigma_{ij}^1 \rangle = 2\mu(I_\varepsilon^1) \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle,$$

где K – модуль объемного сжатия, который не зависит от деформаций, а модуль сдвига $\mu(I_\varepsilon^1)$ описывается функцией

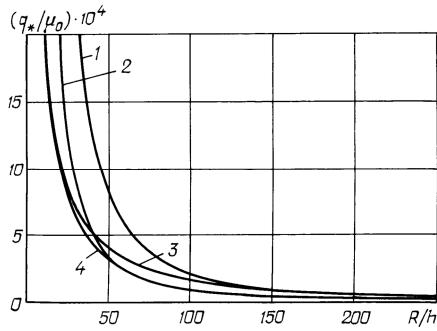


Рис. 1

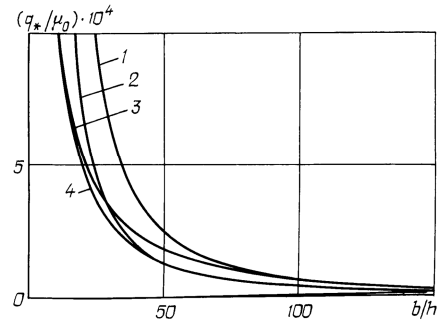


Рис. 2

$$\mu(I_\varepsilon^1) = \begin{cases} \mu_0, & I_\sigma^1 \leq T_0; \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0}\right) \frac{T_0}{2I_\varepsilon^1}, & I_\sigma^1 \geq T_0, \end{cases}$$

причем

$$I_\varepsilon^1 = (\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle')^{1/2}; \quad I_\sigma^1 = (\langle \sigma_{ij}^1 \rangle' \langle \sigma_{ij}^1 \rangle')^{1/2}; \quad T_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0,$$

где $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle'$, $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle'$ – компоненты девиаторов соответственно деформаций и напряжений в сплошном материале; σ_0 – предел пропорциональности материала; μ_0 , μ' – постоянные материала. Значения характеристик деформативных свойств материала принимались равными:

$$E = 3,00 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad \nu = 0,35; \quad \mu_0 = 1,11 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad \mu' = 2,89 \cdot 10^9 \text{ Па};$$

предел пропорциональности σ_0 составлял $\sigma_0 = 3,00 \cdot 10^6$ Па; характер распределения микропрочности описывался законом Вейбулла с характеристиками разброса прочности $k_0 = 8,98 \cdot 10^6$ Па; $n = 2$; $m = 10^3$.

На рис. 2 представлены аналогичные результаты для вытянутой ($a = 0,5b$) эллипсоидальной оболочки, нагруженной внешним давлением. На рис. 3 и 4 изображены

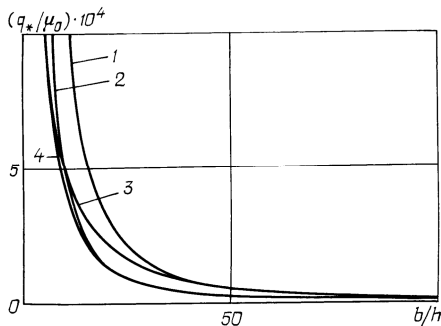


Рис. 3

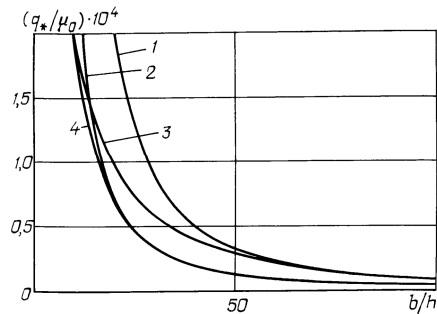


Рис. 4

результаты, относящиеся к сплюснутым ($a = 2b$) эллипсоидальным оболочкам соответственно при внешнем и внутреннем давлении. Представленные на рисунках результаты показывают, что физическая нелинейность и микрповреждаемость материала приводят к понижению устойчивости оболочек. Степень влияния указанных факторов на снижение критических нагрузок повышается с увеличением относительной толщины оболочек.

РЕЗЮМЕ. Виконано постановку і дано розв'язок задач про біфуркаційну стійкість оболонок обертання із фізично нелінійних матеріалів з врахуванням прогресуючої з ростом навантаження пошкоджуваності матеріалу.

SUMMARY. The statement is offered and the solution is given for the problems on bifurcation stability of shells of revolution made of physically nonlinear materials with allowance for the progressing with the load increasing damageability of a material.

Key words: physically nonlinear material, damageability of a material, bifurcation stability, shell of revolution.

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 879 с.
2. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. – 511 с.
3. Khoroshun L.P., Babich D.V. Problems of Plate Stability in Short-Term Damaging of a Material // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 2. – P. 898 – 905.
4. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Shells of Revolution Made of Fibrous Composite with Damageable Matrix // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 10. – P. 1148 – 1154.
5. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Rectangular Plates Made of a Laminate Material with Damageable Components // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 5. – P. 548 – 554.
6. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Cylindrical Shells Made of a Laminate Material with Damageable Components // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 6. – P. 677 – 683.
7. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Laminated Convex Shells of Revolution with Microdamages in Laminate Components // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 7. – P. 810 – 817.
8. Khoroshun L.P., Shikula E.N. A Theory of Short-Tim Micromechanics of Homogeneous Material for the Physically Nonlinear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 4. – P. 388 – 395.

Ин-т механики им. С.П. Тимошенко
НАН Украины, Киев (Украина)

Поступила 25.01.2006