

9. Одна задача про розмноження бактерій.

Анна Скороход, Оксана Мулява

Національний університет харчових технологій.

Вступ. Застосовуючи біотехнологічні процеси для виробництва різних речовин і харчових продуктів природно ставити задачі про розмноження бактерій. Пропонуємо одну з них: «У сприятливих для розмноження умовах перебуває певна кількість бактерій. Через який час кількість бактерій подвоюється?».

Матеріали і методи. Використовуючи математичний апарат, а саме диференціальне рівняння першого порядку із заданою початковою умовою (задача Коші), розв'язано одну із задач про розмноження бактерій.

Результати. Нехай у початковий момент було m_0 бактерій. Позначимо через $m(t)$ кількість бактерій у момент часу t ($m(0) = m_0$). Із експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій за сприятливих умов пропорційна їхній кількості. Цей біологічний експериментальний закон дає змогу написати диференціальне рівняння розмноження бактерій:

$$m'(t) = km(t), k > 0. \quad (1)$$

Коефіцієнт пропорційності k залежить від виду бактерій та умов, у яких вони перебувають. Його можна визначити експериментально.

Початкова задача зветься до наступної математичної задачі: «Знайти розв'язок $m = m(t)$ рівняння (1), для якого $m(0) = m_0$ і з рівності $m(t) = 2m_0$ визначити час подвоєння початкової кількості бактерій».

Оскільки $m(t) > 0$, то, поділивши обидві частини рівняння (1) на $m(t)$ отримаємо:

$$\begin{aligned} (\ln m(t))' &= k, \\ \ln m(t) &= kt + C_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Позначивши $C_1 = \ln C$, $C > 0$ з рівняння (2) маємо:

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Щоб з цієї множини функцій отримати таку, яка описує процес розмноження бактерій, скористаємося рівністю $m(0) = m_0$. Остаточно маємо:

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Час t , за який кількість бактерій подвоїться, визначається з рівняння:

$$2m_0 = m_0 e^{kt}.$$

$$\text{Звідси } t = \frac{1}{k} \ln 2.$$

Висновки: час, впродовж якого кількість бактерій подвоюється, залежить від початкової кількості бактерій.

Література

1. Лавренко С.П. Курс диференціальних рівнянь./ Вид-во наук.-техн. л-ри. - 2000. - 216 с.

2. Zwietering M.N., Jongenburger I., Rombouts F.M. and K.van't Riet. Modeling of the Bacterial Growth Curve/ Appl Environ Microbiol. – 2007. – Vol 56(6).

P. 1875-1881.