

УДК 630.376.

ПРИВАЛ ОБОБЩАЮТ ЗАДАЧУ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ,
ОСЛАБИЛИСЬ РАЗРЕЗАМ ПО ПОВЕРХНОСТИ СЖАТОГО СФЕРОИДА
ВРАЩЕНИЯ: Препринт 86.18/ Мартыненко М.А. - Киев:
Ин-т математики АН УССР, 1986. - 48 с.

Метод частных областей применяется к задаче определения напряженно-деформированного осесимметричного состояния бесконечного тела с математическим разрезом по части поверхности сжатого сфероида вращения. Упругое пространство разбивается на внешнюю и внутреннюю области по отношению к поверхности эллипсоида и в каждой из областей поля напряжений и перемещений представляются в виде разложения по ортогональным системам функций Лежандра. После выполнения граничных условий и условий непрерывности физических полей на поверхностях соприкосновения частных областей задача приводится к взаимосвязанной системе парных уравнений, а затем к системе интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Осуществлено, асимптотическое суммирование точных решений вблизи граничной окрестности эллипсоидального разреза и получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений, а также для локальных полей напряжений и перемещений. На основании численных данных и критерия максимальных осевых растягивающих напряжений определяются самые опасные геометрии разрезов и прогнозируются начальное направление предполагаемого разрушения материала.

© Институт математики АН УССР, 1986

Экспериментальные исследования поверхностей разрушения различных марок стали методами электронной фраттографии показывают, что первоначальные поверхности разрыва сплошности материалов имеют переменную кривизну. Подойти к оценке прочности материалов с внутренними неплоскими трещинами можно через решения класса задач теории упругости о равновесии тел, ослабленных разрезами по поверхностям вращения второго порядка. В этом случае имеется возможность варьировать кривизну поверхности разреза, приближая его геометрию к реальной форме трещины.

§ 1. Решение уравнений Ламе

Решение статических смешанных задач механики деформированного твердого тела базируется на решении уравнений равновесия упругих тел, представленных в той или иной форме. Различные подходы к решению основных граничных статических задач теории упругости для тел, ограниченных поверхностями вращения, приведены, например, в монографиях [1-6].

Построение решений уравнений равновесия для сжатого эллипсоида вращения и пространства с эллипсоидальной полостью будем проводить методом работы [2]. Задачу рассматриваем в сжатых эллипсоидальных координатах вращения ξ, η, φ , которые введем с помощью равенств

$$\xi + i\eta = c \operatorname{sh} \xi \cos \eta + i c \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad \varphi = \varphi \quad (1.1)$$

$$(0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

где параметр c определяет полуфокусные расстояния эллипсоида; ξ, η, φ - цилиндрические координаты.

Уравнение равновесия для однородной изотропной среды, ограниченной поверхностью эллипсоида, возьмем в форме Ламе [1]

$$2 \frac{m-1}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{u} = 0 \quad (1.2)$$

где $\bar{u}$ - вектор упругих перемещений; m - число Пуассона. Учитывая осесимметричность задачи, введем в рассмотрение следующие функции

$$\frac{cm}{2(m-2)} \operatorname{div} \vec{u} = \theta(\xi, \eta), \quad \frac{cm}{4(m-1)} \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{e}_\varphi \omega(\xi, \eta) \quad (1.4)$$

где $\vec{e}_\varphi$ - единичный вектор. На рис. I показано сечение элли-

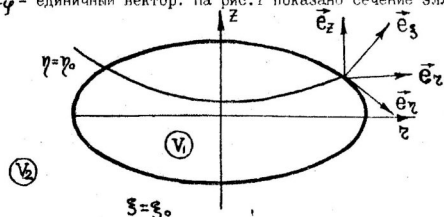


Рис. I.

псида меридиональной плоскости. Вектор $\vec{e}_\varphi$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка. С учетом равенств (1.3) уравнение Ламе в прогибах на эллипсоидальные оси координат [7] запишется в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial (\sin \eta \omega)}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{1}{ch \xi} \frac{\partial (ch \xi \omega)}{\partial \xi} = 0. \quad (1.4)$$

Решение системы уравнений (1.4) находится методом разделения переменных и представляется следующими рядами

$$2G\theta(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (2n+1) P_n(ish\xi) P_n(\cos \eta),$$

$$2G\omega(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (2n+1) P_n^{(1)}(ish\xi) \frac{P_n^{(1)}(\cos \eta)}{n(n+1)} \quad (1.5)$$

где $P_n^{(1)}(\mu)$ и $P_n^{(1)}(\mu)$ - функции и присоединенные функции Лежандра [8]; A_n - бесконечная последовательность неизвестных коэффициентов; G - модуль сдвига материала.

Проекция вектора упругих перемещений будем находить из системы (1.3). Записывая операторы div и rot в криволинейной системе координат [7], а затем переходя к эллипсоидальным координатам (1.1), получим

$$\frac{\partial u_\xi h}{\partial \xi} - \frac{\partial u_\eta h}{\partial \eta} = 4 \frac{m-1}{m} \omega(\xi, \eta) h^2, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial (u_\eta ch\xi \sin \eta h)}{\partial \eta} + \sin \eta \frac{\partial (u_\xi ch\xi h)}{\partial \xi} =$$

$$= 2 \frac{m-2}{m} \theta(\xi, \eta) h^2$$

где $h = \sqrt{ch^2 \xi - \sin^2 \eta}$.

Учитывая соотношения

$$(\vec{e}_z, \vec{e}_\xi) = -(\vec{e}_z, \vec{e}_\eta) = sh\xi \sin \eta h^{-1},$$

$$(\vec{e}_z, \vec{e}_\eta) = (\vec{e}_z, \vec{e}_\xi) = ch\xi \cos \eta h^{-1}. \quad (1.7)$$

из равенств (1.6) легко получить следующую систему

$$ch\xi \cos \eta \left(\frac{\partial u_z}{\partial \xi} - \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right) - sh\xi \sin \eta \left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right) =$$

$$= 4 \frac{m-1}{m} \omega(\xi, \eta) h^2, \quad (1.8)$$

$$sh\xi \sin \eta \left(\frac{\partial u_z}{\partial \xi} - \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right) + ch\xi \cos \eta \left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \frac{u_z h^2}{ch\xi \cos \eta} = 2 \frac{m-2}{m} \theta(\xi, \eta) h^2$$

где u_z, u_ξ - проекции вектора перемещений на цилиндрические оси координат. Если поочередно домножить первое уравнение системы на $(-sh\xi \sin \eta)$, $ch\xi \cos \eta$, а второе - на $ch\xi \cos \eta$, $sh\xi \sin \eta$ и последовательно полученные равенства просуммировать, то придем к системе неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial (u_\eta \sin \eta)}{\partial \eta} = 2 \frac{m-2}{m} ch\xi \cos \eta \theta - 4 \frac{m-1}{m} sh\xi \sin \eta \omega$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \eta} - \frac{1}{ch\xi} \frac{\partial (u_\xi ch\xi)}{\partial \xi} = -2 \frac{m-2}{m} sh\xi \sin \eta \theta - 4 \frac{m-1}{m} ch\xi \cos \eta \omega \quad (1.9)$$

Однородная система (I.9) с точностью до знака при U_2 совпадает с системой (I.4), поэтому ее решение имеет вид (I.5). Частное решение неоднородной системы (I.9) представляется через известные функции $\omega(\xi, \eta)$, $\theta(\xi, \eta)$ в виде комбинаций

$$\begin{aligned} \bar{U}_2 &= -4 \frac{m-1}{m} \text{sh} \xi \cos \eta \theta + \frac{3m-4}{m} \text{ch} \xi \sin \eta \omega \\ \bar{U}_2 &= \frac{3m-4}{m} \text{ch} \xi \sin \eta \theta + 4 \frac{m-1}{m} \text{sh} \xi \cos \eta \omega \end{aligned} \quad (1.10)$$

Достоверность этой формы частного решения легко проверить, если подставить (I.10) в (I.9) и учесть систему уравнений (I.4). Представим частное решение (I.10) в виде разложения по ортогональным системам функций Лежандра. С этой целью воспользуемся рекуррентными соотношениями такого типа [9]

$$(2n+1)\sqrt{1-x^2} P_n^{(k)}(x) = P_{n-1}^{(k)}(x) - P_{n+1}^{(k)}(x), \quad (1.11)$$

$$(2n+1)x P_n^{(k)}(x) = (n-k+1)P_{n+1}^{(k)}(x) + (n+k)P_{n-1}^{(k)}(x)$$

и преобразуем произведения тригонометрических функций на $\omega(\xi, \eta)$, $\theta(\xi, \eta)$ к виду

$$\begin{aligned} 2G \cos \eta \theta(\xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n \cos \eta P_n(i \text{sh} \xi) P_n(\cos \eta) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [n A_{n-1} P_{n-1}(i \text{sh} \xi) + (n+1) A_{n+1} P_{n+1}(i \text{sh} \xi)] P_n(\cos \eta) \\ 2G \sin \eta \omega(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) A_n P_n^4(i \text{sh} \xi) \frac{\sin \eta P_n^4(\cos \eta)}{n(n+1)} = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} [A_{n-1} P_{n-1}^4(i \text{sh} \xi) - A_{n+1} P_{n+1}^4(i \text{sh} \xi)] P_n(\cos \eta) \\ 2G \sin \eta \theta(\xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n P_n(i \text{sh} \xi) \sin \eta P_n(\cos \eta) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_{n+1} P_{n+1}(i \text{sh} \xi) - A_{n-1} P_{n-1}(i \text{sh} \xi)] P_n^4(\cos \eta), \end{aligned} \quad (1.12)$$

С

$$\begin{aligned} 2G \cos \eta \omega(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) A_n P_n^4(i \text{sh} \xi) \frac{\cos \eta P_n^4(\cos \eta)}{n(n+1)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1) A_{n-1} P_{n-1}^4(i \text{sh} \xi) + n A_{n+1} P_{n+1}^4(i \text{sh} \xi)] \frac{P_n^4(\cos \eta)}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Подставляя (I.12) в (I.10) и используя соотношения между функциями Лежандра с соседними индексами [9] такого типа

$$\begin{aligned} (n-k+1)P_{n+1}^k(z) &= (n+k+1)z P_n^k(z) + \sqrt{z^2-1} P_n^{k+1}(z), \\ P_{n-1}^k(z) &= z P_n^k(z) - (n-k+1)\sqrt{z^2-1} P_n^{k-1}(z), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$(n+k)z P_{n-1}^k(z) = (n-k)z P_n^k(z) - \sqrt{z^2-1} P_n^{k+1}(z)$$

после ряда преобразований частное решение (I.10) представим следующими рядами

$$\begin{aligned} 2G \bar{U}_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ [B_n - i(2n+1)A_{n-1} \text{sh}^2 \xi] \alpha_{1n} + b_n \alpha_{2n} \} P_n(\cos \eta) \\ 2G \bar{U}_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ [B_n - i(2n+1)A_{n-1} \text{sh}^2 \xi] \alpha_{3n} + b_n \alpha_{4n} \} \frac{P_n^4(\cos \eta)}{n(n+1)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{1n} &= P_n(i \text{sh} \xi), \quad \alpha_{2n} = \text{sh} \xi \text{ch} \xi P_n^4(i \text{sh} \xi) + \\ &+ (n+1) \text{ch}^2 \xi P_n(i \text{sh} \xi) - 2 \frac{m-1}{m} P_n^4(i \text{sh} \xi), \\ \alpha_{3n} &= P_n^4(i \text{sh} \xi), \quad \alpha_{4n} = n(n+1) \text{sh} \xi \text{ch} \xi P_n(i \text{sh} \xi) + \\ &+ (n \text{ch}^2 \xi + 2 \frac{m-1}{m}) P_n^4(i \text{sh} \xi), \quad b_n = i(A_{n-1} A_{n+1}), \\ B_n &= i(2n+1) \left(\frac{m-2}{m} A_{n-1} + 2 \frac{m-1}{m} A_{n+1} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Решения однородной системы (1.5) запишем в виде:

$$2G \tilde{U}_z = \sum_{n=0}^{\infty} (A'_n - B_n) P_n(i sh \xi) P_n(\cos \eta) \quad (1.16)$$

$$2G \tilde{U}_z = \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n - B_n) P_n^1(i sh \xi) \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)}$$

где A'_n - неизвестные коэффициенты. Суммируя (1.14) и (1.16), общее решение неоднородной системы (1.9) получим в виде следующих разложений по ортогональным системам функций Лежандра

$$2G U_z = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(\xi) d_{1n}(\xi) + b_n d_{2n}(\xi)] P_n(\cos \eta) \quad (1.17)$$

$$2G U_z = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\xi) d_{3n}(\xi) + b_n d_{4n}(\xi)] \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)}$$

где $a_n(\xi) = A'_n - i(2n+1)sh^2 \xi A_{n-1}$

Рассмотрим случай, когда на поверхности $\xi = \xi_0$ задан вектор перемещений и его проекции на оси Ox , Oz представляются рядами по функциям Лежандра

$$U_z|_{\xi=\xi_0} = f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos \eta) \\ U_z|_{\xi=\xi_0} = \varphi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} \quad (1.18)$$

где f_n, φ_n - известные коэффициенты.

Удовлетворяя граничным условиям (1.16), получаем алгебраическую систему уравнений для определения $b_n, a_n = a_n(\xi_0)$. Покажем, что поле перемещений в произвольной внутренней точке эллипсоида определяется через найденные коэффициенты $b_n, a_n = a_n(\xi_0)$. Для этого запишем $a_n(\xi)$ в виде

$$a_n(\xi) = a_n + i(sh^2 \xi_0 - sh^2 \xi)(2n+1)A_{n-1}; \quad a_n = a_n(\xi_0)$$

и подставим в (1.17). Если воспользоваться приведенными ниже тождественными равенствами

$$\sum_{n=0}^{\infty} i(2n+1)A_{n-1} P_n(i sh \xi) P_n(\cos \eta) = \frac{1}{sh^2 \eta - ch^2 \xi} \cdot$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} b_n [P_{n+2}(i sh \xi) P_n(\cos \eta) - \\ - P_n(i sh \xi) P_{n+2}(\cos \eta)] = q_1(\xi, \eta) \quad (1.20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} i \frac{2n+1}{n(n+1)} A_{n-1} P_n^1(i sh \xi) P_n^1(\cos \eta) = \\ = \frac{1}{sh^2 \eta - ch^2 \xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2n+3} [P_{n+2}^1(i sh \xi) P_n^1(\cos \eta) - \\ - P_n^1(i sh \xi) P_{n+2}^1(\cos \eta)] = q_2(\xi, \eta)$$

то перемещения в произвольной точке эллипсоида вращения представляются в виде

$$2G U_z = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n d_{1n}(\xi) + b_n d_{2n}(\xi)] P_n(\cos \eta) + \\ + (sh^2 \xi_0 - sh^2 \xi) q_1(\xi, \eta) \quad (1.21) \\ 2G U_z = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n d_{3n}(\xi) + b_n d_{4n}(\xi)] \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} + \\ + (sh^2 \xi_0 - sh^2 \xi) q_2(\xi, \eta).$$

Заметим, что вывод тождеств (1.20) базируется на соотношениях между функциями Лежандра с соседними индексами такого типа

$$P_{n+2}^1(z) = \frac{(2n+1)(2n+3)}{n(n+1)} z^2 P_n(z) - n^1(2n+3) \cdot \\ \times z P_{n-1}^1(z) - \frac{(n+2)P_n^1(z)}{n+1}, \quad (1.22) \\ P_{n+2}(z) = \frac{(2n+1)(2n+3)}{(n+1)(n+2)} z^2 P_n(z) - \frac{n(2n+3)}{(n+1)(n+2)} \cdot \\ \times z P_{n-1}(z) - \frac{n+1}{n+2} P_n(z), \quad z = i sh \xi.$$

По полученному полю перемещений компоненты тензора напряжений можно найти, например, на основании закона Гука [1]. Однако, такой подход связан с довольно громоздкими преобразованиями. Значительно проще выражения для цилиндрических проекций вектора усилий получить из следующего равенства [1]

$$2\mu \left[\vec{n} \frac{\text{div} \vec{u}}{m-2} + (\vec{n} \cdot \text{grad}) \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{n} \text{rot} \vec{u} \right]_S = \vec{F}_n \quad (1.23)$$

где $\vec{n}$ — орт внешней нормали к граничной поверхности тела S , $\vec{F}_n$ — вектор внешних усилий на S . Если положить в этом равенстве $\vec{n} = \vec{e}_\xi$, а затем последовательно скалярно умножить его на единичные вектора $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$, то после ряда преобразований, базирующихся на соотношениях (1.7), (1.9), получим

$$\text{hc } Z_\xi = -2 \frac{m-1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^1(\text{ish}_\xi) P_n(\cos \eta) - \frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial (\sin \eta u_\xi)}{\partial \eta}$$

$$\text{hc } R_\xi = 2 \frac{m-1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n(\text{ish}_\xi) P_n^1(\cos \eta) - \text{th}_\xi u_\xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}$$

где Z_ξ , R_ξ — цилиндрические проекции вектора внешних усилий на поверхности $\xi = \text{const}$. При выводе (1.24) были использованы следующие тождества

$$2\mu (\text{ch}_\xi \cos \eta \theta - \text{sh}_\xi \sin \eta \omega) = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^1(\text{ish}_\xi) P_n(\cos \eta), \quad (1.25)$$

$$2\mu (\text{sh}_\xi \sin \eta \theta + \text{ch}_\xi \cos \eta \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n(\text{ish}_\xi) P_n^1(\cos \eta)$$

Аналогично, цилиндрические проекции вектора усилий Z_η , R_η на поверхности с нормалью $\vec{n} = \vec{e}_\eta$ представляются в виде

$$\text{hc } Z_\eta = -2 \frac{m-1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n(\text{ish}_\xi) P_n^1(\cos \eta) + \frac{1}{\text{ch}_\xi} \frac{\partial (\text{ch}_\xi u_\eta)}{\partial \xi}, \quad (1.26)$$

$$\text{hc } R_\eta = -2 \frac{m-1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^1(\text{ish}_\xi) P_n(\cos \eta) - \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} - \text{ctg} \eta u_\eta$$

Для полноты изложения укажем, что компоненты тензора напряжений в произвольной точке эллипсоида вычисляются по следующим формулам

$$\sigma_{\xi\xi} = Z_\xi (\vec{e}_\xi \vec{e}_\xi) + R_\xi (\vec{e}_\xi \vec{e}_\xi)$$

$$\sigma_{\xi\eta} = Z_\xi (\vec{e}_\xi \vec{e}_\eta) + R_\xi (\vec{e}_\xi \vec{e}_\eta) \quad (1.27)$$

$$\sigma_{\eta\eta} = Z_\eta (\vec{e}_\xi \vec{e}_\eta) + R_\eta (\vec{e}_\xi \vec{e}_\eta)$$

где косинусы углов между единичными векторами находятся из соотношений (1.7).

Поля перемещений и напряжений во внешней области ($\xi \geq \xi_0$) определяются равенствами, подобными (1.21), (1.27), только в них необходимо вместо постоянных a_n , b_n ввести коэффициенты c_n , d_n , а функции Лежандра первого рода $P_n^k(\text{ish}_\xi)$ заменить функциями Лежандра второго рода $Q_n^k(\text{ish}_\xi)$.

§2. Приведенные задачи об эллипсоидальном разрезе к взаимосвязанной системе парных уравнений.

Пусть упругое пространство содержит внутренний математический разрез, который расположен по части поверхности сжатого эллипсоида вращения и находится под действием внешних осесимметричных сил, приложенных на бесконечности. Предполагаем, что внешняя система сил такова, что контактирование поверхностей разреза не наблюдается. Как обычно, согласно принципу Бюкнера [10], внешнюю нагрузку переносим на поверхность разреза и в дальнейшем будем рассматривать задачу о напряженно-деформированном состоянии упругой среды с эллипсоидальным разрезом при заданных осесимметричных нагрузках на поверхностях разреза. В эллипсоидальных координатах разрез занимает поверхность S ($\xi = \xi_0$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Упругое пространство разобьем на две области: внутреннюю область V_1 ($\xi \leq \xi_0$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) и внешнюю область V_2 ($\xi \geq \xi_0$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). На рис. 2 показано сечение упругого пространства меридиональной плоскостью.

Согласно предыдущему параграфу, цилиндрические проекции векторов перемещений и усилий в областях V_1 , V_2 представим в виде рядов по функциям Лежандра (1.21) и (1.24). Входящие в эти разложения неизвестные бесконечные последователь-

ности коэффициентов a_n, b_n, c_n, d_n будем находить из

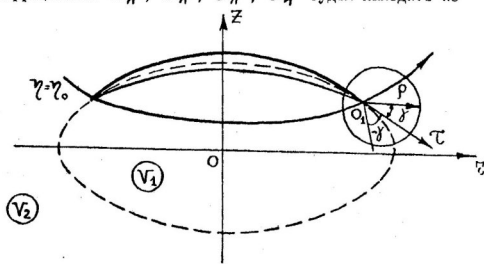


Рис. 2.

следующих условий

$$R_{\xi}^{(1)} = -R_{\xi}^{(2)} = f_1(\eta), \quad Z_{\xi}^{(1)} = -Z_{\xi}^{(2)} = f_2(\eta) \quad (2.1)$$

($\xi = \xi_0, 0 \leq \eta \leq \eta_0$)

$$-R_{\xi}^{(1)} = R_{\xi}^{(2)}, \quad Z_{\xi}^{(1)} = -Z_{\xi}^{(2)}; \quad (\xi = \xi_0, \eta_0 \leq \eta \leq \pi) \quad (2.2)$$

$$U_z^{(1)} = U_z^{(2)}, \quad U_z^{(1)} = U_z^{(2)}, \quad (\xi = \xi_0, \eta_0 \leq \eta \leq \pi) \quad (2.3)$$

где $f_i(\eta)$ — известные функции, соответствующие нагрузке, приложенной на бесконечности. Условия (2.2), (2.3) соответствуют требованию непрерывности полей перемещений и напряжений на поверхности эллипсоида вне разреза.

Согласно равенствам (1.21), (1.24) цилиндрические проекции векторов перемещений и усилий на поверхности $\xi = \xi_0$ записываются в виде

$$2G U_z^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n d_{1n} + b_n d_{2n}) P_n(\cos \eta) \quad (2.4)$$

$$2G U_z^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n d_{3n} + b_n d_{4n}) \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)}$$

$d_{in} = d_{in}(\xi_0)$

$$h_0 c Z_{\xi}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \beta_{1n} + b_n \beta_{2n}) P_n(\cos \eta) \quad (2.5)$$

$$h_0 c R_{\xi}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \beta_{3n} + b_n \beta_{4n}) \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)}$$

$$\beta_{1n} = P_n^1, \quad \beta_{2n} = n c h_{\xi_0} [(n+1) \operatorname{sh} \xi_0 P_n + c h_{\xi_0} P_n^1],$$

$$\beta_{3n} = n(n+1) P_n - t h_{\xi_0} P_n^1, \quad h_0 = \sqrt{c h_{\xi_0}^2 - 3 \sin^2 \eta},$$

$$\beta_{4n} = n[(n+1)(n c h_{\xi_0}^2 + 1) P_n + (n \operatorname{sh} \xi_0 c h_{\xi_0} - 2 \frac{m-1}{m} \frac{t h_{\xi_0}}{n}) P_n^1].$$

Здесь и в дальнейшем, пока не будет специально оговорено, функции Лежандра P_n^k, Q_n^k являются функциями аргумента $(i \operatorname{sh} \xi_0)$.

Аналогично, поля перемещений и усилий, записанные для области V_2 , принимают следующий вид на поверхности $\xi = \xi_0$

$$2G U_z^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \delta_{1n} + d_n \delta_{2n}) P_n(\cos \eta), \quad (2.7)$$

$$2G U_z^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \delta_{3n} + d_n \delta_{4n}) \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)},$$

$$\delta_{in} = \delta_{in}(\xi_0), \quad \delta_{1n} = Q_n, \quad \delta_{2n} = \operatorname{sh} \xi_0 c h_{\xi_0} Q_n^1 +$$

$$+ (n+1) c h_{\xi_0}^2 Q_n - 2 \frac{m-1}{m} Q_n, \quad \delta_{3n} = Q_n, \quad \delta_{4n} =$$

$$= n(n+1) \operatorname{sh} \xi_0 c h_{\xi_0} Q_n + (n c h_{\xi_0}^2 + 2 \frac{m-1}{m}) Q_n^1.$$

$$h_0 c Z_{\xi}^{(2)} = - \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \gamma_{1n} + d_n \gamma_{2n}) P_n(\cos \eta), \quad (2.8)$$

$$h_0 c R_{\xi}^{(2)} = - \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \gamma_{3n} + d_n \gamma_{4n}) \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)},$$

$$\gamma_{in} = \gamma_{in}(\xi_0), \quad \gamma_{2n} = n c h_{\xi_0} [(n+1) \operatorname{sh} \xi_0 Q_n + c h_{\xi_0} Q_n^1],$$

$$\gamma_{1n} = Q_n^1, \quad \gamma_{3n} = n(n+1) Q_n - t h_{\xi_0} Q_n^1,$$

$$\gamma_{4n} = n(n+1)(n c h_{\xi_0}^2 + 1) Q_n + (n^2 \operatorname{sh} \xi_0 c h_{\xi_0} - 2 \frac{m-1}{m} t h_{\xi_0}) P_n^1.$$

Из условий (2.2), (2.3) следует, что проекции векторов усилий равны на всем промежутке ортогональности функций Лежандра, т.е.

$$R_{\xi}^{(1)} = -R_{\xi}^{(2)}, \quad Z_{\xi}^{(1)} = -Z_{\xi}^{(2)}, \quad (\xi = \xi_0, \quad 0 \leq \eta \leq \pi) \quad (2.9)$$

Удовлетворяя условиям (2.9), а затем используя свойство ортогональности функций Лежандра $P_n^{\alpha}(\cos \eta)$ на промежутке $[0, \pi]$, приходим к следующей системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} c_n \gamma_{1n} + d_n \gamma_{2n} &= a_n \beta_{1n} + b_n \beta_{2n} \\ c_n \gamma_{3n} + d_n \gamma_{4n} &= a_n \beta_{3n} + b_n \beta_{4n} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Разрешая эту систему, например, относительно c_n , d_n , получим

$$c_n = \frac{1}{\Delta} (a_n u_{11} + b_n u_{12}), \quad d_n = \frac{1}{\Delta} (a_n u_{21} + b_n u_{22}) \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= -n(n+1)ch\xi_0 [n(n+1)sh\xi_0(Q_n)^2 - sh\xi_0(Q_n^1)^2 - \\ &\quad - ch\xi_0 Q_n Q_n^1] - 2 \frac{m-1}{m} th\xi_0 (Q_n^1)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{11} &= n(n+1)ch\xi_0 [sh\xi_0 P_n^1 Q_n^1 + (n+1)ch\xi_0 P_n^1 Q_n - nch\xi_0 \times \\ &\quad \times P_n Q_n^1 - n(n+1)sh\xi_0 P_n Q_n] - 2 \frac{m-1}{m} th\xi_0 P_n^1 Q_n^1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$u_{12} = -ich\xi_0 n(n+1) [n(n+1) + 2 \frac{m-1}{m} th^2 \xi_0],$$

$$\begin{aligned} u_{22} &= n(n+1)ch\xi_0 [sh\xi_0 P_n^1 Q_n^1 + (n+1)ch\xi_0 P_n Q_n^1 - \\ &\quad - nch\xi_0 P_n^1 Q_n - n(n+1)sh\xi_0 P_n Q_n] - 2 \frac{m-1}{m} th\xi_0 \times \\ &\quad \times P_n^1 Q_n^1, \quad u_{21} = ich^{-1} \xi_0 n(n+1). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для c_n , d_n (2.11) в равенства (2.7), а затем удовлетворяя граничным условиям (2.3) и (2.1), приходим к следующей взаимосвязанной системе парных сумматорных уравнений относительно a_n , b_n

14

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \beta_{1n} + b_n \beta_{2n}) P_n(\cos \eta) &= h_0 c f_2(\eta) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \beta_{3n} + b_n \beta_{4n}) \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} &= h_0 c f_3(\eta) \end{aligned} \quad (0 \leq \eta \leq \eta_0) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{ch\xi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta} (a_n c_{11} + b_n c_{12}) P_n(\cos \eta) &= 0 \\ \frac{i}{ch\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta} (a_n c_{21} + b_n c_{22}) \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} &= 0 \end{aligned} \quad (0 \leq \eta \leq \pi)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= n(n+1)Q_n - th\xi_0 Q_n^1, \quad c_{12} = 2 \frac{m-1}{m} th\xi_0 Q_n^1 - \\ &\quad - (n+1)^2 sh\xi_0 ch\xi_0 Q_n^1 + n(n+1) [(n+1)ch^2 \xi_0 - 1] Q_n, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$c_{21} = -n(n+1)Q_n^1, \quad c_{22} = n(n+1)^2 [nsh\xi_0 ch\xi_0 Q_n - ch^2 \xi_0 Q_n^1]$$

а выражения β_{in} определяются равенствами (2.6).

§3. Решение взаимосвязанной системы парных уравнений.

Решение взаимосвязанной системы парных уравнений (2.13) будем строить, опираясь на приведенные ниже разрывные суммы и абелевы интегральные представления для полиномов [8] и присоединенных функций Лежандра [11], [12]

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \eta) \sin d_n t &= \frac{H(t-\eta)}{\sqrt{2 \cos \eta - 2 \cos t}}, \quad d_n = n + \frac{1}{2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} \cos d_n t &= -\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} + \\ &\quad + \frac{\sin \eta H(t-\eta)}{\sin \eta \sqrt{2 \cos \eta - 2 \cos t}}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

15

$$P_n(\cos \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha_n x dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}},$$

$$\frac{\alpha_n P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin \alpha_n x dx}{\sin \eta \sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}}$$

где $H(t, \eta)$ - функция Хевисайда [13].

Согласно методу работ [11], [12], [14], введем следующие интегральные операторы от двух вспомогательных функций

$$\begin{aligned} \frac{i}{\Delta \text{ch} \xi_0} (a_n c_{11} + b_n c_{12}) &= c \int_0^{\eta_0} \varphi(t) \sin \alpha_n t dt = I_n^{(1)}, \\ \frac{i}{\Delta \text{ch} \xi_0} (a_n c_{21} + b_n c_{22}) &= c \int_0^{\eta_0} \psi(t) \cos \alpha_n t dt = I_n^{(2)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - непрерывные функции на отрезке $0 \leq t \leq \eta_0$ и этому же условию удовлетворяют их производные. Легко увидеть, что если функцию $\psi(t)$ подчинить интегральному условию

$$\int_0^{\eta_0} \psi(t) \cos \frac{t}{2} dt = 0 \quad (3.3)$$

то на основании разрывных сумм (3.1) интегральные операторы $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$ тождественно удовлетворяют последним двум уравнениям системы (2.13).

Рассматривая (3.2) как алгебраическую систему относительно a_n , b_n , а затем решая ее, получим

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{i \text{ch} \xi_0}{n(n+1)} [c_{22} I_n^{(1)} + \alpha_n c_{12} I_n^{(2)}], \\ b_n &= \frac{i \text{ch} \xi_0}{n(n+1)} [-c_{21} I_n^{(1)} + \alpha_n c_{11} I_n^{(2)}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отметим интересный факт, что определитель системы (3.2) связан с Δ следующим соотношением

$$\Delta' = c_{11} c_{22} - c_{21} c_{12} = -n(n+1) \Delta$$

Если с самого начала пойти по пути исключения неизвестных a_n , b_n , то коэффициенты c_n , d_n представляются через

интегральные операторы $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$ точно такими же формулами, как (3.4), только в выражениях c_n необходимо сделать взаимную замену функций Лежандра первого и второго рода.

Функциональное уравнение для определения неизвестных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ получим, если вместо коэффициентов a_n , b_n в первые два уравнения системы (2.13) подставим их выражения из (3.4). После ряда преобразований, найдем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (m_{11} I_n^{(1)} + m_{12} I_n^{(2)}) P_n(\cos \eta) &= h_0 c f_2(\eta), \\ \sum_{n=1}^{\infty} (m_{21} I_n^{(1)} + m_{22} I_n^{(2)}) \frac{\alpha_n P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} &= h_0 c f_2(\eta) \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} m_{11} &= i \text{ch} \xi_0 [n(n+1) \text{th} \xi_0 \text{ch} \xi_0 (P_n^1 Q_n + Q_n^1 P_n) - \\ &\quad - \text{ch}^2 \xi_0 P_n^1 Q_n^1]; \quad m_{12} = i \text{ch} \xi_0 \alpha_n \left[\frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} \text{th} \xi_0 \cdot \right. \\ &\quad \times \text{ch} \xi_0 P_n^1 Q_n^1 - \text{th}^2 \xi_0 (P_n^1 Q_n + P_n Q_n^1) + n(n+1) \text{th} \xi_0 \cdot \\ &\quad \times \text{ch} \xi_0 P_n Q_n - 2 \frac{n-1}{n} \frac{\text{th} \xi_0}{n(n+1)} P_n^1 Q_n^1]; \quad m_{21} = (n+1) \cdot \\ &\quad \times n \alpha_n^2 m_{12}; \quad m_{22} = -i \text{ch} \xi_0 \left\{ 2 \frac{n-1}{n} \frac{\text{th} \xi_0}{n(n+1)} [P_n^1 Q_n + \right. \\ &\quad \left. + P_n Q_n^1] - \frac{2 \text{th} \xi_0}{n(n+1)} P_n^1 Q_n^1 \right\} + \frac{2 n^2 + 2 n + 1}{n(n+1)} \text{th}^2 \xi_0 \cdot \\ &\quad \times P_n^1 Q_n^1 + n(n+1) (\text{th}^2 \xi_0 - 1) P_n Q_n - [n(n+1) \cdot \\ &\quad \times \text{th} \xi_0 \text{ch} \xi_0 + \text{th} \xi_0 \text{th}^2 \xi_0] (P_n Q_n^1 + P_n^1 Q_n) \}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если в равенствах (3.5) вместо функций $P_n(\cos \eta)$ и $P_n^1(\cos \eta)$ подставить их интегральные представления (3.1), а символы $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$ заменить соответствующими интегралами (3.2) и затем поменять порядки суммирования и интегрирования, то придем к следующей системе интегральных уравнений Абеля

$$\int_0^{\eta} \frac{dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos \eta}} \left\{ \int_0^{\eta_0} [M_{11}(x,t)\varphi(t) + M_{12}(x,t)\psi(t)] dt \right\} =$$

$$\int_0^{\eta} \frac{\sin x dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos \eta}} \left\{ \int_0^{\eta_0} [M_{21}(x,t)\varphi(t) + M_{22}(x,t)\psi(t)] dt \right\} =$$

$$\eta_0 = h_0 f_2(\eta); \quad (3.7)$$

$$= -h_0 \sin \eta f_1(\eta).$$

где

$$M_{11}(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} m_{11} \cos \alpha_n x \sin \alpha_n t$$

$$M_{12}(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} m_{12} \cos \alpha_n x \cos \alpha_n t$$

$$M_{21}(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} m_{21} \sin \alpha_n x \sin \alpha_n t, \quad (3.8)$$

$$M_{22}(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} m_{22} \sin \alpha_n x \cos \alpha_n t$$

Суммирование последних двух рядов начинается с нуля, что оправдано интегральным условием (3.3), а также тем, что $m_{21}|_{n=0} = 0$. Для исследования сходимости рядов (3.8), а также для улучшения их сходимости по правилу Куммера [15] необходимо знать асимптотическое поведение выражений m_{ij} при достаточно больших n с точностью до $O(n^{-\gamma})$. Оказалось, что известных в литературе [8], [9] двучленных асимптотических формул для полиномов и функций Лежандра недостаточно для решения поставленной задачи. Поэтому остановимся кратко на выводе пятичленных асимптотических формул для функций Лежандра. Будем исходить из следующих представлений [9]

$$P_n^K(z) = \frac{\Gamma(n+K+1)(2\pi)^{-0.5}}{(z^2-1)^{0.25}\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left\{ (z+\sqrt{z^2-1})^{n+0.5} \right.$$

$$\left. F\left(\frac{1}{2}+K; \frac{1}{2}-K; n+\frac{3}{2}; \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2\sqrt{z^2-1}}\right) + i e^{-iK\pi} \right.$$

$$\left. (z-\sqrt{z^2-1})^{n+0.5} F\left(\frac{1}{2}+K; \frac{1}{2}-K; n+\frac{3}{2}; -\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2\sqrt{z^2-1}}\right) \right\};$$

$$Q_n^K(z) = e^{iK\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (z^2-1)^{-0.25} (z-\sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(n+K+1)}{\Gamma(n+1.5)} F\left(\frac{1}{2}+K; \frac{1}{2}-K; n+\frac{3}{2}; \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2\sqrt{z^2-1}}\right); (K=0,1) \quad (3.9)$$

где F - гипергеометрическая функция; $\Gamma(x)$ - гамма-функция. Основанием для использования этих представлений в качестве асимптотических рядов служит заключение, приведенное в [8]. Представляя гипергеометрические функции, а также гамма-функции в виде рядов по степеням n , и затем удерживая в (3.9) только главные члены при $n \gg 1$, после ряда преобразований получим

$$P_n(z) \approx \frac{i^{2n} e^{2n\pi} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} n \operatorname{ch} \eta} e^{-\frac{\pi i}{4}} \left[1 + \frac{t-2}{8n} + \frac{9t^2-12t+4}{128n^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{5(15t^3-18t^2-4t+8)}{8 \cdot 128n^3} + \dots \right]; \quad t = t h \eta,$$

$$P_n^1(z) \approx \frac{i^{2n} e^{2n\pi} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} n \operatorname{ch} \eta} e^{-\frac{\pi i}{4}} \left[1 + \frac{2-3t}{8n} - \frac{15t^2-12t-4}{128n^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{5(21t^3-18t^2-12t+8)}{8 \cdot 128n^3} + \dots \right]; \quad z = i \operatorname{sh} \eta, \quad (3.10)$$

$$Q_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n \operatorname{ch} \eta}} (-i)^{2n} e^{-(2n\pi + \frac{\pi i}{4})} \left[1 - \frac{2+t}{8n} + \right.$$

$$\left. + \frac{9t^2+12t+4}{128n^2} - \frac{5(15t^3+18t^2-4t-8)}{8 \cdot 128n^3} + \dots \right]$$

$$Q_n^1(z) \approx -\sqrt{\frac{n\pi}{2 \operatorname{ch} \eta}} (-i)^{2n} e^{-(2n\pi + \frac{\pi i}{4})} \left[1 + \frac{2+3t}{8n} - \right.$$

$$\left. - \frac{15t^2+12t-4}{128n^2} + \frac{5(21t^3+18t^2-12t-8)}{8 \cdot 128n^3} + \dots \right]$$

Асимптотические формулы для попарных произведений функций Лежандра первого и второго рода значительно упростятся, если представить приближенные равенства (3.10) не по степеням n , а по степеням $\alpha_n = n + 0.5$. После ряда упрощающих операций придем к следующим асимптотическим равенствам

$$P_n(z)Q_n(z) \approx \frac{i\alpha_n}{2ch_5} \left[1 + \frac{t^2-1}{8\alpha_n^2} + \frac{(t^2-1)(27t^2-11)}{128\alpha_n^4} + O(\alpha_n^{-6}) \right];$$

$$P_n^1(z)Q_n(z) \approx \frac{-i}{2ch_5} \left[1 - \frac{t}{2\alpha_n} - \frac{3t(t^2-1)}{16\alpha_n^3} - \frac{3t(t^2-1)(45t^2-29)}{256\alpha_n^5} + O(\alpha_n^{-7}) \right]; \quad z = ich_5, \quad t = th_5.$$

$$P_n^1(z)Q_n^1(z) \approx \frac{i\alpha_n}{2ch_5} \left[1 + \frac{1-3t^2}{8\alpha_n^2} - \frac{9(t^2-1)(5t^2-1)}{128\alpha_n^4} + O(\alpha_n^{-6}) \right] \quad (3.11)$$

$$P_n(z)Q_n^1(z) \approx \frac{i}{2ch_5} \left[1 + \frac{t}{2\alpha_n} + \frac{3t(t^2-1)}{16\alpha_n^3} + \frac{3t(t^2-1)(45t^2-29)}{256\alpha_n^5} + O(\alpha_n^{-7}) \right]; \quad n \gg 1$$

Заметим, что вывод равенств (3.11) базировался не на четырехчленных, а на шестичленных асимптотических формулах (3.10). Равенства (3.11) являются исключительно удобными и полезными для аналитического исследования рядов типа (3.8), а также могут быть использованы для приближенного вычисления значений произведений функций Лежандра при $n \gg 1$.

Если подставить в (3.6) вместо произведений функций Лежандра их приближенные равенства (3.11), то после преобразований получим следующие асимптотические формулы для выражений m_{ij} , имеющие место при $n \gg 1$

$$m_{11} \approx \frac{1}{2}\alpha_n + a_{11}\alpha_n^{-1} + a_{12}\alpha_n^{-3} = \bar{m}_{11}; \quad (3.12)$$

$$m_{12} \approx a + a_{13}\alpha_n^{-2} = \bar{m}_{12}; \quad m_{21} \approx a + a_{21}\alpha_n^{-2} = \bar{m}_{21};$$

$$m_{22} \approx \frac{1}{2}\alpha_n + a_{22}\alpha_n^{-1} + a_{23}\alpha_n^{-3} = \bar{m}_{22}; \quad n \gg 1$$

где

$$a_{11} = \frac{1+3t_0^2}{16}; \quad a_{12} = \frac{9}{256}(15t_0^4 - 6t_0^2 - 1); \quad (3.13)$$

$$a = \frac{m-4}{4m}; \quad a_{13} = \frac{3t_0}{32} \left(\frac{3m-4}{m} - \frac{9m-4}{m} t_0^2 \right); \quad t_0 = th_5;$$

$$a_{21} = \frac{t_0}{32} \left[\frac{7m-4}{m} - \frac{3(9m-4)}{m} t_0^2 \right]; \quad a_{23} = \frac{3}{256} \left[\frac{205m-96}{m t_0^4} - 6 \frac{23m-16}{m} t_0 + 5 \right]; \quad a_{22} = \frac{3m+16}{16m} t_0^2 - \frac{3}{16}.$$

Из анализа рядов (3.8) следует, что они расходятся в классе обычных функций [16] и сходятся в классе обобщенных функций [13]. Приведем значения некоторых вспомогательных сумм, необходимых для дальнейшего исследования

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \alpha_n t \sin \alpha_n x = \frac{\pi}{2} \delta(t-x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin \alpha_n t \cos \alpha_n x = -\frac{\pi}{2} \delta'_t(t-x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{-1} \sin \alpha_n t \cos \alpha_n x = \frac{\pi}{2} H(t-x) \quad (3.14)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{-2} \cos \alpha_n t \cos \alpha_n x = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{matrix} t & t > x \\ x & t < x \end{matrix} \right.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{-3} \sin \alpha_n t \cos \alpha_n x = \frac{\pi^2}{2} t - \frac{\pi}{4} \left\{ \begin{matrix} t^2+x^2 & t > x \\ 2tx & t < x \end{matrix} \right.$$

$$(0 < t, x < \pi)$$

где $\delta(t-x)$ - дельта-функция Дирака [12].

Соотношения (3.14) получены на основании равенств такого типа [13], [17]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx = \frac{1}{2} + \pi \delta(x); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2};$$

$$(0 \leq x \leq \pi)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \pi)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{8} (\pi - 2|x|)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} = \frac{\pi}{8} (\pi - |x|) \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

Если теперь воспользоваться суммами (3.14) и для улучшения сходимости рядов (3.8) применить к ним преобразование Куммера [16], то после ряда упрощений, получим

$$\begin{aligned} M_{11}(x, t) &= -\frac{1}{2} \delta'_t(t-x) + R_{11}(x, t); \\ M_{12}(x, t) &= a \delta(t-x) + R_{12}(x, t); \\ M_{21}(x, t) &= a \delta(t-x) - R_{21}(x, t); \\ M_{22}(x, t) &= \frac{1}{2} \delta'_t(t-x) - R_{22}(x, t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} R_{11}(x, t) &= a_{11} H(t-x) + \pi a_{12} t - \frac{a_{12}}{2} \left\{ \frac{x^2 + t^2}{2xt} \right\}_{t < x}^{t > x} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (m_{11} - \bar{m}_{11}) \cos d_n x \sin d_n t; \\ R_{12}(x, t) &= \pi a_{13} - a_{13} \left\{ \frac{t}{x} \right\}_{t < x}^{t > x} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (m_{12} - \bar{m}_{12}) \times \\ &\times \cos d_n x \cos d_n t; \\ R_{21}(x, t) &= -a_{21} \left\{ \frac{x}{t} \right\}_{t < x}^{t > x} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (m_{21} - \bar{m}_{21}) \sin d_n t \sin d_n x; \\ R_{22}(x, t) &= -a_{22} H(x-t) - \pi a_{23} x + \frac{1}{2} a_{23} \left\{ \frac{x^2 + t^2}{2xt} \right\}_{x > t}^{x < t} - \\ &- \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (m_{22} - \bar{m}_{22}) \cos d_n t \sin d_n x; \end{aligned} \quad (3.16)$$

Заметим, что коэффициенты в суммах (3.16) убывают с ростом n , как $O(d_n^{-4})$ или $O(d_n^{-5})$. Если (3.15) подставить в (3.7) и учесть интегралы от обобщенных функций [13]

$$\int_a^b f(t) \delta(t-x) dt = f(x); \quad \int_a^b f(t) \delta'_t(t-x) dt = -f'(x) \quad (a < x < b) \quad (3.17)$$

то получим

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}} \left\{ \frac{1}{2} \psi'(x) + a \psi(x) + \int_0^x [R_{11}(x, t) \psi(t) + \right. \\ \left. + R_{12}(x, t) \psi(t)] dt \right\} = h_0 f_2(\eta); \\ \int_0^x \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}} \left\{ \frac{1}{2} \psi'(x) - a \psi(x) + \int_0^x [R_{21}(x, t) \psi(t) + \right. \\ \left. + R_{22}(x, t) \psi(t)] dt \right\} = h_0 \sin \eta f_1(\eta). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Рассматривая последние уравнения как уравнения Абеля и решая их согласно формул [14]

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{g(x) dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}} = f(\eta); \quad g(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\sin \eta f(\eta) d\eta}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}} \\ \text{приведем к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма} \\ \frac{1}{2} \psi'(x) + a \psi(x) + \int_0^x [R_{11}(x, t) \psi(t) + R_{12}(x, t) \psi(t)] dt = F_2(x) \\ \frac{1}{2} \psi'(x) - a \psi(x) + \int_0^x [R_{21}(x, t) \psi(t) + R_{22}(x, t) \psi(t)] dt = F_1(x) \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{h_0 f_2(\eta) \sin \eta d\eta}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}}; \\ F_1(x) &= \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{h_0 f_1(\eta) \sin^2 \eta d\eta}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Замыкают систему интегро-дифференциальных уравнений (3.20) условия

$$\int_0^{\eta_0} \psi(t) \cos \frac{t}{2} dt = 0; \quad \psi(0) = 0. \quad (3.22)$$

Второе условие вытекает из тех же требований, которые были обоснованы в работе [11]. Из взаимосвязанной системы интегро-дифференциальных уравнений (3.20) численными методами [18], [19] находятся значения функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в n точках интервала $0 \leq x \leq \eta_0$. После этого методами численного интегрирования вычисляются интегралы $I_n^{(1)}, I_n^{(2)}$ (3.2), а затем по формулам (3.4) — коэффициенты a_n, b_n . По известным коэффициентам a_n, b_n определяется напряженно-деформированное состояние в произвольной точке внутренней области согласно формул (1.21), (1.27). Ясно, что получение окончательного численного результата с необходимой точностью является не простой задачей. Однако, оценку прочности дефектного материала с позиций линейной механики разрушения [20–24] можно провести на основе анализа коэффициентов интенсивности напряжений и полей напряжений или перемещений вблизи разреза. Этому вопросу и посвящен следующий параграф.

§4. Локальный анализ полей перемещений и напряжений вблизи граничной окрестности эллипсоидального разреза.

Остановимся на выводе формул для определения напряжений на поверхности эллипсоида вне разреза ($\xi = \xi_0, \eta_0 < \zeta \leq \mathcal{T}$). Если в формулы (3.5) вместо функций Лежандра подставить их интегральные представления (3.1), а затем поменять порядок суммирования и интегрирования, то получим

$$\begin{aligned} h_0 c Z_{\xi} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (m_{11} I_n^{(1)} + m_{12} I_n^{(2)}) \cos \lambda_n x \right] \\ h_0 c R_{\xi} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{\sin^{-1} \eta \sin x dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (m_{21} I_n^{(1)} + m_{22} I_n^{(2)}) \sin \lambda_n x \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

24 ($\eta > \eta_0$)

Особенность вычисления интегралов (4.1) состоит в том, что подинтегральные суммы в точках $x = \eta_0$ обращаются в бесконечность. Поэтому, внешний интеграл разобьем на сумму следующих интегралов

$$\int_0^{\eta_0} = \int_0^{\eta_0 - \varepsilon} + \int_{\eta_0 - \varepsilon}^{\eta_0 + \varepsilon} + \int_{\eta_0 + \varepsilon}^{\eta_0} \quad (4.2)$$

и преобразуем каждый из интегралов, а затем в окончательном результате устремим ε к нулю. При вычислении интеграла от 0 до $\eta_0 - \varepsilon$ будем использовать равенства (3.18), а при вычислении последнего учитываем, что $x > t$. Это значит, что в (3.15) первые слагаемые, представляющиеся через обобщенные функции, тождественно равны нулю, а $R_{ij}(x, t)$ вычисляются при условии $x > t$. Вычисление среднего интеграла проведем более детально. Средний интеграл от регулярных слагаемых равен нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ и только следующие интегралы будут отличны от нуля

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta_0 + \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n^{(1)} \lambda_n \cos \lambda_n x \right) &= \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_{\eta_0 - \varepsilon}^{\eta_0 + \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}} \left\{ -\psi(\eta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \lambda_n \eta_0 \cos \lambda_n x + \right. \\ \left. + \int_0^{\eta_0} \psi'(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \cos \lambda_n x \cos \lambda_n t \right) dt \right\} &= \frac{-\psi(\eta_0)}{\sqrt{2 \cos \eta_0 - 2 \cos \eta}}; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_{\eta_0 - \varepsilon}^{\eta_0 + \varepsilon} \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n^{(2)} \lambda_n \sin \lambda_n x \right) &= \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_{\eta_0 - \varepsilon}^{\eta_0 + \varepsilon} \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 \cos x - 2 \cos \eta}} \left\{ \psi(\eta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_n \eta_0 \sin \lambda_n x - \right. \\ \left. - \int_0^{\eta_0} \psi'(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_n t \sin \lambda_n x \right) dt \right\} &= \frac{\sin \eta_0 \psi(\eta_0)}{\sqrt{2 \cos \eta_0 - 2 \cos \eta}}; \end{aligned} \quad (4.3)$$

25

После выполнения всех указанных выше операций, получим следующие выражения для проекций вектора усилий на поверхности эллипсоида вне разреза ($\eta > \eta_0$)

$$\begin{aligned} h_0 Z_{\xi} &= -\frac{1}{2} \frac{\varphi(\eta_0)}{\sqrt{2\cos\eta_0 - 2\cos\eta}} + \int_0^{\eta_0} \frac{F_2(x) dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos\eta}} + \\ &+ \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos\eta}} \int_0^x [R_{11}(x,t)\varphi(t) + R_{12}(x,t)\psi(t)] dt; \\ h_0 R_{\xi} &= \frac{-\sin\eta_0 \varphi(\eta_0)}{2\sin\eta \sqrt{2\cos\eta_0 - 2\cos\eta}} + \int_0^{\eta_0} \frac{F_2(x) \sin x dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos\eta} \sin\eta} + \\ &+ \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\sin x dx}{\sin\eta \sqrt{2\cos x - 2\cos\eta}} \int_0^x [R_{23}(x,t)\varphi(t) + R_{22}(x,t)\psi(t)] dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

Компоненты тензора напряжений на поверхности эллипсоида вне разреза запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= \frac{Z_{\xi} \operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta + R_{\xi} \operatorname{sh}\xi_0 \sin\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta}}; \\ \sigma_{\xi\eta} &= \frac{-Z_{\xi} \operatorname{sh}\xi_0 \sin\eta + R_{\xi} \operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений найдем из предельных равенств [19-22]

$$K_1 = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \sigma_{\xi\xi}(\xi_0, \eta) \sqrt{2\rho_0}; \quad K_2 = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \sigma_{\xi\eta}(\xi_0, \eta) \sqrt{2\rho_0}. \quad (4.6)$$

где ρ_0 - кратчайшее расстояние от точки на поверхности эллипсоида вне разреза до граничной окружности разреза. Кратчайшее расстояние ρ_0 можно определить через дифференциал координатной линии $ds = h_1 d\eta$ [7] и в первом приближении

$$\rho_0 \approx c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta} (\eta - \eta_0) \quad (4.7)$$

Из равенств (4.5-4.7) предельным переходом получим

26

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{\sqrt{c}}{2} \frac{\varphi(\eta_0) \operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta_0 + \psi(\eta_0) \operatorname{sh}\xi_0 \sin\eta_0}{\sqrt{\sin\eta_0} (\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta_0)^{3/4}}; \\ K_2 &= \frac{\sqrt{c}}{2} \frac{\varphi(\eta_0) \operatorname{sh}\xi_0 \sin\eta_0 - \psi(\eta_0) \operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta_0}{\sqrt{\sin\eta_0} (\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta_0)^{3/4}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Как видно, коэффициенты интенсивности напряжений находятся через значения функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в точке $t = \eta_0$.

Перейдем к самому трудному разделу в этой задаче, к локальному анализу полей перемещений и напряжений вблизи граничной окружности эллипсоидального разреза. Такой анализ необходим, так как все критерии линейной механики разрушения материалов [20-24], в принципе, базируются на исследовании напряженно-деформированного состояния вблизи дефектов.

В плоскости меридионального сечения, так, как показано на рис. 2, введем локальную полярную систему координат ρ, γ с началом в точке O_1 . Считая ρ достаточно малым, связь между эллипсоидальными и полярными координатами в области V_2 представляется в виде

$$\begin{aligned} c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \sin^2 \eta_0} (\xi - \xi_0) &\approx \rho \sin\gamma; \\ c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta} (\eta - \eta_0) &\approx \rho \cos\gamma. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Запишем еще ряд приближенных соотношений

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \xi - \operatorname{sh}^2 \xi_0 &\approx s \operatorname{sh} 2\xi_0 \sin\gamma; \quad s = \frac{\rho}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \sin^2 \eta}}; \\ \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi - \operatorname{sh} \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 &\approx s \operatorname{ch} 2\xi_0 \sin\gamma. \end{aligned} \quad (4.10)$$

На основании равенств (1.21) и (3.4), только записанных для области V_2 , перемещения во внешней области представляются через интегральные операторы $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$ в виде

$$2G U_z^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (b_{11} I_n^{(1)} + b_{12} I_n^{(2)}) P_n(\cos\eta) + \frac{\operatorname{sh}^2 \xi - \operatorname{sh}^2 \xi_0}{\operatorname{ch}^2 \xi - \sin^2 \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{n(2n+3)},$$

27

$$+ [P_{2,1} I_n^{(4)} + P_{1,1} I_n^{(2)}] [Q_{n+2} P_n(\cos \eta) - Q_n P_{n+2}(\cos \eta)]; \quad (4.11)$$

$$2G U_z^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{2,1} I_n^{(4)} + b_{2,2} I_n^{(2)}) \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} + \frac{\sin^2 \xi - \sin^2 \xi_0}{\cos^2 \xi - \sin^2 \eta}.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[P_{2,1} I_n^{(4)} + P_{1,1} I_n^{(2)}]}{n(n+1)(2n+3)} [Q_{n+2} P_n^1(\cos \eta) - Q_n^1 P_{n+2}^1(\cos \eta)];$$

где

$$b_{1,1} = i \operatorname{ch} \xi_0 [(n+1)(\operatorname{ch}^2 \xi - \operatorname{ch}^2 \xi_0) P_n^1 Q_n - 2 \frac{m-1}{m} P_n^1 Q_n +$$

$$+ [\sin \xi \operatorname{ch} \xi P_n^1 Q_n^1 + n(n+1) \sin \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 P_n Q_n];$$

$$b_{1,2} = i \operatorname{ch} \xi_0 [-\frac{m-2}{m} P_n Q_n + \sin \xi \operatorname{ch} \xi P_n Q_n^1 + \sin \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 \cdot$$

$$+ P_n^1 Q_n + (\operatorname{ch}^2 \xi - \operatorname{ch}^2 \xi_0)(n+1) P_n Q_n - \frac{\sin \xi \operatorname{ch} \xi \sin \xi_0}{n(n+1)} P_n^1 Q_n^1 +$$

$$+ \frac{\sin \xi_0}{n} (\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \operatorname{ch}^2 \xi) P_n^1 Q_n]; \quad (4.12)$$

$$b_{2,1} = i \operatorname{ch} \xi_0 [n(n+1) (\sin \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 P_n Q_n^1 + \sin \xi \operatorname{ch} \xi P_n^1 Q_n) +$$

$$+ n(\operatorname{ch}^2 \xi - \operatorname{ch}^2 \xi_0) P_n^1 Q_n^1 + (2 \frac{m-1}{m} - \operatorname{ch}^2 \xi_0) P_n^1 Q_n^1];$$

$$b_{2,2} = i \operatorname{ch} \xi_0 \{ -4 \frac{m-1}{m} \frac{\sin \xi_0}{n(n+1)} + \frac{\sin \xi_0}{n(n+1)} (\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \operatorname{ch}^2 \xi) +$$

$$+ \frac{\sin \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0}{n(n+1)} \} P_n^1 Q_n^1 + [2 \frac{m-1}{m} + n(\operatorname{ch}^2 \xi - \operatorname{ch}^2 \xi_0)] P_n Q_n^1 -$$

$$- \sin \xi_0 (\sin \xi \operatorname{ch} \xi P_n^1 Q_n + \sin \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 P_n Q_n^1) +$$

$$+ [\sin \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 P_n^1 Q_n^1 + n(n+1) \sin \xi \operatorname{ch} \xi P_n Q_n];$$

$$P_{2,1} = i \operatorname{ch} \xi_0 n(n+1) P_n^1; \quad P_{1,1} = i \operatorname{ch} \xi_0 \alpha_n [n(n+1) \cdot$$

$$+ P_n - \sin \xi P_n^1]; \quad P_n^1 = P_n^1(i \sin \xi_0); \quad Q_n^1 = Q_n^1(i \sin \xi).$$

Заметим, что в равенствах (4.12) функции Лежандра первого рода являются функциями аргумента $i \sin \xi_0$, а функции второго рода — аргумента $i \sin \xi$.

Получим ряд вспомогательных приближенных формул, необходимых для дальнейшего исследования рядов (4.11). Будем исходить из следующих сумм для полиномов Лежандра [9]

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^{2n} P_n(\cos \eta) \cos \alpha_n t = \frac{1}{2} h^{\frac{1}{2}} (\bar{q}^{-\frac{1}{2}} + \bar{q}^{-\frac{1}{2}});$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^{2n} P_n(\cos \eta) \sin \alpha_n t = \frac{1}{2i} h^{\frac{1}{2}} (\bar{q}^{-\frac{1}{2}} - \bar{q}^{-\frac{1}{2}}) \quad (4.13)$$

где $q = e^{-it} - 2h \cos \eta + h^2 e^{it}$, а $\bar{q}$ — комплексно сопряженная функция функции q .

Рассмотрим поведение правых частей (4.13) при $h = e^{-\xi + \xi_0}$, $\xi > \xi_0$, $t = \eta_0$, считая, что точка $M(\xi, \eta)$ лежит в E — окрестности точки $O_1(\xi_0, \eta_0)$. На основании соотношений (4.9), (4.10) получим

$$e^{-i\eta_0} - 2e^{-\xi + \xi_0} \cos \eta + e^{-2(\xi - \xi_0) + i\eta_0} \approx \frac{e^{\frac{i\eta_0}{2}}}{\sqrt{2S \sin \eta_0}} \quad (4.14)$$

После учета последнего соотношения в тождествах (4.13) и соответствующих упрощений, приходим к следующему приближенному равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n(\xi - \xi_0) + i\alpha_n \eta_0} P_n(\cos \eta) \approx \frac{e^{\frac{i\eta_0}{2}}}{\sqrt{2S \sin \eta_0}} \quad (4.15)$$

Аналогично, на основании полученных сумм для присоединенных функций Лежандра

$$\sum_{n=1}^{\infty} h^{2n} \frac{dP_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} \sin \alpha_n t = \frac{\sin \frac{t}{2}}{2h^{1/2} \sin \eta} (1 - h \cos \eta) +$$

$$+ \frac{q_+^1 \bar{q}_+^{-1/2} + \bar{q}_+^1 q_+^{-1/2}}{4h^{1/2} \sin \eta}; \quad (4.16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h^{2n} \frac{dP_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} \cos \alpha_n t = \frac{-\cos \frac{t}{2}}{2h^{1/2} \sin \eta} (1 + h \cos \eta) +$$

$$+ \frac{\bar{q}'_t \bar{q}^{-1/2} - q'_t q^{-1/2}}{4 i h^{1/2} \sin \eta}; \quad h < 1.$$

выводится следующая асимптотическая формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(\xi-\xi_0) + i \lambda_n \eta_0} \frac{\lambda_n P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} \approx \frac{-i e^{\frac{i \eta}{2}}}{\sqrt{2} \sin \eta_0} \quad (4.17)$$

Интегрируя, например, второе равенство (4.16) по переменной получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} h \frac{\lambda_n P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} \sin \lambda_n t = \frac{1+h \cos \eta}{h^{1/2} \sin \eta} \sin \frac{t}{2} + \frac{i(q^{1/2} - \bar{q}^{1/2})}{2 h^{1/2} \sin \eta} \quad (4.18)$$

Осуществляя асимптотический переход в равенствах такого типа, приходим к следующим асимптотическим формулам

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n(\xi-\xi_0) + i \lambda_n \eta_0} \frac{\lambda_n P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} \approx \frac{-2\sqrt{S} i e^{-\frac{i \eta}{2}}}{\sqrt{2} \sin \eta_0} + C_1; \quad (4.19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(i \eta_0 - \xi + \xi_0)} \frac{P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} \approx \frac{2\sqrt{S} e^{-\frac{i \eta}{2}}}{\sqrt{2} \sin \eta_0} + C_2$$

где C_1, C_2 — комплексные постоянные, значение которых, ввиду их громоздкости, здесь не приводятся.

Приведем еще ряд приближенных равенств, полученных из соотношений (3.10)

$$P_n(z_0) Q_n(z) \approx \frac{-i e^{-\lambda_n(\xi-\xi_0)}}{2 n \sqrt{\chi \xi \chi \xi_0}} \left(1 + \frac{t_0 - t - 4}{8 n} + o(n^{-2}) \right);$$

$$P_n(z_0) Q_n^1(z) \approx \frac{i e^{-\lambda_n(\xi-\xi_0)}}{2 \sqrt{\chi \xi \chi \xi_0}} \left(1 + \frac{3t + t_0}{8 n} + o(n^{-2}) \right);$$

$$P_n^1(z_0) Q_n(z) \approx \frac{-i e^{-\lambda_n(\xi-\xi_0)}}{2 \sqrt{\chi \xi \chi \xi_0}} \left(1 - \frac{3t_0 + t}{8 n} + o(n^{-2}) \right);$$

$$P_n^1(z_0) Q_n^1(z) \approx \frac{i n e^{-\lambda_n(\xi-\xi_0)}}{2 \sqrt{\chi \xi \chi \xi_0}} \left[1 + \frac{4-3t_0-3t}{8 n} + o(n^{-2}) \right];$$

$$P_n^1(z_0) Q_{n+2}(z) \approx \frac{i(\chi 2\xi - 3h 2\xi)}{2 \sqrt{\chi \xi \chi \xi_0}} e^{-\lambda_n(\xi-\xi_0)}; \quad (4.20)$$

$$P_n(z_0) Q_{n+2}(z) \approx \frac{i(\chi 2\xi - 3h 2\xi)}{2 \lambda_n \sqrt{\chi \xi \chi \xi_0}} e^{-\lambda_n(\xi-\xi_0)};$$

$$P_n^1(z_0) Q_{n+2}^1(z) \approx \frac{-i(\chi 2\xi - 3h 2\xi) \lambda_n}{2 \sqrt{\chi \xi \chi \xi_0}} e^{-\lambda_n(\xi-\xi_0)};$$

$$z_0 = i \sinh \xi_0; \quad z = i \sinh \xi; \quad t = t \xi; \quad t_0 = t \xi_0, \quad n \gg 1.$$

Заметим, что в области $V_2(\xi > \xi_0)$ выражение $e^{-(\xi-\xi_0)} < 1$. Интегральные операторы $I_n^{(1)}, I_n^{(2)}$ представим в виде

$$I_n^{(1)} = I_n^{(1)'} + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\eta_0} \psi'(t) \cos \lambda_n t dt$$

$$I_n^{(2)} = I_n^{(2)'} - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\eta_0} \psi'(t) \sin \lambda_n t dt \quad (4.21)$$

где

$$I_n^{(1)'} = -\frac{1}{\lambda_n} \psi(\eta_0) \cos \lambda_n \eta_0; \quad I_n^{(2)'} = \frac{1}{\lambda_n} \psi(\eta_0) \sin \lambda_n \eta_0 \quad (4.22)$$

Так как функции $\psi(t)$ и $\psi(t)$ являются непрерывными и ограниченными на отрезке $0 \leq t \leq \eta_0$, то вторые слагаемые в правых частях равенств (4.21) имеют порядок на единицу меньший по сравнению с первыми слагаемыми при $n \gg 1$.

Асимптотическое суммирование точных выражений проекций вектора перемещений (4.11) вблизи граничной окружности эллипсоидального разреза осуществим следующим образом. При этом

сумм в (4.11) к произведениям функций Лежандра первого и второго рода добавляем и вычитаем их асимптотические выражения (4.20), а вместо интегральных операторов $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$ подставляем первые слагаемые из равенств (4.21). Затем следим только за теми слагаемыми суммы, от которых в окрестности точки $Q_1(\xi_0, \eta_0)$ имеют порядок $S^{-1/2}$ или $S^{1/2}$. Приведем последовательно асимптотическое суммирование одной из сумм, например, такого вида

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} i \operatorname{ch} \xi_0 [\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi P_n(i \operatorname{sh} \xi_0) Q_n^{(1)}(i \operatorname{sh} \xi) + \operatorname{sh} \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 P_n^{(1)}(i \operatorname{sh} \xi_0) Q_n(i \operatorname{sh} \xi)] L_n I_n^{(2)} P_n(\cos \gamma) \quad (4.23)$$

Под знаком этой суммы к произведениям функций Лежандра добавим и вычтем их асимптотические представления (4.20), а вместо $I_n^{(2)}$ подставим $I_n^{(2)'} (4.22)$. Ясно, что приведенные ниже выражения

$$P_n(i \operatorname{sh} \xi_0) Q_n^{(1)}(i \operatorname{sh} \xi) - \frac{i e^{-\Delta_n(\xi - \xi_0)}}{2 \sqrt{\operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \xi_0}} \left(1 + \frac{3t + t_0}{8n}\right) \quad (4.24)$$

$$P_n^{(1)}(i \operatorname{sh} \xi_0) Q_n(i \operatorname{sh} \xi) + \frac{i e^{-\Delta_n(\xi - \xi_0)}}{2 \sqrt{\operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \xi_0}} \left(1 - \frac{3t_0 + t}{8n}\right)$$

имеют порядок $e^{-\Delta_n(\xi - \xi_0)} O(n^{-2})$ при $n \gg 1$, а суммы от них в (4.23) имеют порядок $S^{3/2}$. Поэтому в (4.23) будем рассматривать суммы только от тех слагаемых, где вместо произведений функций Лежандра будут стоять их асимптотические значения (4.20). Имеем

$$A \approx - \frac{i c \operatorname{ch} \xi_0 \psi(\eta_0)}{2 \sqrt{\operatorname{ch} \xi \operatorname{ch} \xi_0}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Delta_n(\xi - \xi_0)} \left\{ \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi \left(1 + \frac{3t + t_0}{8n}\right) - \operatorname{sh} \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 \left(1 - \frac{3t_0 + t}{8n}\right) \right\} \approx - \frac{c}{2} \psi(\eta_0) (\operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi - \operatorname{sh} \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0) \times$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Delta_n(\xi - \xi_0)} \operatorname{sh} \Delta_n \eta_0 P_n(\cos \gamma) - \frac{c}{2} \psi(\eta_0) \operatorname{sh}^2 \xi_0 \times$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Delta_n(\xi - \xi_0)} \frac{\operatorname{sh} \Delta_n \eta_0 P_n(\cos \gamma)}{\Delta_n} \approx - \frac{c}{2} \psi(\eta_0) \operatorname{ch} 2\xi_0 S \times$$

$$\times \operatorname{sh} \gamma \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{2S \operatorname{sh} \eta_0}} + \frac{c}{2} \psi(\eta_0) \operatorname{sh}^2 \xi_0 \frac{2\sqrt{S} \cos \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{2S \operatorname{sh} \eta_0}} =$$

$$= - \frac{c \psi(\eta_0) \sqrt{S}}{2 \sqrt{2S \operatorname{sh} \eta_0}} (\operatorname{ch} 2\xi_0 \operatorname{sh} \gamma \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2} - 2 \operatorname{sh}^2 \xi_0 \cos \frac{\gamma}{2}) \quad (4.25)$$

Установимся еще на асимптотическом суммировании рядов, которые содержат функции $P_{n+2}(\cos \gamma)$ или $P_{n+2}^{(1)}(\cos \gamma)$. Возьмем, например, такой ряд

$$i \operatorname{ch} \xi_0 (\operatorname{sh}^2 \xi_0 - \operatorname{sh}^2 \xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} P_n^{(1)}(i \operatorname{sh} \xi) Q_n(i \operatorname{sh} \xi),$$

$$\times I_n^{(1)} P_{n+2}(\cos \gamma) \approx \frac{c}{4} S \operatorname{sh} 2\xi_0 \operatorname{sh} \gamma \psi(\eta_0) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\Delta_n(\xi - \xi_0)} \frac{\cos \Delta_n \eta_0}{\Delta_n},$$

$$\times P_{n+2}(\cos \gamma) = \frac{c}{4} \psi(\eta_0) S \operatorname{sh} 2\xi_0 \operatorname{sh} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\Delta_n + 2)(\xi - \xi_0)} \quad (4.26)$$

$$\times e^{2(\xi - \xi_0)} [\cos(\Delta_n + 2)\eta_0 \cos 2\eta_0 + \operatorname{sh}(\Delta_n + 2)\eta_0 \operatorname{sh} 2\eta_0],$$

$$\times P_{n+2}(\cos \gamma) \approx \frac{c}{4} \psi(\eta_0) S \operatorname{sh} 2\xi_0 \operatorname{sh} \gamma \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k + \frac{1}{2})(\xi - \xi_0)}$$

$$\times [\cos 2\eta_0 \cos(k + \frac{1}{2})\eta_0 + \operatorname{sh} 2\eta_0 \operatorname{sh}(k + \frac{1}{2})\eta_0] P_k(\cos \gamma) \approx$$

$$\approx \frac{c}{4} \frac{\psi(\eta_0) \operatorname{sh} 2\xi_0}{\sqrt{2S \operatorname{sh} \eta_0}} \operatorname{sh} \gamma \sqrt{S} (\cos 2\eta_0 \cos \frac{\gamma}{2} + \operatorname{sh} 2\eta_0 \operatorname{sh} \frac{\gamma}{2}).$$

После асимптотического суммирования точных выражений проекций вектора перемещений (4.11) вблизи граничной окружности эллипсоидального разреза получим

$$\begin{aligned}
2G U_z^{(2)} &\approx \frac{-c\sqrt{s}}{\sqrt{2\sin\eta_0}} \left\{ \psi(\eta_0) \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\xi_0 \sin\gamma \cos \frac{\gamma}{2} + 2 \frac{m-1}{m} \right. \right. \\
&\quad \times \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2\xi_0 \sin\gamma \cos \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2\xi_0 \frac{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \operatorname{sh} 2\xi_0}{\sin^2 \eta_0 - \operatorname{ch}^2 \xi_0} \times \\
&\quad \times \sin\gamma \cos \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh} 2\xi_0 \sin\gamma}{\sin^2 \eta_0 - \operatorname{ch}^2 \xi_0} (\cos 2\eta_0 \cos \frac{\gamma}{2} + \sin 2\eta_0 \sin \frac{\gamma}{2}) \Big] + \\
&\quad + \psi(\eta_0) \left[\frac{1}{2} \operatorname{ch} 2\xi_0 \sin\gamma \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{m-2}{m} \cos \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\xi_0 \sin\gamma \times \right. \\
&\quad \times \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2\xi_0 \frac{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \operatorname{sh} 2\xi_0}{\sin^2 \eta_0 - \operatorname{ch}^2 \xi_0} \sin\gamma \sin \frac{\gamma}{2} - \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh} 2\xi_0 \sin\gamma}{\sin^2 \eta_0 - \operatorname{ch}^2 \xi_0} (\cos 2\eta_0 \sin \frac{\gamma}{2} - \sin 2\eta_0 \cos \frac{\gamma}{2}) \right] \Big\} + c'_1. \\
2G U_z^{(3)} &\approx \frac{-c\sqrt{s}}{\sqrt{2\sin\eta_0}} \left\{ \psi(\eta_0) \left[\frac{m-2}{m} \cos \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\xi_0 - \operatorname{sh} 2\xi_0) \times \right. \right. \\
&\quad \times \sin\gamma \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \operatorname{sh} 2\xi_0}{\sin^2 \eta_0 - \operatorname{ch}^2 \xi_0} \operatorname{sh} 2\xi_0 \sin\gamma \sin \frac{\gamma}{2} - \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh} 2\xi_0 \sin\gamma}{\sin^2 \eta_0 - \operatorname{ch}^2 \xi_0} (\cos 2\eta_0 \sin \frac{\gamma}{2} - \sin 2\eta_0 \cos \frac{\gamma}{2}) \right] + \psi(\eta_0) \times \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2\xi_0 - \operatorname{sh} 2\xi_0) \sin\gamma \cos \frac{\gamma}{2} + 2 \frac{m-1}{m} \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{ch} 2\xi_0 - \operatorname{sh} 2\xi_0}{\sin^2 \eta_0 - \operatorname{ch}^2 \xi_0} \times \right. \\
&\quad \times \operatorname{sh} 2\xi_0 \sin\gamma \cos \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sh} 2\xi_0 \sin\gamma}{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta_0} (\cos 2\eta_0 \cos \frac{\gamma}{2} + \\
&\quad \left. + \sin 2\eta_0 \sin \frac{\gamma}{2}) \right] \Big\} + c'_2.
\end{aligned}$$

где c'_1, c'_2 — постоянные числа.

Полученные формулы неудобны для аналитического анализа, так как левые и правые части представлены в различных системах координат. Поэтому осуществим переход к полярным проекциям вектора перемещений по формулам

$$\begin{aligned}
U_\gamma &= U_z \cos \beta + U_z \sin \beta \\
U_\rho &= U_z \cos \beta - U_z \sin \beta
\end{aligned} \quad (4.28)$$

где

$$\cos \beta = \frac{\operatorname{ch} \xi_0 \cos \eta_0 \cos \gamma}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta_0}}; \quad \sin \beta = \frac{\operatorname{sh} \xi_0 \sin \eta_0 \sin \gamma}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta_0}} \quad (4.29)$$

После подстановки (4.27) в (4.28) и ряда элементарных, но довольно-таки громоздких алгебраических преобразований, получим следующие выражения для перемещений вблизи граничной окружности эллипсоидального разреза

$$\begin{aligned}
2G U_\gamma^{(2)} &\approx \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{2}} \left\{ R_1 \left[\sin \frac{3\gamma}{2} - (2\kappa+1) \sin \frac{\gamma}{2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + R_2 \left[3 \cos \frac{3\gamma}{2} - (2\kappa+1) \cos \frac{\gamma}{2} \right] \right\} + \dots \\
2G U_\rho^{(2)} &\approx \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{2}} \left\{ R_1 \left[(2\kappa-1) \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{3\gamma}{2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + R_2 \left[3 \sin \frac{3\gamma}{2} - (2\kappa-1) \sin \frac{\gamma}{2} \right] \right\} + \dots
\end{aligned} \quad (4.30)$$

где $\kappa = \frac{3m-4}{m}$, а R_1, R_2 — определяются формулами (4.8). Анализ (4.30) показывает, что в окрестности эллипсоидального разреза наблюдается состояние плоской деформации.

Поле перемещений во внутренней области V_1 ($\xi < \xi_0$) находится аналогичным образом и в локальной полярной системе координат ρ, γ асимптотические формулы для компонент вектора перемещений имеют вид формул (4.30), только в них необходимо угол γ заменить на $(-\gamma)$, а затем в выражении для U_γ изменить знак на противоположный.

Локальный анализ полей напряжений вблизи разреза, например, во внутренней области V_1 целесообразно проводить следующим образом. В формулы для компонент тензора напряжений (1.27) подставить проекции векторов усилий на площадках с нормальными $\vec{n} = \vec{e}_\xi$, $\vec{n} = \vec{e}_\eta$ (1.24), (1.26) и вместо неизвест-

ных коэффициентов α_n , β_n воспользоваться их выражениями через вспомогательные интегралы $J_n^{(1)}$, $J_n^{(2)}$ (3.4). Дальнейшие преобразования строятся аналогично преобразованиям, проведенным над выражениями (4.11) для получения асимптотической формулы (4.30), только необходимо наряду с приближенными равенствами (4.15), (4.17), воспользоваться также асимптотическими формулами, приведенными ниже

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \frac{d_n(i\eta_0 - \xi + \xi_0)}{2s^{3/2} \sqrt{2s \sin \eta_0}} \approx \frac{-i \rho^{\frac{3}{2}}}{2s^{3/2} \sqrt{2s \sin \eta_0}}; \quad (4.31)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \frac{d_n(i\eta_0 - \xi + \xi_0)}{n(n+1)} \approx \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{2s^{3/2} \sqrt{2s \sin \eta_0}}.$$

Эти формулы легко получить, если продифференцировать равенства (4.13), (4.16) по переменной t , а затем в них положить $t = \eta_0$, $h = \rho^{-\xi + \xi_0}$ и воспользоваться соотношением типа (4.14). Не имея возможности детально остановиться на всех этапах преобразования формул (1.27) вблизи граничной окружности эллипсоидального разреза, приведем полученные окончательные выражения для компонент тензора напряжений в полярной системе координат

$$\sigma_{\theta}^{(1)} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}\rho} [R_1(3 - \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} - R_2(3 \cos \gamma - 1) \sin \frac{\gamma}{2}] + \dots$$

$$\sigma_{\gamma}^{(1)} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}\rho} [R_1(1 + \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} + 3R_2 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2}] + \dots \quad (4.32)$$

$$\tau_{\rho\gamma}^{(1)} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}\rho} [R_1 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} - R_2(3 \cos \gamma - 1) \cos \frac{\gamma}{2}] + \dots$$

где R_1 , R_2 - определяются формулами (4.8).

Компоненты тензора напряжений во внешней области V_2 имеют вид формул (4.32), только в них необходимо угол γ заменить на $(-\gamma)$, а затем общий знак в выражении для $\tau_{\rho\gamma}$ изменить на противоположный.

В заключение приведем выражения для определения перемещений поверхностей разреза ($0 \leq \eta \leq \eta_0$). На основании раз-

рывных сумм (3.1) получим

$$U_z^{(1)} - U_z^{(2)} = 2 \frac{m-1}{m} \int_0^{\eta_0} \psi(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sin \alpha_n t P_n(\cos \eta) \right] dt =$$

$$= 2 \frac{m-1}{m} \int_0^{\eta_0} \frac{\psi(t) dt}{\sqrt{2 \cos \eta - 2 \cos t}}; \quad (4.33)$$

$$U_z^{(1)} - U_z^{(2)} = 2 \frac{m-1}{m} \int_0^{\eta_0} \psi(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n P_n^1(\cos \eta)}{n(n+1)} \cos \alpha_n t \right] dt =$$

$$= 2 \frac{m-1}{m} \int_0^{\eta_0} \frac{\sin t \psi(t) dt}{\sin \eta \sqrt{2 \cos \eta - 2 \cos t}};$$

В дальнейшем, полученные результаты применяются к задачам прогнозирования начального направления распространения трещины и оценке прочности материала с указанным дефектом по одному из критериев механики хрупкого разрушения. Анализ этих критериев дан, например, в монографиях [20-25], поэтому мы остановимся лишь на одном из них, который сейчас широко применяется при оценке трещиностойкости материалов [20], [25] и др.

Согласно этому критерию, направление начального распространения трещины совпадает с плоскостью, в которой главная часть растягивающих напряжений достигает максимального значения [19], [26]. Исходя из этого предположения, значения начального угла распространения трещины находятся по формуле [27]

$$\gamma^* = 2 \arctan \frac{R_1 - \sqrt{R_1^2 + 8R_2^2}}{4R_2} \quad (4.34)$$

Критическое значение внешней нагрузки находится из уравнения предельного равновесия [27]

$$\cos^3 \frac{\gamma^*}{2} (R_1 - 3R_2 \tan \frac{\gamma^*}{2}) = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi}} \quad (4.35)$$

где K_{Ic} - коэффициент трещиностойкости материала и определяется экспериментальным путем [26].

§ 5. Упругое пространство с эллипсоидальным разрезом под действием аксиальных и радиальных сил приложенных на бесконечности

В виде примера рассмотрим случай равномерного нагружения упругого пространства с эллипсоидальным разрезом аксиальными P и радиальными силами $q = \lambda P$ приложенными на бесконечности. В частном случае $\rho = q$ и $q = 0$ получим, соответственно, всестороннее и одноосное растяжение упругого пространства. Граничные условия (2.1) принимают вид

$$\begin{aligned} R_n^{(4)} &= -\lambda P \frac{\operatorname{sh} \xi_0 \sin \eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta}} = f_1(\eta), \\ Z_n^{(4)} &= -P \frac{\operatorname{ch} \xi_0 \cos \eta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \sin^2 \eta}} = f_2(\eta) \quad (0 \leq \eta \leq \eta_0) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Левые части системы интегро-дифференциальных уравнений (3.2) остаются без изменения, а правые части равны

$$\begin{aligned} F_1(x) &= -\frac{2\lambda P}{\pi} \frac{\operatorname{sh} \xi_0}{\sin x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\sin^3 \eta d\eta}{\sqrt{2\cos \eta - 2\cos x}}, \\ F_2(x) &= -\frac{2P}{\pi} \operatorname{ch} \xi_0 \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\sin \eta \cos \eta d\eta}{\sqrt{2\cos \eta - 2\cos x}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

После вычисления последних интегралов для функций $F_i(x)$ получим следующие выражения

$$F_1(x) = -\frac{8\lambda P}{3\pi} \operatorname{sh} \xi_0 \sin \frac{3x}{2}; \quad F_2(x) = -\frac{2P}{\pi} \operatorname{ch} \xi_0 \cos \frac{3x}{2}. \quad (5.3)$$

Для приближенного решения системы (3.20), применяется метод механических квадратур [18-19], который основан на замене интегральных уравнений соответствующей системой линейных алгебраических уравнений. В качестве квадратурной формулы была выбрана формула Симпсона.

Численные расчеты приведены на рисунках [3-6]. Вычисление проводилось при числе Пуассона $\nu = 3$ и при различных гео-

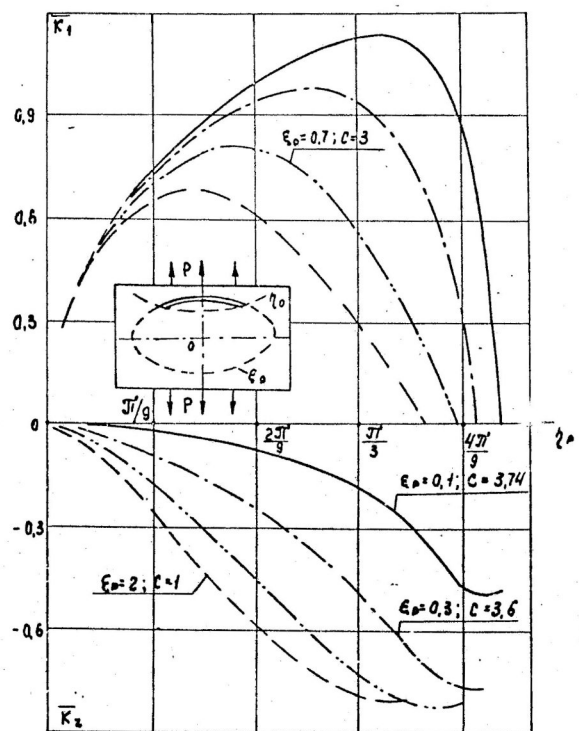


Рис. 3. Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от геометрии разрезов при одноосном растяжении

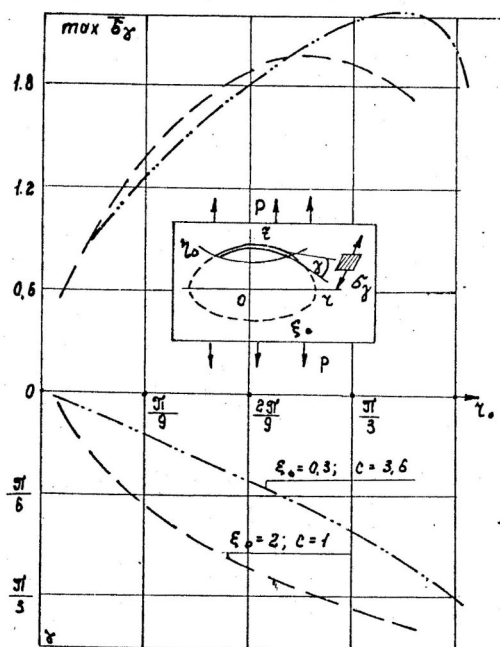


Рис. 4. Зависимость локальных максимальных растягивающих напряжений и начального направления разрушения материала от геометрии разрезов

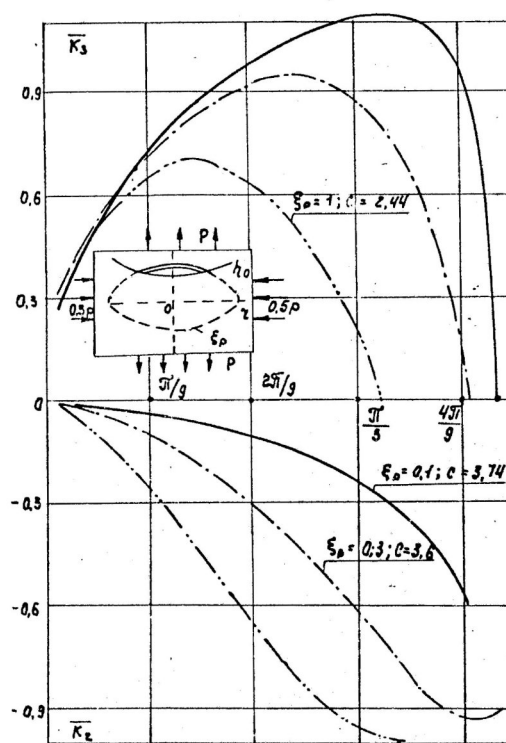


Рис. 5. Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от геометрии разрезов

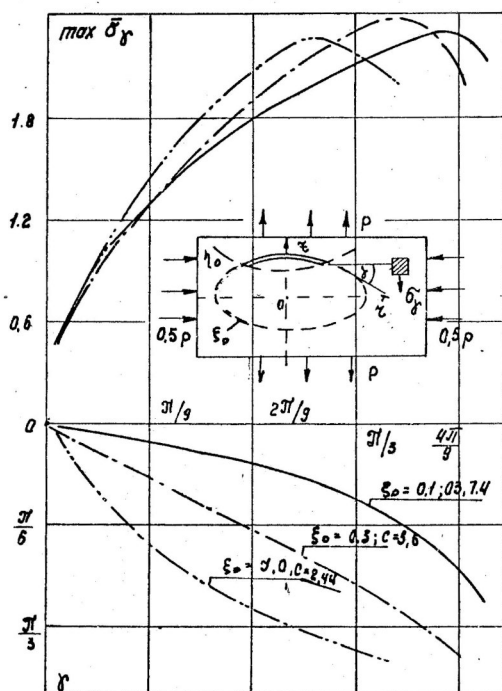


Рис. 6. Зависимость локальных максимальных растягивающих напряжений и начального направления разрушения материала от геометрии разрезов

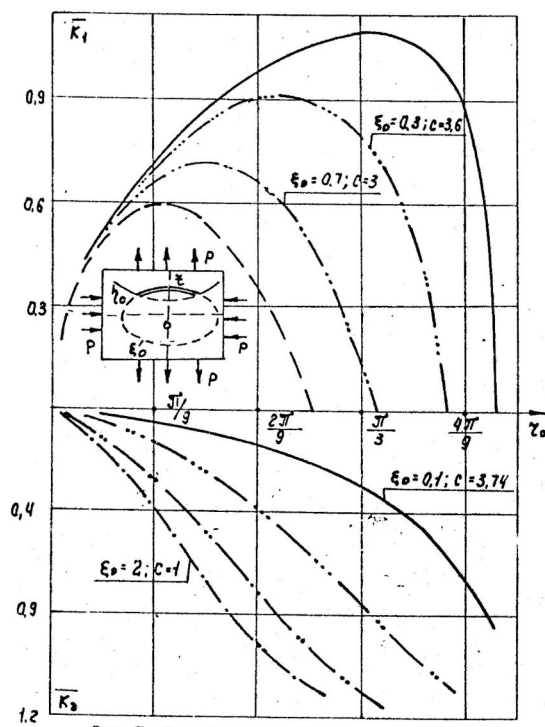


Рис. 7. Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от геометрии разрезов

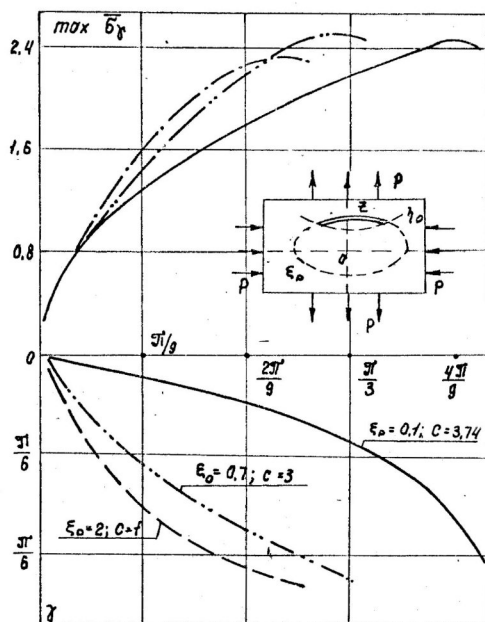


Рис. 8. Зависимость локальных максимальных растягивающих напряжений и начального направления разрушения материала от геометрии разрезов

метриях разрезов.

На рис.3 представлены значения коэффициентов интенсивности напряжений при одноосном растяжении упругого пространства с эллипсоидальным разрезом, полученные по формулам (4.8). При этом, значение большой полуоси a было зафиксировано и во всех случаях параметр C подбирался таким образом, чтобы $\alpha = 3,762$. При $\xi_0 = 2$ отношение полуосей равно $b/a = 0,96$, при $\xi_0 = 0,7 - b/a = 0,6044$; при $\xi_0 = 0,3 - b/a = 0,2913$ и при $\xi_0 = 0,1 - b/a = 0,0997$. Ввиду того, что в литературе отсутствуют какие-либо численные результаты расчета напряженно-деформированного состояния в окрестности эллипсоидального разреза, то сравнение численных данных при больших значениях ξ_0 проводилось с результатами счета для задачи о сферическом разрезе [11]. Например, при $\xi_0 = 3$ отношение полуосей эллипсоида $b/a = 0,998$ и расхождение численных результатов для эллипсоидального и сферического разрезов наблюдалось только в третьем знаке после запятой.

Интересно отметить, что при $\xi_0 = 0,1$ эллипсоидальный разрез при $0 < \eta < \frac{\pi}{4}$ по форме является близким к дискообразному разрезу. Коэффициент интенсивности напряжений K_2 при $\eta < \frac{\pi}{4}$ принимает значения близкие к нулевым, а K_1 при $\eta < \frac{\pi}{4}$ фактически пропорциональной $\sqrt{S}$, где S - площадь разреза. Качественная и количественная сторона этих результатов согласуется с результатами для кругового разреза. Из рис.3 следует, что существуют точки в которых K_1 и K_2 достигают максимального значения. Однако, как видно из формул (4.32), максимальные растягивающие напряжения в окрестности эллипсоидального разреза достигаются при определенной комбинации значений K_1 и K_2 . В верхней части рис.4 представлена зависимость максимального растягивающего напряжения σ_{max} от координаты η , а в нижней части рисунка 4 зависимость начального предполагаемого напряжения разрушения материала (угол γ) от разреза. Из рис.4 видно, что σ_{max} , например, для разреза $\xi_0 = 2$ достигается при $\eta \approx 55/118$. Зависимость тех же механических характеристик при $\alpha = -0,5$ и $m = 3$ представлена на рисунках 5,6.

В заключение отметим, что путем варьирования ξ , η и параметра C удается охватить широкий спектр разрезов

переменной кривизны и тем самым значительно расширить геометрию трещин в материалах, для которых можно дать оценку прочности с позиции линейной механики разрушения. В частности, геометрия дискообразного и сферического разрезов получается из геометрии эллипсоидального разреза, соответственно, при малых и больших значениях координаты ξ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1955. - 491 с.
2. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. - Киев: Наук. думка, 1979. - 264 с.
3. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: Наука, 1978. - 464 с.
4. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. - Киев: Наук. думка, 1979. - 240 с.
5. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. - М.: Наука, 1981. - 688 с.
6. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - Л.: Наука, 1967. - 402 с.
7. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - М.: Наука, 1965. - 426 с.
8. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. - М.: Изд-во иностр. лит., 1952. - 472 с.
9. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - М.: Наука, 1973. - 296 с.
10. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 707 с.
11. Мартыненко М.А., Улитко А.Ф. Напряженное состояние вблизи вершины сферического разреза в неограниченной упругой среде // Прикл. мех. - 1978. - 14, № 9. - С.15-23.
12. Мартыненко М.А. Решение парных уравнений по полиномам Лежандра первого порядка // Мат. физика. - 1979. - Вып.25. - С.106 - 109.
13. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. - М.: Физматгиз, 1968. - 439 с.

14. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. - Л.: Наука, 1977. - 220 с.
15. Толстов Г.П. Ряды Фурье. - М.: Наука, 1980. - 384 с.
16. Сихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 - М.: Наука, 1969. - 800 с.
17. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.М. Интегралы и ряды. - М.: Наука, 1981. - 800 с.
18. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.; Л.: Физматгиз, 1962. - 708 с.
19. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. - Киев: Наук. думка, 1978. - 292 с.
20. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. - Киев: Наук. думка, 1968. - 246 с.
21. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. - М.: Наука, 1974. - 416 с.
22. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974. - 640 с.
23. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. - М.: Наука, 1974. - 311 с.
24. Разрушение. Математические основы теории разрушения. Т.2. - М.: Мир, 1975. - 763 с.
25. Прикладные вопросы вязкости разрушения /Под ред. Б.А.Дроздовского: Пер. с англ. - М.: Мир, 1968. - 522 с.
26. Панасюк В.В., Андрейкив А.К., Ковчик С.Е. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. - Киев: Наук. думка, 1977. - 278 с.
27. Андрейкив А.Е. Пространственные задачи теории трещин. - Киев: Наук. думка, 1982. - 348 с.
28. Панасюк В.В., Саврук М.П., Далишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - Киев: Наук. думка, 1976. - 443 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Решение уравнения Ламе	3
2. Приведение задачи об эллипсоидальном разрезе к взаимосвязанной системе парных уравнений	11
3. Решение взаимосвязанной системы парных уравнений	15
4. Локальный анализ полей перемещений и напряжений вблизи граничной окружности эллипсоидального разреза	24
5. Упругое пространство с эллипсоидальным разрезом под действием аксиальных и радиальных сил приложенных на бесконечности	38
6. Литература	

Михаил Антонович МАРТЫНЕНКО

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО РАЗРЕЗОМ ПО
ПОВЕРХНОСТИ СЖАТОГО СФЕРОИДА

Препринт

Редактор А.А.Березовский

Подп. в печ. 04.03.86 БФ 21483 . Формат 60х84/16. Бумага тип.
Офс. печать. Усл.печ.л. 2,79 Уч.-изд.л. 2,4 Тираж 160 экз.
Заказ 171 Цена 35 к.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН УССР
252601, Киев-4, ГСН, ул.Редина, 3.