УДК 519.8

УЗАГАЛЬНЕНІ КРИТЕРІЇ ЯКОСТІ В ЗАДАЧАХ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Л.В. Артюхова, Н.М. Рущенко, Т.В. Зінченко

Анотація. *Проведено аналіз різних способів формування узагальнених критеріїв якості для формування цільових функцій в задачах багатокритеріальної оптимізації. В залежності від типу цільової функції та характеру обмежень застосовані аналітичні методи, методи математичного програмування або ітераційні методи дослідження операцій. Запропоновано цільові функції для розв'язування практичних задач оптимізації в економіці та харчовій промисловості (оптимізація рецептурного складу продукту).*

Ключові слова: *математична модель, багатокритеріальна оптимізація, цільова функція, узагальнений критерій якості.*

Вступ. При дослідженні технологічних та економічних процесів, що залежать одночасно від кількох факторів різного характеру, результати досліджень часто отримують у вигляді значень різних характеристик – частинних критеріїв. Важливою проблемою є проблема об'єднання кількох окремих критеріїв $f_1, f_2 \dots f_N$ в один узагальнений критерій ефективності F, що є обов'язковою складовою задач багатокритеріальної оптимізації.

Методи досліджень. Результативним методом дослідження таких задач є математичне моделювання. Математична модель досліджуваного процесу повинна відображати мету процесу, враховувати характер залежностей та кількісні співвідношення між керованими змінними та іншими параметрами, що впливають на ефективність досягнення мети. Як правило, математична модель включає функцію мети – цільову функцію, систему обмежень на керовані змінні та детерміновані параметри, критерій ефективності розв'язку.

Важливою ланкою процесу створення математичної моделі є перевірка її адекватності. Модель вважається адекватною, якщо вона забезпечує достатньо надійне передбачення поведінки досліджуваної системи.

Метою наукового дослідження є аналіз методів створення цільових функцій та способів перевірки адекватності математичної моделі в задачах оцінки якості за показниками кількох критеріїв одночасно.

Якщо сукупність керованих змінних об'єднати у вектор $\vec{x}$, а сукупність детермінованих параметрів – вектор $\vec{a}$, то задачу багато-критеріальної оптимізації можна описати у вигляді:

$$f_1\left(\vec{x},\vec{a}\right) \to \max;\ f_2\left(\vec{x},\vec{a}\right) \to \max, \dots f_N\left(\vec{x},\vec{a}\right) \to \max \cdot$$

Об'єднання кількох окремих критеріїв – згортання критеріїв – можна представити у вигляді:

$$F = F\left(f_1\left(\vec{x},\vec{a}\right); f_2\left(\vec{x},\vec{a}\right), \dots f_N\left(\vec{x},\vec{a}\right)\right) \Rightarrow \max;\ \vec{x} \in X,$$

де X - множина N- мірних точок $\vec{x}$. Розв'язком задачі багатокритеріальної оптимізації можна вважати таке значення вектора керованих змінних $\overrightarrow{x^*}$, що забезпечує досягнення найбільшого значення критерію ефективності серед всіх можливих значень вектора керованих змінних:

$$\overrightarrow{x^*} = \arg\max_{x \in X} F\left(\vec{a}, \vec{x}\right).$$

Пошук максимального значення критерію не звужує умову задачі, оскільки задача на знаходження мінімального значення для F' легко зводиться до задачі знаходження максимального значення перетворенням $F = -F'$.

Серед відомих методів об'єднання кількох окремих критеріїв найважливішими є:

а) *метод лінійного згортання;*

цільова функція має лінійний характер: $F = \sum_{i=1}^{N}\left(c_i \cdot f_i\left(\vec{x}, \vec{a}\right)\right) \Rightarrow \max; \; \sum_{i=1}^{N} c_i = 1, c_i \geq 0;$

для нормованих критеріїв $F = \sum_{i=1}^{N}\left(c_i \cdot \dfrac{f_i\left(\vec{x}, \vec{a}\right) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}\right) \Rightarrow \max;$

де c_i — вагові коефіцієнти критеріїв, які відповідають їх важливості, $f_i^{\max}, f_i^{\min}$ - максимальне та мінімальне значення $i-го$ критерію;

б) *метод ідеальної точки;* ідеальною точкою є N-мірна точка, в якій досягається екстремум по кожному окремому критерію (принцип Джофріона); розв'язок задачі визначається за умови мінімізації «відстані» до ідеальної точки:

$$F\left(\vec{x}\right) = \rho\left(F\left(\vec{a}, \vec{x}\right) - F^*\right) \Rightarrow \min, \vec{x} \in X,$$

де $F^* = \left(f_1^*, f_2^*, \ldots f_N^*\right), \; f_i^* = \max f_i\left(\vec{a}, \vec{x}\right), i = \overline{1, N};$

у випадку евклідової метрики $F\left(\vec{x}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(f_i\left(\vec{a}, \vec{x}\right) - f_i^*\right)^2} \Rightarrow \min, \vec{x} \in X;$

в) *метод переведення критеріїв в обмеження* [4], що полягає у виділенні головного критерію, за яким проводиться оптимізація, на решту критеріїв накладаються обмеження знизу у вигляді експертних нормативів:

$$f_1\left(\vec{x}, \vec{a}\right) \to \max; \; f_2\left(\vec{x}, \vec{a}\right) \geq f_2^0, \ldots f_N\left(\vec{x}, \vec{a}\right) \geq f_N^0;$$

г) *метод контрольних показників*: $F\left(\vec{x}, \vec{a}\right) = \min_i \dfrac{f_i}{f_i^0} \Rightarrow \max_{x \in X};$

д) *метод послідовних поступок;* критерії впорядковуються за важливістю в порядку її спадання; послідовно на кожному кроці розв'язується задача оптимізації за одним критерієм, та призначається деяка поступка зменшення оптимального значення по цьому критерію, щоб покращити значення інших критеріїв; призначення поступки означає введення на кожному кроці ще одного додаткового обмеження $f_i \geq f_i^* - \Delta f_i$; на (i+1)-му кроці задача має вигляд:

$$f_{i+1}\left(\vec{a}, \vec{x}\right) \Rightarrow \max, \vec{x} \in X, \; f_1\left(\vec{a}, \vec{x}\right) \geq f_1^* - \Delta f_1, \ldots f_i\left(\vec{a}, \vec{x}\right) \geq f_i^* - \Delta f_i;$$

процес закінчується, якщо досягнуто останнього критерію, або ж призначення поступки недоцільне.

Узагальнений критерій може мати лінійний характер або нелінійний. Найбільш відомі і прості узагальнені критерії –лінійні критерії виду:

$$F=\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot f_i^*,\ i=1,2\ldots N, \tag{1}$$

де f_i^* - значення частинних критеріїв, c_i - вагові коефіцієнти.

При об'єднанні частинних критеріїв в один необхідно абсолютні значення частинних критеріїв f_i з їх розмінностями переводити певним чином у відносні безрозмірні величини f_i^*.

За характером варто розглядати два способи одержання безрозмірних величин – ранжування та нормування. При ранжуванні значення f_i^* приймаються рівними або 1 – якщо значення критерію f_i прийнятне, або 0 - якщо значення критерію f_i незадовільне. При нормуванні значення $f_i^*=\dfrac{f_i}{f_{i0}}$, де f_{i0} - деяке, наприклад, максимально можливе значення критерію.

Узагальненням методу ранжування можна вважати застосування функції переваги Харрінгтона. Її призначення – об'єднання не тільки фізичних, а й психологічних (наприклад, естетичних) показників. Для кожного показника f_i будується шкала переваг – кількох порогових значень $d_{ki}, k=1,2\ldots K$, від 0 до 1, кожне з яких відповідає певній якісній оцінці отриманого значення f_i. Узагальнений критерій в цьому випадку пропонується у вигляді $D_k=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} d_{ik}}$. Цей критерій називають узагальненою функцією переваг Харрінгтона.

Серед нелінійних критеріїв найчастіше зустрічаються:

1) мультиплікативний $F=\prod_{i=1}^{N} f_i^*$ або $F=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} f_i^*}$

2) квадратичний

$$F=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{f_i-f_{i0}}{f_{i0}}\right)^2 \text{ або } F=\sum_{i=1}^{N} c_i\cdot\left(\frac{f_i-f_{i0}}{f_{i0}}\right)^2,\ \sum_{i=1}^{N} c_i=1; \tag{3}$$

3) критерій багатокутника якості [1]:

$$F=c_1f_1f_2+c_2f_2f_3+\ldots+c_{N-1}f_{N-1}f_N+c_Nf_Nf_1=\sum_{i=1}^{N} c_if_if_{i+1},\quad f_{N+1}=f_1. \tag{4}$$

Результати та обговорення. Кожен з цих критеріїв має свої недоліки та переваги. Тому в кожній проблемній ситуації для створення математичної моделі доцільно виконати попередній порівняльний аналіз чутливості різних критеріїв до умов задачі, щоб правильно обрати метод багатокритеріальної оптимізації, який би врахував всі особливості задачі.

Якщо математична модель задачі лінійна з цільовою функцією (1), то задачу можна розв'язати симплекс-методом або в деяких ситуаціях – графічно.

Якщо математична модель задачі нелінійна з цільовою функцією (2), (3) або (4), то задача розв'язується з використанням методів математичного аналізу – методу Лагранжа, методу Куна-Такера чи інше.

Якщо створення математичної моделі в цілісному аналітичному вигляді викликає труднощі, варто застосовувати методи а), б), в), г).

Загальний метод перевірки адекватності математичної моделі полягає у співставленні результатів моделювання з характеристиками, які система мала в минулому. Для підтвердження адекватності можна застосувати відомі критерії математичної статистики, наприклад, критерій Стьюдента, для оцінки квадратів відхилень розрахункових значень математичної моделі від експериментальних.

Для прикладу розглядається задача знаходження оптимальної рецептури печива, якість якого характеризується трьома основними критеріями. Цільова функція будується за критерієм багатокутника якості. Задача знаходження оптимального розв'язку – кількісного співвідношення інгредієнтів – знаходиться за методом Лагранжа [2,3] .

Висновки.

1. Ґрунтовна побудова математичної моделі є важливим елементом наукового дослідження оптимізаційного характеру.
2. При побудові чи виборі цільової функції (аналітичного чи ітераційно-аналітичного характеру) перевагу варто надавати тому узагальненому критерію якості, який забезпечує достатню чутливість результату від значень та співвідношень між досліджуваними факторами.

Література.

1. *Зінченко Т.В., Корецька І.Л.,* Критерій "багатокутника якості" для багатокритеріального оцінювання ефективності. – К., Наукові праці УДУХТ, №10 (спецвипуск), ч.II, 2001р.

2. *Корецька І.Л., Зінченко Т.В.* Новый метод оценки пищевых продуктов. –К., Продукты &, февраль, 2006г.

3. *Корецька І.Л., Зінченко Т.В.* Спосіб визначення критерію якості виробів. Деклараційний патент на винахід; номер заявки 2002042742.

4. *А.В. Катренко*, Дослідження операцій. Підручник. – Львів, «Магнолія Плюс», 2005р.

Авторська довідка.

*1. **Л.В. Артюхова**, випускник магістратури ІМВ КДУ ім.Т.Г. Шевченка, e-mail: artyukhova@gmail.com.*

*2. **Н.М. Рущенко**, студентка факультету ОФПД, НУХТ.*

*3. **Зінченко Тетяна Володимирівна**, к. т. н., доцент, кафедра вищої математики, Національний університет харчових технологій, e-mail: zin.val@gmail.com.*