МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ і НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ФІЗИКА

ПОСІБНИК
з розв'язування задач
з курсу загальної фізики

Київ
Фірма «ІНКОС»
2016

УДК 577.3 (075.8)
ББК 28.071я73
Ф503

Автори:

Вербицький Б.І., канд. техн. наук.
Король А.М., д-р фіз.-мат. наук.
Котікова С.М.
Медвідь Н.В., канд. фіз.-мат. наук.

Рецензенти:

Носенко В.Є., канд. фіз.-мат. наук.
Лазаренко М.В., канд. фіз.-мат. наук.

Вербицький Б.І., Король А.М., Котікова С.М., Медвідь Н.В.
Ф503 **Фізика.** Навч. посіб. з розв'язування задач з курсу загал. фізики. — К. : «Фірма «ІНКОС», 2016. — 376 с.
ISBN 978-617-598-102-3.

Даний посібник відповідає програмі курсу фізики для вищих навчальних закладів технічного та технологічного профілю 3–4 рівня акредитації. У посібнику викладено основні теоретичні відомості курсу, які поділені на розділи. Кожний розділ включає в себе декілька змістових модулів (тем), по кожному з яких здійснено аналіз основних фізичних задач. Для кожної групи задач розроблені методичні рекомендації та наведені приклади (всього 88 прикладів) їх розв'язування з ґрунтовними поясненнями. Посібник містить 520 задач для розв'язування в аудиторії та самостійної роботи студентів.

Посібник може бути корисним як студентам, так і викладачам.

УДК 577.3 (075.8)
ББК 28.071я73

ISBN 978-617-598-102-3

ПЕРЕДМОВА

Даний посібник відповідає програмі курсу фізики для вищих навчальних закладів технічного та технологічного профілю 3–4 рівня акредитації.

Значення задач в курсі фізики вищої школи важко переоцінити. Без них не можуть бути повною мірою засвоєні теоретичні положення, фізичні закони та закономірності. Але, як відомо, під час розв'язуванні задач студенти стикаються зі значними труднощами. Мета даного посібника полягає в тому, щоб допомогти студентам подолати ці труднощі в процесі підготовки до практичних занять, самостійних та контрольних робіт.

У посібнику послідовно викладено основні теоретичні відомості. Увесь наведений матеріал поділено на дев'ять розділів. Кожний розділ включає в себе декілька змістових модулів (тем). По кожному змістовому модулю (темі) в залежності від їх особливостей здійснено аналіз основних фізичних задач і задачі поділено на певні групи. Для кожної групи задач розроблені методичні рекомендації. Для всіх груп задач наведені приклади їх розв'язування з ґрунтовними поясненнями. Всього в посібнику наведено 88 прикладів розв'язування задач за різними темами. Для кожного змістового модуля (теми) підібрані задачі для розв'язування в аудиторії та для самостійної роботи студентів. В сумі посібник містить 260 задач для розв'язування в аудиторії і 260 задач для самостійної роботи студентів.

Посібник може бути корисним для студентів всіх спеціальностей та форм навчання, а також може використовуватися викладачами як методичне забезпечення під час проведення практичних занять.

Автори висловлюють щиру подяку доценту кафедри фізики НУХТ Носенку Володимиру Єрофійовичу за сталий інтерес до даної роботи, його слушні поради та зауваження були взяті авторами до уваги.

ВСТУП

Фізика, як навчальна дисципліна, має свою логічну структуру, до якої входять наукові факти, явища, процеси, поняття, закони, теорії та інше. Між цими елементами фізичних знань існують певні внутрішні зв'язки. Одним з найголовніших методів засвоєння фізичних знань є розв'язування задач, в процесі якого знання конкретизуються, відбувається їх систематизація та поглиблення, формується вміння аналізувати та логічно мислити.

Відомо, що у студентів розв'язування задач викликає деякі труднощі, пов'язані з невмінням аналізувати умови задач і застосовувати набуті теоретичні знання. Це пояснюється тим, що теоретичні знання завжди мають дещо узагальнений характер, а в умовах задач задаються конкретні фізичні ситуації, які треба проаналізувати, представити їх в фізичних понятійних характеристиках та перевести в математичну форму.

Структуру взаємодії теоретичних знань з елементами умови задач можна показати на такій схемі:

В процесі розв'язування лише великої кількості задач природним чином формується система і послідовність дій, спрямованих на аналіз фізичної ситуації. Тому нашою метою є допомогти студентам навчитись аналізувати умови задач та оволодіти прийомами їх розв'язування. Для цього пропонуються такі основні загальні етапи аналізу умови задач та послідовність дій при їх розв'язуванні:

1. Зробіть короткий запис умови задачі, який має включати в себе як задані величини, так і ті, які треба знайти. Всі величини слід позначати у відповідності до загальноприйнятої символіки.
2. Переведіть одиниці вимірювання величин у систему СІ.
3. Запишіть необхідні значення табличних величин.
4. З'ясуйте, які основні об'єкти, явища та процеси описуються в задачі. Якщо необхідно, зробіть рисунок, схему або побудуйте графік (схематична модель).
5. Зіставте відомі дані та питання задачі, встановіть між ними зв'язок через теоретичний матеріал та представте умову задачі через фізичні поняття (модель фізичної ситуації).
6. Запишіть закони або рівняння, які пов'язують відомі величини з невідомими (математична модель).
7. З одержаних рівнянь знайдіть невідомі величини.
8. Перевірте правильність одиниць вимірювання шуканих величин.
9. Зробіть обчислення.
10. Оцініть вірогідність результату.

Розділ 1 МЕХАНІКА

1.1. КІНЕМАТИКА

ОСНОВНІ ЗАКОНИ ТА ФОРМУЛИ

▶ Положення рухомої матеріальної точки у просторі задається:

а) її координатами або шляхом, як функціями часу (кінематичні рівняння руху у скалярній формі)

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \qquad \text{або} \qquad s = f(t). \\ z &= z(t). \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

б) її радіус — вектором, що проводиться з початку координат (кінематичні рівняння руху у векторній формі)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ , \tag{1.1.2}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні вектори напрямків (орти) координатних осей; x, y, z — координати точки.

▶ Модуль радіус–вектора

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \tag{1.1.3}$$

▶ Вектор переміщення матеріальної точки

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\ , \tag{1.1.4}$$

де $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$; $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ — радіуси–вектори матеріальної точки в моменти часу t_1 та t_2; $\Delta t = t_2 - t_1$.

▶ Середня швидкість переміщення за проміжок часу Δt

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.1.5}$$

▶ Миттєва швидкість

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \tag{1.1.6}$$

де v_x, v_y, v_z — проекції вектора швидкості $\vec{v}$ на координатні осі,

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt}.$$

▶ Модуль вектора миттєвої швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{1.1.7}$$

▶ Середнє прискорення

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \tag{1.1.8}$$

де $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ — вектор зміни швидкості за час Δt.

▶ Миттєве прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{1.1.9}$$

де $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ — проекції вектора прискорення на координатні осі X, Y, Z, відповідно.

▶ Модуль вектора прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.1.10}$$

▶ Тангенціальне прискорення в криволінійному русі

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}, \tag{1.1.11}$$

де $\vec{\tau}$ — одиничний вектор (орт) напрямлений вздовж дотичної до траєкторії в бік руху.

▶ Нормальне прискорення в криволінійному русі

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}, \qquad (1.1.12)$$

де $\vec{n}$ — одиничний вектор (орт) напрямлений вздовж нормалі до траєкторії до її центру кривизни; R — радіус кривизни траєкторії у даній точці.

▶ Повне прискорення та його модуль у криволінійному русі:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau ; \qquad (1.1.13)$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} . \qquad (1.1.14)$$

▶ Довжина шляху S, що пройшла матеріальна точка за проміжок часу від t_1 до t_2

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v dt . \qquad (1.1.15)$$

▶ Для рівномірного прямолінійного руху:

$$a = 0 ; \; \vec{v} = \text{const} ;$$

$$S = v(t_2 - t_1) = v\Delta t . \qquad (1.1.16)$$

▶ Для рівнозмінного прямолінійного руху з початковою швидкістю v_0

$$v = v_0 \pm at ;$$

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \qquad (1.1.17)$$

де знак «+» відповідає рівноприскореному, а знак «–» рівноуповільненому рухам.

▶ Середня шляхова швидкість нерівномірного руху тіла на ділянці шляху ΔS за час Δt

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} . \qquad (1.1.18)$$

▶ Кінематичне рівняння руху матеріальної точки по колу радіуса $R = \text{const}$

$$\varphi=\varphi(t). \tag{1.1.19}$$

де φ — кут повороту радіус-вектора матеріальної точки, проведеного від центру кола.

▶ Середня кутова швидкість

$$\vec{\omega}_{ср}=\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \tag{1.1.20}$$

де $\Delta\vec{\varphi}$ — вектор кутового зміщення.

▶ Миттєва кутова швидкість

$$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.1.21}$$

▶ Приріст (зміна) кута повороту $\Delta\varphi$ за час $\Delta t=t_2-t_1$.

$$\Delta\varphi=\int_{t_1}^{t_2}\omega dt. \tag{1.1.22}$$

▶ Середнє кутове прискорення

$$\vec{\beta}_{ср}=\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}. \tag{1.1.23}$$

▶ Миттєве кутове прискорення

$$\vec{\beta}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.1.24}$$

▶ Для рівнозмінного руху матеріальної точки (тіла) по колу радіуса R = const з початковою кутовою швидкістю ω_0

$$\omega=\omega_0\pm\beta t;$$

$$\Delta\varphi=\omega_0 t\pm\frac{\beta t^2}{2}, \tag{1.1.25}$$

де знак «+» відповідає рівноприскореному руху по колу, а знак «–» рівно сповільненому руху.

▶ Період обертання матеріальної точки по колу радіуса R = const

$$T=\frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.1.26}$$

▶ Частота обертання матеріальної точки по колу радіуса $R = \text{const}$

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad (1.1.27)$$

▶ Зв'язок між лінійними та кутовими кінематичними величинами

$$S = R \cdot \varphi; \quad v = R \cdot \omega;$$

$$a_\tau = \beta \cdot R; \quad a_n = \omega^2 \cdot R. \qquad (1.1.28)$$

▶ Перетворення координат Галілея:

а) у векторній формі

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 t, \qquad (1.1.29)$$

де $\vec{r}$ — радіус-вектор точки в нерухомій системі відліку K; $\vec{r}_0$ — радіус-вектор початку координат системи відліку K' в нерухомій системі відліку K (відносно системи K); $\vec{r}\,'$ — радіус-вектор точки в рухомій системі відліку K'; $\vec{v}_0$ — швидкість руху системи K' відносно системи K.

б) в проекціях на координатні осі

$$x = x' + v_{0x}t; \quad y = y' + v_{0y}t; \quad z = z' + v_{0z}t. \qquad (1.1.30)$$

▶ Закон додавання швидкостей в класичній механіці

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0, \qquad (1.1.31)$$

де $\vec{v}$ — швидкість точки в нерухомій системі відліку K (***абсолютна швидкість***); $\vec{v}\,'$ — швидкість точки в рухомій системі K' (***відносна швидкість***); $\vec{v}_0$ — швидкість рухомої системи відліку K' відносно системи K (***переносна швидкість***).

Методичні рекомендації до розв'язування задач з теми: «КІНЕМАТИКА»

Всі задачі розділу «Кінематика» можна поділити на прямі та обернені.

В прямих задачах, відомими є переміщення $\vec{r}(t)$ або пройдений шлях $S(t)$ (закон руху) і треба знайти швидкість, прискорення, рівняння траєкторії руху. Ці задачі кінематики зводяться до диференціювання закону руху.

В обернених задачах відомими є швидкість $\vec{v}(t)$ або прискорення $\vec{a}(t)$ і задані початкові умови (швидкість або прискорення тіла в початковий момент часу), треба знайти переміщення $\vec{r}(t)$ або пройдений шлях $S(t)$ (закон руху). Ці задачі зводяться до інтегрування залежностей $\vec{a}(t)$ або $\vec{v}(t)$.

Розв'язання задач з кінематики, як правило, здійснюється координатно-векторним способом. Цей спосіб передбачає запис кінематичних величин у векторній формі. Перехід до скалярної форми запису здійснюється через знаходження проекцій цих величин на відповідні координатні осі, розв'язок системи скалярних рівнянь у загальному вигляді та числові розрахунки.

Задачі з кінематики можна розділити на 3 групи:

1. До першої групи належать задачі, в яких розглядається довільний змінний рух матеріальної точки та задається рівняння цього руху як функціональна залежність радіус-вектора матеріальної точки від часу: $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Для прямолінійного руху часто задається залежність координати чи шляху від часу: $\varphi=\varphi(t)$; $s=s(t)$. В цих задачах потрібно визначити такі кінематичні характеристики як переміщення, шлях, швидкість чи прискорення, їх залежність від часу, миттєві чи середні значення. Зокрема такого ж типу задачі є і при вивченні руху матеріальної точки по колу: знаючи залежність кута повороту радіус-вектора від часу $\varphi=\varphi(t)$, потрібно визначити кутові характеристики матеріальної точки — кутову швидкість $\vec{\omega}(t)$, кутове прискорення $\vec{\beta}(t)$, їх миттєві та середні значення.

2. До другої групи можна віднести задачі, в яких розглядається змінний рух по будь-якій довільній криволінійній траєкторії (колу, параболі, дузі тощо) і потрібно визначити величину та напрямок миттєвих значень таких кінематичних величин як швид-

кість $\vec{v}$, нормальне $\vec{a}_n$, тангенціальне $\vec{a}_\tau$ та повне прискорення $\vec{a}$, радіус кривизни траєкторії R та інші характеристики руху.

3. До третьої групи належать задачі на відносність руху із можливим використанням класичного закону додавання швидкостей. У відповідності з цим законом швидкість матеріальної точки відносно нерухомої системи відліку (абсолютна швидкість) $\vec{v}$ дорівнює векторній сумі її швидкості відносно рухомої системи (відносна швидкість) $\vec{v}'$ та швидкості самої рухомої системи відліку (переносна швидкість) $\vec{v}_0$, тобто $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}$.

У відповідності з основними етапами розв'язання задач при розв'язуванні задач з кінематики варто користуватися такими рекомендаціями:

1. Зробіть короткий запис умови задачі, який повинний включати в себе як задані величини, так і ті, які треба знайти. Причому всі величини позначають у відповідності до загальноприйнятої символіки.
2. Переведіть одиниці вимірювання величин у систему СІ.
3. Запишіть значення необхідних величин, знайдених з таблиць.
4. Оберіть систему відліку із зручним напрямом координатних осей.
5. Якщо потрібно, зробіть схематичний малюнок та вкажіть на ньому всі кінематичні характеристики руху: переміщення за даний момент часу, миттєву швидкість на початку та в кінці руху, прискорення на початку та в кінці руху.
6. Запишіть рівняння руху у векторній формі.
7. Запишіть рівняння руху в проекціях на обрані координатні осі, об'єднавши їх в систему, та необхідні додаткові формули.
8. Розв'яжіть систему рівнянь відносно невідомого.
9. Перевірте правильність розв'язку через операції з одиницями вимірювання.
10. Зробіть обчислення.
11. Оцініть достовірність отриманого результату.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1.1.1. Залежність радіус-вектора матеріальної точки від часу t задається рівнянням $\vec{r}(t)=(2t^2+3t+1)\vec{i}+(5t+3)\vec{j}+5t^2\vec{k}$ (м). Визначити: а) залежності швидкості та прискорення матеріальної точки від часу t; б) модуль середньої швидкості за проміжок часу від t_1 = 1 с до t_2 = 3 с; в) модуль середнього прискорення за цей же проміжок часу.

Дано:

$\vec{r}(t)=(2t^2+3t+1)\vec{i}+$
$+(5t+3)\vec{j}+5t^2\vec{k}$ (м)

t_1 = 1 с
t_2 = 3 с

$\vec{v}(t)$ — ? ; $v_{ср}$ — ?
$\vec{a}(t)$ — ? ; $a_{ср}$ — ?

Розв'язання

В загальному вигляді залежність радіус-вектора матеріальної точки від часу t має вигляд

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \qquad (1)$$

Миттєві швидкість та прискорення можна визначити як першу та другу похідні радіус-вектора $\vec{r}$ від часу:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\,. \qquad (2)$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}\,. \qquad (3)$$

За умовою задачі

$$x(t)=2t^2+3t+1\ (\text{м});\ y(t)=5t+3\ (\text{м});\ z(t)=5t^2\ (\text{м}). \qquad (4)$$

Звідки

$$\frac{dx}{dt}=4t+3\,;\quad \frac{dy}{dt}=5\,;\quad \frac{dz}{dt}=10t\,. \qquad (5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=4\,;\quad \frac{d^2y}{dt^2}=0\,;\quad \frac{d^2z}{dt^2}=10\,. \qquad (6)$$

Отже, одержуємо такі залежності векторів швидкості та прискорення від часу:

$$\vec{v}(t)=(4t+3)\vec{i}+5\vec{j}+10t\vec{k}\ (\text{м/с}). \qquad (7)$$

$$\vec{a}(t)=4\vec{i}+10\vec{k}\ (\text{м/с}^2). \qquad (8)$$

Середня швидкість за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\vec{v}_{\text{ср}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}=\frac{(2t_2^2+3t_2+1-2t_1^2-3t_1-1)\vec{i}+(5t_2+3-5t_1-3)\vec{j}+(5t_2^2-5t_1^2)\vec{k}}{\Delta t}=$$

$$=\frac{22\vec{i}+10\vec{j}+40\vec{k}}{2}=11\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}\ (\text{м/с}).$$

Модуль вектора середньої швидкості

$$v_{\text{ср}}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{(11)^2+(5)^2+(20)^2}=23{,}4\ \text{м/с}.$$

Середнє прискорення за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\vec{a}_{\text{ср}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{(4t_2+3-4t_1-3)\vec{i}+(5-5)\vec{j}+(10t_2-10t_1)\vec{k}}{\Delta t}=$$

$$=\frac{8\vec{i}+27\vec{k}}{2}=4\vec{i}+13{,}5\vec{k}.$$

Модуль вектора середнього прискорення:

$$a_{\text{ср}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{(4)^2+(13{,}5)^2}=14{,}1\ \text{м/с}^2.$$

Відповідь: $\vec{v}(t)=(4t+3)\vec{i}+5\vec{j}+10t\vec{k}$; $\vec{a}(t)=4\vec{i}+10\vec{k}$; $v_{\text{ср}}=23{,}4$ м/с; $a_{\text{ср}}=14{,}1$ м/с^2.

Приклад 1.1.2. Тіло обертається навколо нерухомої осі так, що залежність кута повороту від часу t задається законом $\varphi = 6\pi t - 2\pi t^2$ (рад). Знайти: а) момент часу t, в який тіло зупиниться; б) кількість обертів N, здійснених тілом до зупинки; в) середню кутову швидкість за час руху тіла.

Дано:	Розв'язання
$\varphi = 6\pi t - 2\pi t^2$ (рад)	Миттєве значення кутової швидкості:
$t_з$ – ? $\omega_{ср}$ –? N – ?	$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(6\pi t - 2\pi t^2) = 6\pi - 4\pi t. \quad (1)$$ Тіло зупиниться в момент часу, коли його кутова швидкість стане рівною нулю: $$\omega = 6\pi - 4\pi t_з = 0. \quad (2)$$

Звідки

$$4\pi \cdot t_з = 6\pi. \quad (3)$$

Тоді момент часу зупинки

$$t_з = 1{,}5\ \text{с}. \quad (4)$$

За цей час тіло здійснило кутове зміщення:

$$\varphi = 2\pi(3t_з - 2t_з^{\ 2}) = 2\pi(3 \cdot 1{,}5 - 2{,}25) = 4{,}5\pi\ \text{рад}. \quad (5)$$

Кількість обертів, здійснених тілом до зупинки

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{4{,}5\pi}{2 \cdot \pi} = 2{,}25. \quad (6)$$

Середня кутова швидкість

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t_з) - \varphi(t=0)}{t_з - 0} = \frac{4{,}5\pi}{1{,}5} = 3\pi\ \text{рад/с}. \quad (7)$$

Відповідь: $t_з = 1{,}5$ с; $N = 2{,}25$; $\omega_{ср} = 3\pi$ рад/с.

Приклад 1.1.3. Тіло кинуте горизонтально із швидкістю $v_0 = 30$ м/с. В момент кидання воно знаходилось на висоті $h = 50$ м над поверхнею землі. Визначити: а) яким буде тангенціальне та нормальне прискорення тіла через 3 с після початку руху; б) кут між вектором швидкості та вектором повного прискорення в цей момент часу; в) радіус кривизни траєкторії тіла, в момент торкання тілом землі.

Дано:	Розв'язання
$v_0 = 30$ м/с $t = 3$ с $h = 50$ м $g = 10$ м/с^2	Зробимо схематичне креслення за умовою задачі. Виберемо систему координат так, як показано на рисунку. Зв'яжемо систему координат XOY з точкою кидання.
a_τ — ? a_n — ? φ — ? R_n — ?	Рух тіла, кинутого горизонтально, можна розглядати як суперпозицію двох незалежних рухів: рівномірного із швидкістю v_0 вздовж осі OX та рівноприскореного без початкової швидкості вздовж осі OY.

Отже

$$v_x = v_{0x} = v_0 = \text{const}; \tag{1}$$

$$v_y = v_{0y} + gt, \ (v_{0y} = 0); \tag{2}$$

де v_x, v_y — проекції миттєвої швидкості на координатні осі.

Модуль миттєвої швидкості в довільний момент часу можна визначити як

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}. \tag{3}$$

Тангенціальне прискорення за визначенням

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_0^2 + (gt)^2}\right) = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}. \tag{4}$$

Його миттєве значення в момент часу $t = 3$ с

$$a_\tau = \frac{100 \cdot 3}{\sqrt{900 + 100 \cdot 9}} = 7{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення тіла в криволінійному русі складається з нормального та тангенціального прискорень і в даному випадку в будь-який момент часу рівне прискоренню вільного падіння g:

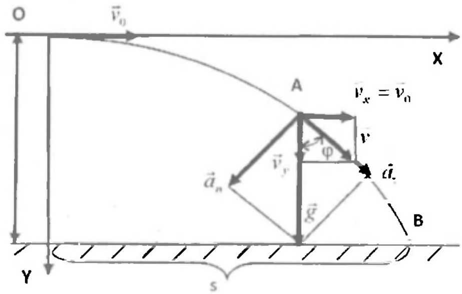

Рис. Приклад 1.1.3

$$\bar{a}_\tau + \bar{a}_n = \bar{g}. \qquad (5)$$

Для модулів цих величин справедливе співвідношення:

$$\sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = g. \qquad (6)$$

Звідки

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}. \qquad (7)$$

Для моменту часу t = 3 с модуль нормального прискорення рівний:

$$a_n = \sqrt{100 - (7{,}1)^2} = 7{,}1\,\text{м/с}^2.$$

Тангенс кута між вектором швидкості $\bar{v}$ та вектором повного прискорення $\bar{g}$ (див. *рис.* Приклад 1.1.3.)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_0}{gt} = \frac{30}{10 \cdot 3} = 1.$$

Тоді кут між вектором швидкості та вектором повного прискорення в момент часу t = 3 с

$$\varphi = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Для визначення радіусу R кривизни траєкторії використаємо формулу зв'язку цієї величини із a_n:

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \qquad (8)$$

Звідки

$$R = \frac{v^2}{a_n}. \qquad (9)$$

Враховуючи вирази (3), (4) та (7) одержимо залежність $R(t)$:

$$R = \frac{v_0^2 + (gt)^2}{\sqrt{g^2 - \dfrac{g^4 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2}}}. \qquad (10)$$

Час падіння тіла знайдемо з умови, що

$$h = \frac{g t_n^2}{2}. \qquad (11)$$

Звідки

$$t_n = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{10}} = 3{,}16 \text{ с.}$$

Підставивши в (10) час падіння тіла t_n = 1,4 с, одержимо значення радіусу кривизни траєкторії тіла в момент торкання ним землі (в точці В траєкторії).

$$R_{кр} = \frac{900 + (10 \cdot 1{,}4)^2}{\sqrt{100 - \frac{(10)^4 \cdot (1{,}4)^2}{900 + 100 \cdot (1{,}4)^2}}} = 138 \text{ м.}$$

Відповідь: a_τ = 7,1 м/с^2 ; a_n = 7,1 м/с^2; $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $R_{кр}$ = 138 м.

Приклад 1.1.4. Дві прямі дороги перетинаються під кутом α = 60°. Від їх перехрестя віддаляються дві машини: одна із швидкістю 40 км/год, інша — із швидкістю 80 км/ год. Знайти швидкість першої машини відносно другої.

Дано:	Розв'язання
α = 60° v_1 = 40 км/год v_2 = 80 км/год ——— $v_в$ — ?	Зробимо схематичне креслення за умовою задачі. Виберемо дві системи відліку, як це вказано на рисунку. Одна з них XOY нерухома відносно землі і її початок (точка О) співпадає з перехрестям доріг, а вісь ОХ напрямлена вздовж дороги, по якій рухається перша машина.

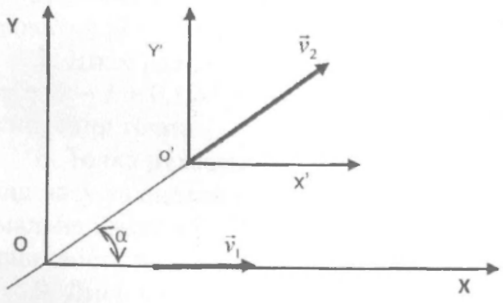

Рис. Приклад 1.1.4

Інша система відліку X'O'Y' рухома, пов'язана із другою машиною, а її координатні осі паралельні координатним осям нерухомої системи.

Швидкість першої машини в системі XOY — її абсолютна швидкість; швидкість руху системи відліку X′O′Y′, в якій друга машина нерухома, відносно системи XOY рівна $\vec{v}_2$ — це переносна швидкість руху, а швидкість руху першої машини відносно другої — відносна швидкість. За законом додавання швидкостей

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_в . \quad (1)$$

Звідки

$$\vec{v}_в = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 . \quad (2)$$

Запишемо вектори $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$ через їх проекції на координатні осі OX та OY:

$$\vec{v}_1 = v_1 \cdot \vec{i} . \quad (3)$$

$$\vec{v}_2 = v_2 \cos\alpha \cdot \vec{i} + v_2 \sin\alpha \cdot \vec{j} . \quad (4)$$

$$\vec{v}_в = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (v_1 - v_2\cos\alpha)\cdot \vec{i} - v_2 \sin\alpha \cdot \vec{j} . \quad (5)$$

Модуль цієї швидкості рівний

$$v_в = \sqrt{(v_1 - v_2\cos\alpha)^2 + (v_2 \sin\alpha)^2} . \quad (6)$$

Її чисельне значення

$$v_в = \sqrt{(40 - 80\cdot\cos 60°)^2 + (80 \sin 60°)^2} = 69,3 \text{ км/год.}$$

Ми визначили відносну швидкість руху машини для випадку, коли вектори $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$ напрямлені так, як зображено на рисунку. Умова задачі допускає, що кут між векторами $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$ може бути рівним $\alpha' = 120°$ (вектор $\vec{v}_2$ напрямлений протилежно зображеному на рисунку). В цьому випадку відносна швидкість машини

$$v_в' = \sqrt{(v_1 - v_2\cos\alpha')^2 + (v_2\sin\alpha')^2} =$$

$$= \sqrt{(40 - 80\cos 120°)^2 + (80 \sin 120°)^2} =$$

$$= \sqrt{6400 + 4800} = 105,8 \text{ км / год.}$$

Відповідь: $v_в$ = 69,3 км/год; $v'_в$ = 105,8 км/год.

ЗАДАЧІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ В АУДИТОРІЇ

1. Автобус рухається 1/3 хв по прямій до зупинки рівносповільнено, пройшовши при цьому 310 м. Його початкова швидкість 15 м/с. Знайдіть середню швидкість автобуса і доведіть, що його прискорення змінюється за напрямком.

2. Рух літака на прямолінійній ділянці траєкторії описується рівнянням $x = bt + ct^2$, де $b = 250$ м/с, $c = 5$ м/с^2. Визначити швидкість і прискорення літака через 5 с після початку руху.

3. Дві матеріальні точки рухаються відповідно до рівнянь $x_1 = a_1t + b_1t^2 + c_1t^3$ та $x_2 = a_2t + b_2t^2 + c_2t^3$, де $a_1 = 4$ м/с, $a_2 = 2$ м/с, $b_1 = 8$ м/с^2, $b_2 = 4$ м/с^2, $c_1 = -4$ м/с^3, $c_2 = 1$ м/с^3. У який момент часу прискорення цих точок будуть однаковими? Знайти швидкості точок у цей момент часу.

4. Рух електронного променя на екрані осцилографа описується рівняннями $x = at^2$, $y = b + ct^4$, де $a = 2$ м/с^2, $b = 4$ м, $c = 1$ м/с^4. Знайти рівняння траєкторії променя, яку спостерігає дослідник на екрані. Обчислити швидкість та прискорення електрона в момент часу $t = 2$ с.

5. Залежність радіус-вектора матеріальної точки від часу визначається рівнянням $\vec{r}\,(t) = 3t^2\vec{i} + (\vec{i} + 3\vec{j})t + 2\vec{i} + 3\vec{k}$ (м). Знайти :

а) модулі радіус-вектора, миттєвої швидкості та прискорення для моменту часу $t = 2$ с.

б) модуль переміщення та модуль середньої швидкості за проміжок часу 3 с від початку руху;

в) модуль середнього прискорення за цей же проміжок часу.

6. Шлях, пройдений точкою по колу радіусом 2 м, задається рівнянням $s = bt + ct^2$. Знайти кутову швидкість, кутове прискорення, нормальне, тангенціальне і повне прискорення точки через 1 с після початку руху, якщо $b = 1$ м/с, $c = 0{,}3$ м/с^2.

7. Диск радіусом $r = 20$ см обертається відповідно до рівняння $\varphi = 3 - t + 0{,}1\,t^3$. Визначте тангенціальне, нормальне і повне прискорення точок на краю диска в момент часу $t = 10$ с.

8. Точка рухається по колу радіусом $r = 2$ см. Залежність шляху від часу задається рівнянням $s = ct^3$, де $c = 0{,}1$ см/с^3. Знайти нормальне і тангенціальне прискорення точки в момент, коли лінійна швидкість точки $v = 0{,}3$ м/с.

9. Диск радіусом 0,1 м, що був у стані спокою, почав обертатися зі сталим кутовим прискоренням 0,5 рад/с^2. Чому дорівнює кут

повороту точок на краю диска через 2 с після початку обертання, а також їхнє тангенціальне, нормальне і повне прискорення?

10. Вал обертається зі сталою швидкістю, що відповідає частоті n = 180 об/хв. З деякого моменту вал гальмується і обертається рівносповільнено з кутовим прискоренням β = 3 рад/с^2. Через який час вал зупиниться? Скільки обертів він зробить до зупинки?

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Поступальний рух більярдної кулі можна описати рівняннями $x = t^3$, $y = 2t$. Знайти рівняння траєкторії кулі, її швидкість та прискорення в момент часу t = 0,8 с.

2. Матеріальна точка рухається в площині xy відповідно до рівнянь $x = a_1 + b_1t + c_1t^2$ і $y = a_2 + b_2t^2 + c_2t^3$, де b_1 = 7м/с, c_1 = –2 м/с^2, b_2= –1м/с^2, c_2 = 0,2 м/с^3. Знайти швидкість і прискорення точки в момент часу t = 5 с.

3. Матеріальна точка рухається за законом $\vec{r}(t) = A\sin(2t)\vec{i} + B\cos(2t)\vec{j}$, де А = 2,5 м, В = 2,2 м. Визначити вектор швидкості, вектор прискорення та траєкторію руху матеріальної точки.

4. Швидкість матеріальної точки змінюється за законом $\vec{v}(t) = (3t^2 - 4)\vec{i} - 5\sin(\frac{\pi}{3}t)\vec{j}$ (м/с). Визначити: а) закон руху матеріальної точки, якщо в початковий момент часу t = 0, вона знаходилась в початку координат; б) вектор переміщення за проміжок часу від t_1= 1 с до t_2= 3 с та його модуль; в) вектор середньої швидкості за цей проміжок часу та її модуль.

5. Початкова швидкість частинки $\vec{v}_0 = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ (м/с), кінцева $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ (м/с). Знайти: а) приріст швидкості $\Delta\vec{v}$, б) модуль приросту швидкості $|\Delta\vec{v}|$, в) приріст модуля швидкості Δv.

6. Точка рухається по колу так, що залежність шляху від часу задається рівнянням $s = a - bt + ct^2$, де b = 2 м/с і c = 1 м/с^2. Знайти лінійну швидкість точки, її тангенціальне, нормальне і повне прискорення через 3 с після початку руху, якщо при t_1 = 2 с нормальне прискорення a_{n1}= 0,5 м/с^2.

7. Колесо радіусом r = 0,1 м обертається так, що залежність кута повороту радіуса від часу задається рівнянням $\varphi = a + bt + ct^3$, де

b = 2 рад/с і c = 1 рад/с^3. Для точок, які лежать на ободі колеса, знайти через 2 с від початку руху: кутову швидкість, лінійну швидкість, кутове, тангенціальне і нормальне прискорення.

8. Вентилятор обертається зі швидкістю, яка відповідає 900 об/хв. Після вимикання вентилятор, рухаючись рівно сповільнено, зробив до зупинки 75 обертів. Скільки часу тривало сповільнення вентилятора до повної його зупинки?

9. В першому наближенні можна вважати, що електрон в атомі водню рухається по коловій орбіті зі сталою швидкістю v = 2,2·10^6 м/с. Знайти кутову швидкість обертання електрона і його нормальне прискорення. Радіус орбіти прийняти рівним r = 0,5·10^{-10} м.

10. Диск радіуса R = 20 см котиться по горизонтальній поверхні. Швидкість центра диску стала і рівна V = 10 м/с. Визначити: а) модуль та напрямки швидкості точок А, Б, С, Д, що знаходяться на перетині ободу диска з горизонтальною і вертикальною осями, відносно нерухомого спостерігача; б) кутову швидкість диску; в) радіус кривизни траєкторії точки А, якою обід диску торкається горизонтальної поверхні в початковий момент часу.

1.2. ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

ОСНОВНІ ЗАКОНИ ТА ФОРМУЛИ

▶ Імпульс тіла (матеріальної точки)

$$\vec{p} = m\vec{v}\,. \qquad (1.2.1)$$

Імпульс системи тіл

$$\vec{p}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i\,, \qquad (1.2.2)$$

де $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ — імпульс і-того тіла; N — кількість тіл у системі.

▶ Основний закон динаміки поступального руху (другий закон Ньютона)

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,, \qquad (1.2.3)$$