

Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикла

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ДОЛГОВРЕМЕННАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ
ЗЕРНИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ
ПРИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. A theory of long-term damageability is suggested for the granular composite materials with allowance for temperature effect. The process of damage of composite components is modeled by forming the stochastically arranged micropores. A criterion of destruction of unit microvolume is characterized by its long-term strength, which is described by dependence of brittle fracture duration on the degree of closeness of equivalent stress to its limit value. The last characterizes the short-time damage by Schleicher-Nadai criterion, which is assumed to be the stochastic function of coordinates. For arbitrary moment, the equation for balance of damage (porosity) of components with allowance for temperature constituent is formulated. The algorithm is built for evaluation of dependences of microdamage of granular material components, microstresses on time. The corresponding curves are obtained. An effect of temperature on curves of macrodeformation and damage of material is studied.

Key words: granular composite material, stochastic structure, temperature effect, long-term damageability, effective characteristics, balance equation of porosity.

Введение.

Образование и развитие во времени рассеянных микроповреждений при нагружении материалов и элементов конструкций приводит, как правило, к образованию магистральных трещин. Это является одной из возможных причин разрушения материалов и элементов конструкций. Микроповреждения представляют собой хаотически расположенные разрушенные микрообъемы материала, которые полностью или частично утратили несущую способность, что приводит к уменьшению эффективной или несущей части материала, оказывающей сопротивление нагрузкам. Микроповреждения могут возникать в процессе деформирования вследствие того, что микронапряжения достигают локальных границ прочности, или вследствие уменьшения локальных границ прочности под влиянием климатических и радиационных факторов. Ионизирующее облучение влияет на накопление микроповреждений в сооружениях также вследствие объемных деформаций, подобных температурным.

Как свидетельствуют экспериментальные данные и наблюдения за работой элементов конструкций и сооружений, повреждаемость может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений или деформаций в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте повреждений во времени после приложения нагрузки. В [8 – 13] предложена структурная теория кратковременной микроповреждаемости однородных и композитных материалов, в основу которой положены уравнения механики микронеоднородных тел стохастической структуры и моделирование рассеянных микроповреждений системой квазисферических микропор [5]. Длительную повреждаемость обычно рассматривают как результат процесса накопления во времени рассеянных микроповреждений в виде микропор и микротрещин. На микроскопическом уровне прочность материала является неоднородной, т.е.

предел мгновенной прочности и кривые длительной прочности микрообъема материала являются случайными функциями координат, описываемыми определенными плотностями или функциями распределения. При воздействии на макрообразец нагрузок часть микрообъемов, предел прочности которых ниже возникших напряжений, разрушится, т.е. на их месте образуются микротрещины или микрополости. На тех микроучастках, где напряжения меньше пределов прочности, но близки к ним, разрушение происходит через некоторый промежуток времени, который зависит от степени близости эквивалентного напряжения к пределу микропрочности.

В [8 – 13] на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред построена теория длительной повреждаемости однородных и зернистых композитных материалов. В настоящей статье исследуется влияние температурных воздействий на деформирование и длительную повреждаемость зернистых композитных материалов. В основу структурной теории длительной повреждаемости композитных материалов положены уравнения термоупругости микронеоднородных сред стохастической структуры. Процесс повреждаемости компонентов зернистого композита моделируется разрушением рассеянных микрообъемов компонентов материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема компонента характеризуется его длительной прочностью, описываемой дробно-степенной или экспоненциально-степенной функцией долговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность компонента по критерию Шлейхера – Надаи. Предел его кратковременной прочности принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается степенной функцией распределения на некотором отрезке или распределением Вейбулла. Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние зернистого композита с системой стохастически расположенных микроповреждений в компонентах определяются на основе стохастических уравнений термоупругости пористых сред. Исходя из свойств функций распределения и условия эргодичности случайного поля кратковременной микропрочности, а также зависимости времени хрупкого разрушения микрообъема от его напряженного состояния и кратковременной микропрочности, сформулированы для заданных макродеформаций и произвольного момента времени уравнения баланса поврежденности (пористости) компонентов композита, учитывающие температурную составляющую. Зависимости макронапряжения – макродеформации для зернистого материала с пористыми компонентами и уравнения баланса пористости компонентов описывают совместные процессы деформирования и длительной повреждаемости композита, происходящие во времени, что приводит к снижению макронапряжений при заданных макродеформациях. На основе метода итераций построены алгоритмы вычисления зависимостей микроповреждаемости компонентов зернистого материала от времени, макронапряжений от времени, а также приведены соответствующие кривые в случае дробно-степенной и экспоненциально-степенной функций микродолговечности. Исследовано влияние температурных воздействий на кривые макродеформирования и повреждаемости материала.

§1. Рассмотрим матричный композитный материал зернистой структуры, включения и матрица которого имеют пористость, соответственно, p_1 и p_2 . Обозначим модули объемного сжатия и сдвига, коэффициенты температурных напряжений и деформаций материалов скелетов включений и матрицы, соответственно, $K_1, \mu_1, \beta_1, \alpha_1$ и $K_2, \mu_2, \beta_2, \alpha_2$, а объемные содержания пористых включений и пористой матрицы, соответственно, c_1, c_2 . Макронапряжения $\langle \sigma_{jk} \rangle$ в композите связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температура θ соотношениями

$$\langle \sigma_{jk} \rangle = (K^* - \frac{2}{3} \mu^*) \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{jk} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{jk} \rangle - \beta^* \theta \delta_{jk}, \quad (1.1)$$

где эффективные модули объемного сжатия K^* и сдвига μ^* , коэффициенты температурных напряжений β^* и деформаций α^* определяются согласно теории пористых сред [2, 6, 7] через соответствующие модули и температурные коэффициенты пористых зерен $K_{1p}, \mu_{1p}, \beta_{1p}, \alpha_{1p}$ и пористой матрицы $K_{2p}, \mu_{2p}, \beta_{2p}, \alpha_{2p}$ формулами

$$K^* = c_1 K_{1p} + c_2 K_{2p} - \frac{c_1 c_2 (K_{1p} - K_{2p})^2}{c_1 K_{2p} + c_2 K_{1p} + n_c}; \quad \mu^* = c_1 \mu_{1p} + c_2 \mu_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\mu_{1p} - \mu_{2p})^2}{c_1 \mu_{2p} + c_2 \mu_{1p} + m_c};$$

$$\beta^* = c_1 \beta_{1p} + c_2 \beta_{2p} - \frac{c_1 c_2 (K_{1p} - K_{2p})(\beta_{1p} - \beta_{2p})}{c_1 K_{2p} + c_2 K_{1p} + n_c}; \quad \alpha^* = \frac{\beta^*}{3K^*};$$

$$n_c = \frac{4}{3} \mu_c; \quad m_c = \frac{(9K_c + 8\mu_c) \mu_c}{6(K_c + 2\mu_c)}, \quad (1.2)$$

причем

$$K_c = c_1 K_{1p} + c_2 K_{2p}; \quad \mu_c = c_1 \mu_{1p} + c_2 \mu_{2p}, \quad (1.3)$$

если жесткость пористой матрицы больше жесткости пористых включений, и

$$K_c = \frac{K_{1p} K_{1p}}{c_1 K_{1p} + c_2 K_{1p}}; \quad \mu_c = \frac{\mu_{1p} \mu_{1p}}{c_1 \mu_{1p} + c_2 \mu_{1p}} \quad (1.4)$$

– в противном случае.

Эффективные модули и температурные коэффициенты пористых включений $K_{1p}, \mu_{1p}, \beta_{1p}, \alpha_{1p}$ и матрицы $K_{2p}, \mu_{2p}, \beta_{2p}, \alpha_{2p}$ согласно [2, 6, 7] определяются формулами

$$K_{ip} = \frac{4K_i \mu_i (1-p_i)^2}{4\mu_i + (3K_i - 4\mu_i)p_i}; \quad \mu_{ip} = \frac{(9K_i + 8\mu_i) \mu_i (1-p_i)^2}{9K_i + 8\mu_i - (3K_i - 4\mu_i)p_i};$$

$$\beta_{ip} = \frac{4\beta_i \mu_i (1-p_i)^2}{4\mu_i + (3K_i - 4\mu_i)p_i}; \quad \alpha_{ip} = \frac{\beta_{ip}}{3K_{ip}} = \frac{\beta_i}{3K_i} \quad (i=1, 2). \quad (1.5)$$

Примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала i -компонента в форме Шлейхера – Надаи [3]

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle = k_i \langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle = (\langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle' \langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle')^{1/2} \quad (i=1, 2), \quad (1.6)$$

где $\langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle'$, $\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle$ – соответственно, девиатор и шаровая часть средних по неповрежденной части материала i -компонента напряжений; a_i – детерминированная постоянная; k_i – предельное значение величины $I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle$ для i -компонента, являющееся случайной функцией координат, причем средние по неповрежденной части материала i -компонента напряжения $\langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle$ определяются формулой [8]

$$\langle \sigma_{jk}^{i1} \rangle = \frac{1}{1-p_i} \langle \sigma_{jk}^i \rangle. \quad (1.7)$$

Если величина $I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle$ для некоторого микрообъема i -компонента не достигает соответствующего предельного значения k_i , то согласно критерию длительной прочности разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка

времени τ_k^i , длительность которого зависит от степени близости величины $I_{\langle\sigma\rangle}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} >$ к предельному значению k_i . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^i = \varphi_i(I_{\langle\sigma\rangle}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} >, k_i), \quad (1.8)$$

причем $\varphi_i(k_i, k_i) = 0$, $\varphi_i(0, k_i) = \infty$ согласно (1.6).

Одноточечную функцию распределения $F_i(k_i)$ предела прочности k_i микрообъема неповрежденной части материала i -компонента можно аппроксимировать степенным законом на некотором отрезке

$$F_i(k_i) = \begin{cases} 0, & k_i < k_{0i}; \\ \left(\frac{k_i - k_{0i}}{k_{1i} - k_{0i}} \right)^{\beta_i}, & k_{0i} \leq k_i \leq k_{1i}; \\ 1, & k_i > k_{1i} \end{cases} \quad (1.9)$$

или распределением Вейбулла

$$F_i(k_i) = \begin{cases} 0, & k_i < k_{0i}; \\ 1 - \exp[-m_i(k_i - k_{0i})^{\beta_i}], & k_i \geq k_{0i}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Здесь k_{0i} – минимальная величина предельного значения k_i , с которого начинается разрушение в некоторых объемах i -компонента; k_{1i} , m_i , β_i – постоянные, выбираемые из условия аппроксимации разброса прочности в i -компоненте.

Примем, что случайное поле предела микропрочности i -компонента k_i является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами включений и расстояний между ними. Тогда имеет место свойство эргодичности, согласно которому функция распределения $F_i(k_i)$ определяет относительное содержание неразрушенной части материала i -компонента, в котором предел микропрочности меньше значения k_i . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle$ функция $F_i(I_{\langle\sigma\rangle}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} \rangle)$ определяет согласно (1.6), (1.9), (1.10), относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала i -компонента. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость i -компонента равной p_{0i} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости i -компонента при кратковременной повреждаемости

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i})F_i(I_{\langle\sigma\rangle}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} \rangle). \quad (1.11)$$

Инвариант девиатора тензора средних напряжений по неповрежденной части материала i -компонента $I_{\langle\sigma\rangle}^{i1}$ связан с инвариантом девиатора средних напряжений в i -компоненте $I_{\langle\sigma\rangle}^i = (\langle \sigma_{jk}^i \rangle' \langle \sigma_{jk}^i \rangle')^{1/2}$ и инвариантом девиатора средних деформаций в i -компоненте $I_{\langle\varepsilon\rangle}^i = (\langle \varepsilon_{jk}^i \rangle' \langle \varepsilon_{jk}^i \rangle')^{1/2}$ зависимостями

$$I_{\langle\sigma\rangle}^{i1} = \frac{I_{\langle\sigma\rangle}^i}{1 - p_i}; \quad I_{\langle\sigma\rangle}^i = 2\mu_{ip} I_{\langle\varepsilon\rangle}^i, \quad (1.12)$$

а шаровые части тензора средних напряжений по неповрежденной части материала i -компонента $\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle$ связаны с шаровыми частями тензора средних напряжений в i -компоненте $\langle \sigma_{rr}^i \rangle$ и шаровыми частями средних деформаций в i -компоненте $\langle \varepsilon_{rr}^i \rangle$ зависимостями

$$\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle = \frac{1}{1-p_i} \langle \sigma_{rr}^i \rangle; \quad \langle \sigma_{rr}^i \rangle = 3(K_{ip} \langle \varepsilon_{rr}^i \rangle - \beta_{ip} \theta). \quad (1.13)$$

Инварианты девиаторов средних деформаций в компонентах $I_{\langle \varepsilon \rangle}^i$ определяются через инвариант девиатора макродеформаций $I_{\langle \varepsilon \rangle} = (\langle \varepsilon_{jk} \rangle' \langle \varepsilon_{jk} \rangle')^{1/2}$ соотношениями

$$I_{\langle \varepsilon \rangle}^i = (-1)^{i+1} \frac{\mu^* - \mu_{(3-i)p}}{c_i(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_{\langle \varepsilon \rangle}, \quad (1.14)$$

а шаровые части средних деформаций в i -компоненте $\langle \varepsilon_{rr}^i \rangle$ связаны с шаровыми частями средних деформаций в композите $\langle \varepsilon_{rr} \rangle$ и температурой θ зависимостями

$$\langle \varepsilon_{rr}^i \rangle = (-1)^{i+1} \frac{(K^* - K_{(3-i)p}) \langle \varepsilon_{rr} \rangle - (\beta^* - c_1 \beta_{1p} - c_2 \beta_{2p}) \theta}{c_k(K_{1p} - K_{2p})}. \quad (1.15)$$

Поэтому с учетом соотношений (1.12) – (1.15) в уравнении баланса пористости i -компонента (1.11) при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ и температуре θ выражение $I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle$ определяется формулами

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} = (-1)^{i+1} \frac{2\mu_{ip}}{1-p_i} \frac{\mu^* - \mu_{(3-i)p}}{c_i(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_{\langle \varepsilon \rangle}; \quad (1.16)$$

$$\langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle = \frac{\langle \sigma_{rr}^i \rangle}{1-p_i}; \quad \langle \sigma_{rr}^i \rangle = 3K_{ip} \langle \varepsilon_{rr}^i \rangle - \beta_{ip} \theta;$$

$$\langle \varepsilon_{rr}^i \rangle = (-1)^{i+1} \frac{(K^* - K_{(3-i)p}) \langle \varepsilon_{rr} \rangle - (\beta^* - c_1 \beta_{1p} - c_2 \beta_{2p}) \theta}{c_k(K_{1p} - K_{2p})} \quad (1.17)$$

или с учетом (1.7) –

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} = (-1)^{i+1} \frac{2\mu_{ip}}{1-p_i} \frac{\mu^* - \mu_{(3-i)p}}{c_i(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_{\langle \varepsilon \rangle}; \quad \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle = 3 \frac{K_{ip} \langle \varepsilon_{rr}^i \rangle - \beta_{ip} \theta}{1-p_i};$$

$$\langle \varepsilon_{rr}^i \rangle = (-1)^{i+1} \frac{(K^* - K_{(3-i)p}) \langle \varepsilon_{rr} \rangle - (\beta^* - c_1 \beta_{1p} - c_2 \beta_{2p}) \theta}{c_k(K_{1p} - K_{2p})}. \quad (1.18)$$

Если напряжения в i -компоненте $\langle \sigma_{pq}^{i1} \rangle$ действуют в течение некоторого времени t , то согласно критерию длительной прочности (1.8) за это время в i -компоненте разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_i , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k^i = \varphi_i(I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle, k_i), \quad (1.19)$$

где инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{i1} + a_i \langle \sigma_{rr}^{i1} \rangle$ определяется выражениями (1.12) – (1.15).

Время τ_k^i хрупкого разрушения i -компонента для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} > > 0$. В этом случае функцию долговечности i -компонента $\varphi_i(I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} >, k_i)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью

$$\varphi_i(I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} >, k_i) = \tau_{0i} \left(\frac{k_i - I_{<\sigma>}^{i1} - a_i < \sigma_{rr}^{i1} >}{I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} > - \gamma_i k_i} \right)^{n_i} \quad (1.20)$$

$(\gamma_i k_i \leq I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} > \leq k_i, \gamma_i < 1),$

где некоторое характерное время τ_{0i} , показатель n_i и коэффициент γ_i определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности i -компонента.

Подставляя (1.20) в (1.17), приходим к неравенству

$$k_i \leq I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} > \frac{1 + \bar{t}_i^{1/n_i}}{1 + \gamma_i \bar{t}_i^{1/n_i}} \left(\bar{t}_i = \frac{t}{\tau_{0i}} \right). \quad (1.21)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_i(k_i)$, приходим к выводу, что функция $F_i[(I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} >) \psi_i(\bar{t}_i)]$, где

$$\psi_i(\bar{t}_i) = \frac{1 + \bar{t}_i^{1/n_i}}{1 + \gamma_i \bar{t}_i^{1/n_i}}, \quad (1.22)$$

определяет в момент времени \bar{t}_i относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала i -компонента. Тогда с учетом (1.7) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для i -компонента при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i}) F_i \left[(I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} >) \psi_i(\bar{t}_i) \right] \quad (1.23)$$

или с учетом (1.7) в виде

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i}) F_i \left[\frac{I_{<\sigma>}^i + a_i < \sigma_{rr}^i >}{1 - p_i} \psi_i(\bar{t}_i) \right], \quad (1.24)$$

где пористость i -компонента p_i является функцией безразмерного времени \bar{t}_i , а $I_{<\sigma>}^i + a_i < \sigma_{rr}^i >$ определяется выражениями (1.13) – (1.15).

Если время τ_k^i хрупкого разрушения i -компонента имеет конечное значение для произвольных величин $I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} >$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью

$$\varphi_i(I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} >, k_i) = \tau_{0i} \left\{ \exp m_i \left[\left(\frac{k_i}{I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} >} \right)^{n_i} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_{2i}}, \quad (1.25)$$

имеющей достаточное число постоянных τ_{0i} , m_i , n_i , n_{2i} для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (1.25) в (1.17), приходим к неравенству

$$k_i \leq (I_{<\sigma>}^{i1} + a_i < \sigma_{rr}^{i1} >) \left[1 + \frac{1}{m_i} \ln \left(1 + \bar{t}_i^{1/n_{2i}} \right) \right]^{1/n_i} \left(\bar{t}_i = \frac{t}{\tau_{0i}} \right). \quad (1.26)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_i(k_i)$, приходим к выводу, что функция $F_i[(I_{<\sigma>}^{i1} + a_i <\sigma_{rr}^{i1}>) \psi_i(\bar{t}_i)]$, где

$$\psi_i(\bar{t}_i) = \left[1 + \frac{1}{m_i} \ln \left(1 + \bar{t}_i^{1/n_{2i}} \right) \right]^{1/n_{1i}} \quad (1.27)$$

определяет в момент времени \bar{t}_i относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала i -компонента. Тогда с учетом (1.1) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для i -компонента при длительной повреждаемости (1.5) можно также представить в виде (1.24).

Уравнения баланса пористости (1.24) с учетом (1.12) – (1.15), (1.22) в начальный момент $\bar{t}_i = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала i -компонента. С ростом времени уравнения (1.21), (1.12) – (1.15), (1.22) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени.

§2. Обобщим описанную выше модель повреждаемости матричного композита зернистой структуры, предположив, что микроповреждения, образующиеся в его компонентах при нагружении, представляют собой поры, заполненные частицами разрушенного материала. Рассмотрим самый простой случай, когда частицы разрушенного материала не оказывают сопротивления на сдвиг и на всестороннее растяжение, а на всестороннее сжатие сопротивляются как неповрежденный материал. Это дает основание принять модуль сдвига разрушенного материала, заполняющего поры, равным нулю, а модуль объемного сжатия равным нулю при $<\sigma_{rr}^{i2}> \geq 0$ ($i=1, 2$) и равным соответствующему модулю неповрежденного компонента K_i ($i=1, 2$) при $<\sigma_{rr}^{i2}> < 0$ ($i=1, 2$), где $<\sigma_{rr}^{i2}>$ – напряжения в заполненных разрушенными частицами порах i -компонента. Тогда согласно §1 при $<\sigma_{rr}^{i2}> \geq 0$, т.е. если средние объемные напряжения в заполняющих поры частицах в i -компоненте являются растягивающими, эффективные модули и температурные коэффициенты пористых наполненных частицами разрушенного материала включений $K_{1p}, \mu_{1p}, \beta_{1p}, \alpha_{1p}$ и матрицы $K_{2p}, \mu_{2p}, \beta_{2p}, \alpha_{2p}$ определяются формулами (1.5). При $<\sigma_{rr}^{i2}> < 0$, т.е. если соответствующие напряжения являются сжимающими, имеем [9]

$$K_{ip} = K_i; \mu_{ip} = \frac{[9K_i + 8\mu_i(1-p_i)]\mu_i(1-p_i)^2}{9K_i + 8\mu_i - (3K_i + 4\mu_i)p_i - 4\mu_i p_i^2}; \beta_{ip} = \beta_i; \alpha_{ip} = \alpha_i \quad (i=1, 2). \quad (2.1)$$

Принимая критерий прочности в микрообъеме неповрежденной части материала i -компонента в форме Шлейхера – Надаи (1.6), приходим к уравнению баланса пористости (1.23), где $I_{<\sigma>}^{i1}$ определяется формулой (1.16), функция $\psi(\bar{t})$ – формулой (1.14) или (1.21), а для $<\sigma_{rr}^{i1}>$ имеем

$$<\sigma_{rr}^{i1}> = \begin{cases} \frac{1}{1-p_i} <\sigma_{rr}^i>, & <\sigma_{rr}^i> \geq 0; \\ <\sigma_{rr}^i>, & <\sigma_{rr}^i> < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $<\sigma_{rr}^i>$ – средние напряжения в i -компоненте, определяемые формулой (1.17).

При заданных макродеформациях $<\varepsilon_{jk}>$ и температуре θ с учетом соотношений (1.13), (1.15) условия $<\sigma_{rr}^{i1}> \geq 0$ и $<\sigma_{rr}^{i1}> < 0$ приводятся, соответственно, к виду

$$\langle \sigma_{rr}^i \rangle = 3(-1)^{i+1} K_{ip} \frac{(K^* - K_{(3-i)p}) \langle \varepsilon_{rr} \rangle - (\beta^* - c_1 \beta_{1p} - c_2 \beta_{2p})}{c_i(K_{1p} - K_{2p})} - \beta_{ip} \theta \geq 0; \quad (2.3)$$

$$\langle \sigma_{rr}^i \rangle = 3(-1)^{i+1} K_{ip} \frac{(K^* - K_{(3-i)p}) \langle \varepsilon_{rr} \rangle - (\beta^* - c_1 \beta_{1p} - c_2 \beta_{2p})}{c_i(K_{1p} - K_{2p})} - \beta_{ip} \theta < 0. \quad (2.4)$$

Учитывая соотношения (1.16), уравнение баланса пористости (1.23) при выполнении условия (2.3) приведем к виду (1.24), где эффективные модули и температурные коэффициенты пористых наполненных частицами разрушенного материала включений K_{1p} , μ_{1p} , β_{1p} , α_{1p} и матрицы K_{2p} , μ_{2p} , β_{2p} , α_{2p} определяются формулами (1.5). При выполнении условия (2.4) уравнение баланса пористости (2.21) приведем к виду

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i}) F_i \left[\left(\frac{I_{\langle \sigma \rangle}^i}{1 - p_i} + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle \right) \psi_i(\bar{t}_i) \right], \quad (2.5)$$

где эффективные модули и температурные коэффициенты пористых, наполненных частицами разрушенного материала включений K_{1p} , μ_{1p} , β_{1p} , α_{1p} и матрицы K_{2p} , μ_{2p} , β_{2p} , α_{2p} определяются формулами (2.1).

§3. На основе соотношений (1.2) – (1.5), (1.9), (1.10), (1.12) – (1.15), (1.24), (1.22) (или (1.27)) при $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle \geq 0$ и соотношений (1.2) – (1.4), (2.1), (2.2), (1.9), (1.10), (1.12) – (1.15), (2.2), (1.22) (или (1.27)) при $\langle \sigma_{rr}^2 \rangle < 0$ можно построить итерационный алгоритм для определения объемного содержания микроповреждений в компонентах и напряженно-деформированного состояния зернистого композита. С этой целью воспользуемся методом секущих [1].

Записав уравнение баланса пористости i -компонента (1.23) в виде

$$\varphi_i(p_i) = \{p_i - p_{0i} - (1 - p_{0i}) F_i [(I_{\langle \sigma \rangle}^i + a_i \langle \sigma_{rr}^i \rangle) \psi_i(\bar{t}_i)]\} = 0, \quad (3.1)$$

легко проверить, что корень p_i находится в интервале $[p_{0i}, 1]$, так как имеют место неравенства

$$\varphi_i(p_{0i}) < 0; \quad \varphi_i(1) > 0. \quad (3.2)$$

Поэтому нулевое приближение корня $p_i^{(0)}$ определяется формулой

$$p_i^{(0)} = \frac{a_i^{(0)} \varphi_i(b_i^{(0)}) - b_i^{(0)} \varphi_i(a_i^{(0)})}{\varphi_i(b_i^{(0)}) - \varphi_i(a_i^{(0)})}, \quad (3.3)$$

где $a_i^{(0)} = p_{0i}$, $b_i^{(0)} = 1$. Последующие приближения метода секущих определяются итерационным процессом

$$p_i^{(m)} = \frac{a_i^{(m)} \varphi_i(b_i^{(m)}) - b_i^{(m)} \varphi_i(a_i^{(m)})}{\varphi_i(b_i^{(m)}) - \varphi_i(a_i^{(m)})}, \quad (3.4)$$

$$a_i^{(m)} = a_i^{(m-1)}; \quad b_i^{(m)} = p_i^{(m-1)} \quad \text{при} \quad \varphi_i(a_i^{(m-1)}) \varphi_i(p_i^{(m-1)}) \leq 0;$$

$$a_i^{(m)} = p_i^{(m-1)}; \quad b_i^{(m)} = b_i^{(m-1)} \quad \text{при} \quad \varphi_i(a_i^{(m-1)}) \varphi_i(p_i^{(m-1)}) \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

который продолжается до выполнения условия

$$|\varphi_i(p_i^{(m)})| < \varepsilon, \quad (3.5)$$

где ε – точность вычисления корня.

На основе проведенных вычислений получены диаграммы макродеформирования зернистых композитных материалов при микроповреждениях в матрице для распределения Вейбулла (1.10) как для дробно-степенной функции долговечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (1.22), так и для экспоненциально-степенной функции долговечности $\psi(\bar{t})$, определяемой формулой (1.27). В качестве включений и матрицы приняты, соответственно, алюмоборосиликатное стекло с характеристиками [2]

$$E_1 = 70 \text{ ГПа}; \quad \nu_1 = 0,2; \quad \alpha_1 = 4,9 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1} \quad (3.6)$$

и объемным содержанием $c_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$ и эпоксидная матрица с характеристиками неповрежденной части [4]

$$E_2 = 3 \text{ ГПа}; \quad \nu_2 = 0,35; \quad \alpha_2 = 45 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}, \quad (3.7)$$

где E_1 и E_2 – модули Юнга, ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона, α_1 и α_2 – коэффициенты температурных деформаций неповрежденной части, соответственно, включений и матрицы, а также при

$$p_{02} = 0; \quad k_{02}/\mu_2 = 0,01; \quad m_2 = 1000; \quad \beta_2 = 2; \quad \sigma_{2p} = 0,011 \text{ ГПа} \quad (\sigma_{2p} = \sqrt{1,5} k_{20});$$

$$a_2 = 0,02; \quad \gamma_2 = 0,05; \quad n_{12} = 1; \quad \langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,002; \quad \theta = \pm 20^\circ \text{C}. \quad (3.8)$$

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0 \quad (3.9)$$

согласно (1.1) макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ композита связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{\mu^* (3K^* \langle \varepsilon_{11} \rangle - \beta^* \theta)}{K^* + 1/3 \mu^*}. \quad (3.10)$$

При этом в уравнении баланса пористости, которое записывается в виде (1.22), (1.16), (1.21), принимается

$$I_{\langle \varepsilon \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|3K^* \langle \varepsilon_{11} \rangle - \beta^* \theta|}{2(K^* + 1/3 \mu^*)}, \quad (3.11)$$

что эквивалентно условию (2.9).

На рис. 1 для дробно-степенной функции долговечности, определяемой формулой (1.22), изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 при различных значениях температуры θ и объемного содержания включений c_1 . На графиках сплошной линией показаны кривые при объемном содержании включений $c_1 = 0$, штриховой линией – при $c_1 = 0,25$, точечной линией – при $c_1 = 0,5$, штрихпунктирной линией – при $c_1 = 0,75$.

Такие же обозначения приняты и на рис. 2 – 4. Графики показывают, что величина температурного воздействия существенно влияет на кривые изменения микроповрежденности материала с течением времени. С уменьшением температуры θ и увеличением объемного содержания включений c_1 микроповрежденность матрицы p_2 возрастает.

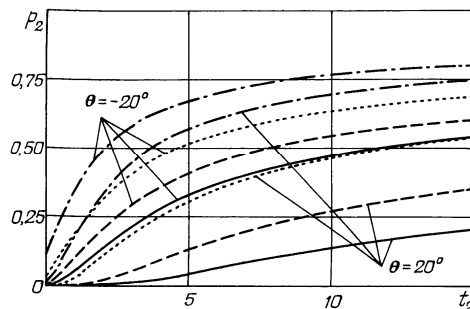


Рис. 1

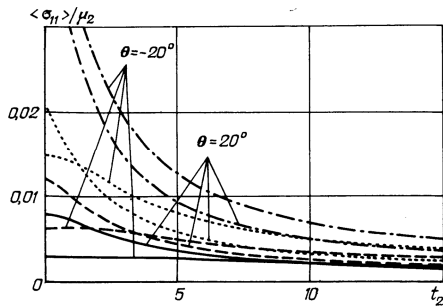


Рис. 2

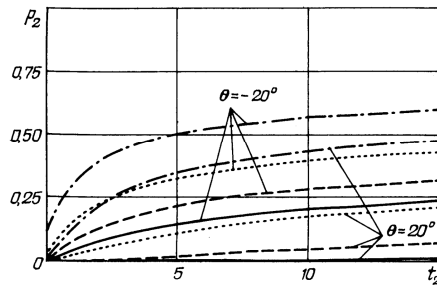


Рис. 3

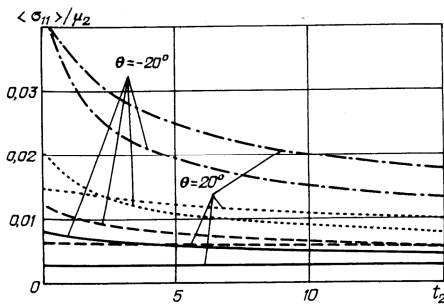


Рис. 4

На рис. 2 для дробно-степенной функции долговечности, определяемой формулой (1.22), изображены кривые зависимости макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от времени \bar{t}_2 при различных значениях температуры θ и объемного содержания включений c_1 . Как видим, величина температурного воздействия существенно влияет на кривые изменения напряжений с течением времени.

На рис. 3 изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 , а на рис. 4 показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от времени \bar{t}_2 для экспоненциально-степенной функции долговечности, определяемой формулой (1.27), при различных значениях температуры θ и объемного содержания включений c_1 . Как видим, кривые, описывающие накопление микрповреждений и изменения макронапряжений в зернистом композитном материале с течением времени качественно одинаковы для дробно-степенной и экспоненциально-степенной функций долговечности.

Заключение. Построена теория длительной повреждаемости зернистых композитных материалов с учетом температурных воздействий. Для заданных макродеформаций и произвольного момента времени сформулированы уравнения баланса поврежденности (пористости) компонентов композита, учитывающие температурную составляющую. Построены алгоритмы вычисления зависимостей микрповреждаемости компонентов зернистого материала от времени, макронапряжений от времени, а также приведены соответствующие кривые в случае дробно-степенной и экспоненциально-степенной функций микродолговечности. Исследовано влияние температурных воздействий на кривые макродеформирования и повреждаемости материала.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано теорію довготривалої пошкоджуваності для зернистих композитів з урахуванням температурного впливу. Процес пошкоджуваності компонентів композита моделюється утворенням в них стохастично розташованих мікропор. Критерій руйнування одиничного мікрооб'єму характеризується його довготривалою міцністю, обумовленою залежністю часу крихкого руйнування від ступеня близькості еквівалентного напруження до його граничного значення, що характеризує короткочасну міцність за критерієм Шлейхера – Надаї, яке приймається випадковою функцією координат. Для довільного моменту часу сформульовано рівняння балансу пошкоженості (пористості) компонентів з урахуванням температурної складової. Побудовано алгоритми обчислення залежностей мікропошкоджуваності зернистого матеріалу від часу, макронапружень від часу.

1. Березикович Я.С. Приближенные вычисления. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 462 с.
2. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. Механика материалов. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).

3. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
4. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
5. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
6. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микро-неоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 2. – С. 3 – 17.
7. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикула Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 3).
8. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 10. – P. 1035 – 1041.
9. Khoroshun L.P. Micromechanics of Short-Term Thermal Microdamageability // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 9. – P. 1158 – 1165.
10. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 2. Long-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 2. – P. 127 – 135.
11. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Mesomechanics of Deformation and Short-Term Damage of Linear Elastic Homogeneous and Composite Materials // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 6. – P. 591 – 620.
12. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Long-Term Damage of Particulate Composites with Stress-Rupture Microstrength Described by a Fractional-Power Function // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1075 – 1083.
13. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Micromechanics of Long-Term Damage of Particulate Composites with Unlimited Microdurability // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 11. – P. 1202 – 1212.

Поступила 01.04.2009

Утверждена в печать 15.06.2010