НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ **2 • 1998**

УДК 517.9:519.46

ПРО ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ $u_{00} = u\Delta u$

А.Ф. Баранник

Пед. ун-т,
Польща, Слупськ

І.І. Юрик

Укр. ун-т харч. технологій,
Україна, 252033, Київ, вул. Володимирська, 68
e-mail: nonlin@apmat.freenet.kiev.ua

New extended classes of exact solutions of the multidimensional nonlinear acoustic equation $u_{00} = u\Delta u$ are obtained.

Побудовані широкі класи точних розв'язків багатовимірного нелінійного рівняння акустики $u_{00} = u\Delta u$.

Багато рівнянь нелінійної акустики, теорії нелінійних хвиль є рівняннями вигляду

$$u_{00} = c\left(\vec{x}, u, \underset{1}{u}\right)\Delta u, \tag{1}$$

де $u = u(\vec{x})$, $\vec{x} = \left(x_0, \underbrace{x_1, ..., x_n}_{x}\right) \in R_{1,n}$, $c\left(\vec{x}, u, \underset{1}{u}\right)$ — довільна диференційовна функція,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad u_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2},$$

$\underset{1}{u}$ — сукупність всіх можливих похідних першого порядку. Групові властивості рівняння (1) вивчалися в [1].

Якщо $c\left(\vec{x}, u, \underset{1}{u}\right) = u$, то рівняння (1) набуває вигляду

$$u_{00} = u\Delta u. \tag{2}$$

Олвер і Розенау [2] побудували розв'язки одновимірного рівняння акустики (2), які не можна отримати з допомогою методу С. Лі. В роботі [3] досліджувалась умовна симетрія рівняння (2). Під умовною симетрією рівняння розуміють симетрію деякої підмножини розв'язків даного рівняння. В [1, 3] було знайдено 12 типів нееквівалентних операторів умовної симетрії рівняння (2), з допомогою яких були побудовані широкі класи точних розв'язків даного рівняння. Відзначимо, що анзаци, які відповідають операторам умовної симетрії, в багатьох випадках редукують вихідне нелінійне рівняння до лінійного.

В даній роботі, виходячи з міркувань, відмінних від концепції умовної симетрії, побудовано більш широкі класи точних розв'язків рівняння (2), ніж в [1, 3]. При побудові цих розв'язків суттєво використовувались розв'язки з відокремленими змінними [4]. Слід зауважити, що побудувати розв'язки з відокремленими змінними в багатьох випадках значно простіше, ніж знайти оператори умовної симетрії.

1. Розв'язки рівняння (2) шукаємо у вигляді $u = a(x_0)b(x)$, де функції $a(x_0)$ і $b(x)$ відмінні від констант. Підставляючи в рівняння (2), отримуємо $a''b = a^2 b\Delta b$. Тут a'' означає другу похідну функції $a(x_0)$ по змінній x_0. З останньої рівності випливає, що функції a'' і a^2 лінійно залежні, тобто $a'' = \alpha a^2$ для певного $\alpha \in R$. Знаходимо також, що $\Delta b = \alpha$. Якщо $\alpha = 0$, то $a = \mu x_0 + \nu$ і розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$u = (\mu x_0 + \nu)b(x), \tag{3}$$

де $\Delta b = 0$.

Якщо $\alpha \neq 0$, то поклавши $a_1 = \dfrac{\alpha}{6}a$, $b_1 = \dfrac{6}{\alpha}b$, отримаємо $a_1'' = 6a_1^2$, $\Delta b_1 = 6$. Отже, у випадку $\alpha \neq 0$ розв'язки рівняння (2) мають вигляд

$$u = \left[\frac{3}{k}(x_1^2 + \cdots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\right]\wp(x_0), \tag{4}$$

$$u = \left[\frac{3}{2}(x_1^2 + \cdots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\right]x_0^{-2}, \tag{5}$$

де $1 \leq k \leq n$, $\wp(x_0)$ — функція Вейєрштрасса з інваріантами $g_2 = 0$, $g_3 = C_1$, $\Delta G_\alpha = 0$.

2. Узагальненням розв'язку (3) є розв'язок

$$u = (\mu x_0 + \nu)b(x) + b_1(x), \tag{6}$$

де $\Delta b = 0$, $\Delta b_1 = 0$.

Розв'язок (4) є частинним випадком більш загального розв'язку

$$u = \varphi(x)\wp(x_0) + G(x_0, x),$$

де

$$\varphi(x) = \frac{3}{k}(x_1^2 + \cdots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n).$$

Підставляючи його в рівняння (2), знаходимо

$$v_{00} = \varphi(x)\wp(x_0)\Delta v + 6\wp(x_0)v + v\Delta v. \tag{7}$$

Якщо функція v залежить тільки від x_0, то $v_{00} = 6\wp(x_0)v$, і маємо такий розв'язок рівняння (2):

$$u = \left[\frac{3}{k}(x_1^2 + \cdots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\right]\wp(x_0) + f(x_0), \tag{8}$$

де $f(x_0)$ є функцією Ламе [5].

Якщо функція v залежить від x_0 і x, то розв'язок рівняння (7) шукаємо у вигляді $v = a(x_0)b(x)$, де $a(x_0)$ і $b(x)$ відмінні від констант. Підставляючи його в рівняння (7), отримуємо

$$a''b = a(x_0)\wp(x_0)\varphi\Delta b + 6a(x_0)\wp(x_0)b + a^2(x_0)b\Delta b. \tag{9}$$

Рівність (9) означає, що функції a'', $a\wp$ і a^2 лінійно залежні. Якщо припускати, що функції $a\wp$ і a^2 лінійно залежні, то $a^2 = \alpha a\wp$, $\alpha \in R$, або $a = \alpha\wp$, і шуканий розв'язок можна зобразити у вигляді $u = \wp(x_0)d(x)$, тобто ми знаходимося в умовах п. 1. Тому можна вважати, що функції $a\wp$ і a^2 лінійно незалежні і, отже,

$$a'' = \alpha a^2 + \beta a\wp. \tag{10}$$

Підставляючи (10) в (9), знаходимо

$$(\alpha b - b\Delta b)a^2 + (\beta b - \varphi\Delta b - 6b)a\wp = 0.$$

Оскільки a^2 і $a\wp$ лінійно незалежні, то

$$\alpha b - b\Delta b = 0, \quad \beta b - \varphi\Delta b - 6b = 0. \tag{11}$$

З системи (11) випливає

$$\Delta b = \alpha, \quad \alpha\varphi = (\beta - 6)b.$$

Якщо $\alpha = 0$, то $\beta = 6$ і маємо такий точний розв'язок рівняння (2):

$$u = \left[\frac{3}{k}(x_1^2 + \cdots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\right]\wp(x_0) + \Phi_\alpha(x_1, \ldots, x_n)f(x_0), \tag{12}$$

де $1 \le k \le n$, $\Delta G_\alpha = 0$, $\Delta\Phi_\alpha = 0$, $f'' = 6\wp f$ є функцією Ламе.

Якщо $\alpha \neq 0$, то можна вважати, що $\alpha = 1$. Тому $\varphi = (\beta - 6)b$, звідки $\Delta\varphi = (\beta - 6)\Delta b$, тобто $\beta = 12$. Це означає, що $b = \dfrac{1}{6}\varphi$ і ми знаходимося в умовах п. 1.

Узагальненням розв'язку (5) є розв'язок

$$u = \left[\frac{3}{k}(x_1^2 + \cdots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\right]x_0^{-2} + \Phi_\alpha(x_1, \ldots, x_n)x_0^{-3}, \tag{13}$$

де $1 \le k \le n$, $\Delta G_\alpha = 0$, $\Delta\Phi_\alpha = 0$.

3. Розглянемо більш складний випадок, а саме, розв'язок рівняння (2) будемо шукати у вигляді

$$u = a(x_0)b(x) + c(x_0)d(x). \tag{14}$$

Якщо функції $a(x_0)$ і $c(x_0)$ лінійно залежні, то $c(x_0) = \alpha a(x_0)$, $\alpha \in R$, і тому $u = a(x_0)b_1(x)$, де $b_1(x) = b(x) + \alpha d(x)$, а цей випадок розглядався в п. 1. Отже, можна вважати, що функції $a(x_0)$ і $c(x_0)$ лінійно незалежні. З цієї ж причини функції $b(x)$ і $d(x)$ також лінійно незалежні. Підставляючи (14) в рівняння (2), знаходимо

$$a''b + c''d = a^2(b\Delta b) + ac(b\Delta b) + ac(d\Delta b) + c^2(d\Delta d). \tag{15}$$

Рівність (15) означає, що функції a^2, ac, c^2, a'', c'' лінійно залежні. Неважко показати, що з лінійної незалежності функцій a і c випливає лінійна незалежність функцій a^2, ac і c^2. Дійсно, якщо функції a^2, ac і c^2 лінійно залежні, то $\alpha a^2 + \beta ac + \gamma c^2 = 0$ для певних дійсних чисел α, β, γ, які одночасно не дорівнюють нулю. Припустимо, що $\alpha = 0$, тоді $\beta ac + \gamma c^2 = 0$, тобто $c(\beta a + \gamma c) = 0$. Звідси випливає, що $\beta a + \gamma c = 0$ і функції a і c

є лінійно залежними всупереч умові. Отже, $\alpha \neq 0$, а тому можна вважати, що $\alpha = 1$. Оскільки

$$a^2 + \beta ac + \gamma c^2 = \left(a + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)c^2 = 0,$$

то $\gamma - \dfrac{\beta^2}{4} = -\delta^2 < 0$. Внаслідок цього

$$a^2 + \beta ac + \gamma c^2 = \left(a + \frac{\beta}{2}c - \delta c\right)\left(a + \frac{\beta}{2}c + \delta c\right) = 0.$$

З останньої рівності отримуємо $a + \left(\dfrac{\beta}{2} - \delta\right)c = 0$ або $a + \left(\dfrac{\beta}{2} + \delta\right)c = 0$. Це означає, що a і c є лінійно залежними і ми знову приходимо до суперечності.

Припустимо, що лінійно незалежними є також функції a^2, ac, c^2 і a''. Тоді

$$c'' = \alpha a^2 + \beta ac + \gamma c^2 + \delta a'' \tag{16}$$

для певних α, β, γ, $\delta \in R$. Підставляючи (16) в (15), знаходимо коефіцієнт при a''. Він дорівнює $b + \delta d = 0$, тобто b і d є лінійно залежними, що суперечить припущенню. Одержана суперечність доводить, що система функцій a^2, ac, c^2 і a'' лінійно залежна. З тієї ж причини і система функцій a^2, ac, c^2 і c'' лінійно незалежна.

Нехай

$$a'' = \alpha a^2 + \beta ac + \gamma c^2, \quad c'' = \alpha_1 a^2 + \beta_1 ac + \gamma_1 c^2, \tag{17}$$

де α, β, γ, α_1, β_1, $\gamma_1 \in R$. Підставляючи (17) в (15) і враховуючи лінійну незалежність функцій a^2, ac і c^2, отримуємо

$$\begin{aligned} &\alpha b + \alpha_1 d = b\Delta b,\\ &\gamma b + \gamma_1 d = d\Delta d,\\ &\beta b + \beta_1 d = b\Delta d + d\Delta b. \end{aligned} \tag{18}$$

Помноживши обидві частини першого рівняння системи (18) на d^2, другого рівняння — на b^2, а третього — на bd, знайдемо

$$\beta b^2 d + \beta_1 b d^2 = \gamma b^3 + \gamma_1 b^2 d + \alpha b d^2 + \alpha_1 d^3. \tag{19}$$

З лінійної незалежності функцій b і d випливає лінійна незалежність функцій $b^2 d$, bd^2, b^3 і d^3. Тому з рівності (19) отримуємо $\beta = \gamma_1$, $\beta_1 = \alpha$, $\gamma = 0$, $\alpha_1 = 0$. Отже,

$$a'' = \alpha a^2 + \beta ac, \quad c'' = \alpha ac + \beta c^2. \tag{20}$$

В системі (20) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Позначимо $c_1 = \beta c$, $d_1 = \dfrac{1}{\beta}d$, тоді

$$a'' = \alpha a^2 + ac_1, \quad c_1'' = \alpha ac_1 + c_1^2, \quad \Delta d_1 = 1.$$

Це означає, що в системі (20) можна вважати $\beta = 1$. При такому значенні β система (20) має наступний розв'язок [5]:

$$a'' = a^2(x_0)\left(\int \frac{dx_0}{a^2(x_0)} + \alpha\right), \quad c(x_0) = a(x_0)\int \frac{dx_0}{a^2(x_0)}.$$

В результаті отримуємо такий розв'язок рівняння (2):

$$u = a(x_0)b(x) + d(x)a(x_0)\int \frac{dx_0}{a^2(x_0)}, \tag{21}$$

де

$$b(x) = \frac{\alpha}{2k}(x_1^2 + \cdots + x_k^2) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n),$$

$$d(x) = \frac{1}{2l}(x_1^2 + \cdots + x_l^2) + \Phi_\alpha(x_1, \ldots, x_n),$$

$1 \le k \le n$, $1 \le l \le n$, $\Delta G_\alpha = 0$, $\Delta\Phi_\alpha = 0$, а функція $a(x_0)$ є розв'язком рівняння

$$a'' = a^2(x_0)\left(\int \frac{dx_0}{a^2(x_0)} + \alpha\right).$$

1. *Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 400 p.
2. *Olver P., Rosenau Ph.* The constraction of special solutions to partial differential equations //Phys. Lett. A. – 1986. – **114**, № 3. – P. 107 – 112.
3. *Фущич В.И., Серов Н.И.* Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики //Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 17 – 21.
4. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. – М.: Мир, 1981. – 342 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

Одержано 05.04.98