

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

**ВСЕУКРАЇНСЬКА
НАУКОВО-МЕТОДИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ**

**СУЧАСНІ
НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ
ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
У ВИЩІЙ ШКОЛІ**

Київ УДУХТ 2001

ПРО ПІДАЛГЕБРИ АЛГЕБРИ $AC(1, N)$.

Юрик І.І. канд. фіз.-мат. наук

Український державний університет харчових технологій

Цілий ряд нелінійних рівнянь теоретичної і математичної фізики інваріантні відносно групи $C(1, n)$ конформних перетворень простору Мінковського $R_{1, n}$. Тому питання редукції і класифікації інваріантних розв'язків таких рівнянь тісно пов'язані з задачею дослідження підгрупової структури групи $C(1, n)$. Оскільки вивчення зв'язних підгруп групи Лі $C(1, n)$ зводяться до вивчення підалгебр відповідної алгебри Лі $AC(1, n)$, то ми приходимо до задачі класифікації підалгебр алгебри $AC(1, n)$. Підалгебри алгебри $AC(1, n)$ для невеликих розмірностей n вивчалися в ряді робіт (див. [1] і цитовану там літературу). В цих роботах класифікація підалгебр проводилась з точністю до спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів. На основі цієї класифікації неважко зробити класифікацію підалгебр за рангами.

В даній роботі запропоновано принципово новий метод класифікації підалгебр

алгебри $AC(1,n)$ довільної розмірності n за рангами, який не вимагає при цьому повної класифікації підалгебр алгебри $AC(1,n)$.

Алгебра Лі $AC(1,n)$ групи $C(1,n)$ конформних перетворень простору $R_{1,n}$ породжуються векторними полями [1]:

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad J_{0\alpha} = x_0 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_0}$$

$$J_{ab} = x_b \frac{\partial}{\partial x_a} - x_a \frac{\partial}{\partial x_b},$$

$$D = -x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - x_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$$K_\alpha = 2 g_\alpha^\beta x_\beta x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} g^{\beta\nu} x_\beta x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

де $\alpha=0, 1, \dots, n$; $a, b = 1, \dots, n$.

Нехай $O(2,n+1)$ - група ізометрій псевдоевклідового простору $R_{2,n+1}$ з метрикою ρ_{ab} ($a, b = 1, 2, \dots, n+3$), де $\rho_{11}=\rho_{22}=-\rho_{33}=\dots=-\rho_{n+3,n+3}=1$, $\rho_{ab}=0$ при $a \neq b$. Позначимо через I_{ab} матрицю порядку $n+3$, яка має одиницю на перетині a -го рядку і b -го стовпця, і нулі на всіх решта місця ($a, b = 1, \dots, n+3$). Базис алгебри $AO(2,n+1)$ утворюють матриці

$$\Omega_{12} = I_{12} - I_{21}, \quad \Omega_{ab} = -I_{ab} + I_{ba} \quad (a < b; a, b=3, \dots, n+3),$$

$\Omega_{ia} = -I_{ia} - I_{ai}$ ($i=1,2; a=3, \dots, n+3$). Вони зв'язані між собою такими комутаційними співвідношеннями:

$$[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = \rho_{ad} \Omega_{bc} + \rho_{bc} \Omega_{ad} - \rho_{ac} \Omega_{bd} - \rho_{bd} \Omega_{ac},$$

де $a, b, c, d=1, \dots, n+3$. Алгебра $AO(2,n+1)$ діє в псевдоевклідовому просторі $R_{2,n+1}$, який складається з $(n+3)$ -мірних стовпців, способом множення стовпця $X \in R_{2,n+1}$ зліва на матрицю $A \in AO(2,n+1)$. Базис $R_{2,n+1}$, елементи якого є одиничні стовпці, позначимо через $\{Q_1, \dots, Q_{n+3}\}$. Відображення $f: AO(2,n+1) \rightarrow AC(1,n)$ алгебри Лі $AO(2,n+1)$ на алгебру Лі $AC(1,n)$,

яке задається за допомогою таких

$$\begin{aligned} \text{співвідношень: } J_{\alpha\beta} &= f(\Omega_{\alpha+2,\beta+2}), & P_{\alpha} &= f(\Omega_{1,\alpha+2} - \Omega_{\alpha+2,n+3}), \\ K_{\alpha} &= f(\Omega_{1,\alpha+2} + \Omega_{\alpha+2,n+3}) \end{aligned} \quad (2),$$

$D = -f(\Omega_{1,n+3})$, є ізоморфізмом . Тому $AO(2,n+1)$ і $AC(1,n)$ можна ототожнювати . В результаті цього одержуємо два набори позначень для

одного і того ж базиса :

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha+2,\beta+2} &= J_{\alpha\beta}, & \Omega_{1,\alpha+2} &= \frac{1}{2}(P_{\alpha} + K_{\alpha}), \\ \Omega_{\alpha+2,n+3} &= \frac{1}{2}(K_{\alpha} - P_{\alpha}), & \Omega_{1,n+3} &= -D, \end{aligned} \quad (3)$$

$$(\alpha < \beta; \alpha, \beta=0,1,\dots,n).$$

Задача класифікації підалгебр алгебри $AC(1,n)$ з точністю до $C(1,n)$ - спряженості рівносильна задачі класифікації підалгебр алгебри $AO(2,n+1)$ з точністю до $O(2,n+1)$ - спряженості . Це означає , що якщо Φ_1 - повний список $C(1,n)$ - неспряжених підалгебр алгебри $AC(1,n)$, то замінивши генератори в кожній підалгебрі $L \in \Phi_1$ відповідними генераторами алгебри $AO(2,n+1)$ згідно співвідношенням (3) , одержимо повний список Φ_2 $O(2,n+1)$ - неспряжених підалгебр алгебри $AO(2,n+1)$ і навпаки .

Група $O(2,n+1)$ породжує дію алгебри $AO(2,n+1)$ на просторі $R_{2,n+1}$. Це дозволяє множину всіх підалгебр алгебри $AO(2,n+1)$ розбити на такі три класи .

1). Перший клас складається із всіх підалгебр , які на мають в $R_{2,n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів .

2). Другий клас складається із підалгебр , які мають в $R_{2,n+1}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності одиниця . Цей клас підалгебри , які спряжені з підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$, що породжена генераторами $P_{\alpha}, J_{\alpha\beta}, D$, де $\alpha < \beta$

$\alpha, \beta=0,1,\dots,n$. Прикладом підалгебри алгебри $A\tilde{P}(1,n)$ є класична алгебра Галілея

$A\tilde{G}(n-1)$ породжена генераторами $P_a, \tilde{G}_a,$

$M, T, J_{ab},$ де $G_a = J_{0a} - J_{0n}, M = P_0 - P_n, T = \frac{1}{2}(P_0 - P_n), (a < b; a, b = 1, \dots, n-1).$

3). Третій клас складають підалгебри, які мають в $R_{2,n+1}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності два і нехають в $R_{2,n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів розмірності одиниця. Нехай $AOpt(1,n)$ - підалгебра алгебри $AC(1,n)$ породжена генераторами

$M, P_a, G_a, J_{ab}, C, S, T, Z$ ($a < b$ і $a, b = 1, \dots, n-1$), де

$$G_a = J_{0a} - J_{an}, \quad C = -(J_{0n} + D),$$

$$Z = J_{0n} - D, \quad S = \frac{1}{2}(K_0 + K_n).$$

Цей клас складають ті підалгебри алгебри $AOpt(1,n)$, які не спряжені

з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1,n)$.

В даній роботі будуть використовуватись такі позначення:

$$AO[r, s] = \langle J_{ab}; a, b = r, \dots, s \rangle;$$

$$AE[r, s] = \langle P_r, \dots, P_s \rangle \oplus AO[r, s];$$

$$AE_1[r, s] = \langle G_r, \dots, G_s \rangle \oplus AO[r, s];$$

$$\Phi(r, s, \gamma) = \langle G_r + \gamma P_r, \dots, G_s + \gamma P_s \rangle \oplus AO[r, s],$$

де $r \leq s, \gamma \in \mathbb{R}$. Позначимо через d_1, \dots, d_t натуральні числа, які задовільняють співвідношенням: $0 = d_1 < \dots < d_t = m \leq n$.

Підалгебри різних класів неспряжені відносно групи $C(1,n)$ - автоморфізмів і кожен з них інваріантний при дії любого автоморфізма. Тому доцільно проводити класифікацію підалгебр кожного класу окремо. При цьому виключимо із розгляду ті підалгебри алгебри $AC(1,n)$, які з точністю до спряженості містять $P_0 + P_n$ або P_0 .

Теорема 1. Нехай L - максимальна підалгебра рангу n алгебри $AC(1,n)$ першого класу і $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тоді L $C(1,n)$ - спряжена з однією із наступних алгебр:

1) $L_1 = \langle K_1 - P_1 \rangle$, якщо $n=1$;

2) $L_2 = \langle K_1 - P_1, \dots, K_n - P_n \rangle \oplus AO[1, n]$, якщо $n >$

3) $L_3 = \langle P_0 + K_0 \rangle$, якщо $n=1$;

4) $L_4 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, n]$, якщо $n \geq 2$;

- 5) $L_5 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, n-1] \oplus \langle K_n - P_n \rangle, n \geq 3$
- 6) $L_6 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, t-2] \oplus (\langle K_{t-1} - P_{t-1}, \dots, K_n - P_n \rangle \oplus AO[t-1, n]),$ де $t=4, \dots, n; n \geq 4;$
- 7) $L_7 = (\langle P_1 + K_1, \dots, P_{t-2} + K_{t-2} \rangle \oplus AO[1, t-2]) \oplus \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, t-1, \dots, n \rangle, t=4, \dots, n+1; n \geq 4;$
- 8) $L_8 = (\langle P_1 + K_1, \dots, P_{t-2} + K_{t-2} \rangle \oplus AO[1, t-2] \oplus \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, t-1, \dots, n-1 \rangle) \oplus \langle K_n - P_n \rangle,$ $t=4, \dots, n-1; n \geq 5;$
- 9) $L_9 = (\langle P_1 + K_1, \dots, P_{t-2} + K_{t-2} \rangle \oplus AO[1, t-2]) \oplus \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, t-1, \dots, t+s-2 \rangle \oplus (\langle K_{t+s-1} - P_{t+s-1}, \dots, K_n - P_n \rangle \oplus \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = n+s-1, \dots, n \rangle),$ $t=4, \dots, n-2, s=2, \dots, n-t; n \geq 6;$
- 10) $L_{10} = \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1 \rangle \oplus \langle K_n - P_n \rangle, n \geq 3;$
- 11) $L_{11} = \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = 0, 1, \dots, t-2 \rangle \oplus (\langle K_{t-1} - P_{t-1}, \dots, K_n - P_n \rangle \oplus \langle J_{\alpha\beta}; \alpha < \beta; \alpha, \beta = t-1, \dots, n \rangle), t=4, \dots, n; n \geq 4;$
- 12) $L_{12} = \langle P_0 + K_0 + \alpha(K_1 - P_1) \rangle, 0 < \alpha < 1, n=1.$
- 13) $L \oplus AO(2, k_1),$ де L - незвідна I-максимальна підалгебра рангу $k_2 - 2$ алгебри $AO(k_2), k_1 + k_2 = n+1, k_1 \geq 0, k_2 \geq 3;$
- 14) $\langle P_1 - K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 - K_0 - P_0, 2J_{12} + K_3 - P_3 \rangle.$

Теорема 2. Нехай L - максимальна підалгебра рангу n алгебри $AP(1, n)$ другого класу і $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. Тоді $L \subset C(1, n)$ - спряжена з однією із наступних алгебр:

I. Підалгебри алгебри $AP(1, n)$.

- 1) $AE[1, n] \quad (n \geq 1);$
- 2) $\langle J_{01} \rangle \quad (n=1);$
- 3) $AE[1, n-1] + \langle J_{0n} \rangle \quad (n > 1);$
- 4) $AO[0, n] \quad (n \geq 2);$
- 5) $AO[0, k] \oplus AE[k+1, n] \quad (k = 2, \dots, n-1; n \geq 3);$

II. Підалгебри алгебри $AP(1, n)$ з ненульовою проекцією на $\langle D \rangle$.

- 1) $AE[1, n-1] \oplus \langle D \rangle \quad (n \geq 2);$
- 2) $AE[1, n-1] \oplus \langle J_{0n} + \alpha D \rangle \quad (\alpha \neq 0; n \geq 2);$

- 3) $AE[1,n-1] \oplus \langle J_{0n} + D + M \rangle \quad (n \geq 2);$
- 4) $AO[1,n] \oplus \langle D \rangle;$
- 5) $(AO[1,m] \oplus AE[m+1,n]) \oplus \langle D \rangle; \quad (m=2,\dots,n-1; n \geq 3);$
- 6) $(AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-1]) \oplus \langle D \rangle; \quad (m=1,\dots,n-2; n \geq 3);$
- 7) $(AE_1[1,n-1] \oplus \langle D \rangle) \quad (n \geq 2);$
- 8) $(AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-1]) \oplus \langle J_{0n} + \alpha D \rangle; \quad (m=1,\dots,n-2; n \geq 3; \alpha \neq 0);$
- 9) $AE_1[1,n-1] \oplus \langle J_{0n} + \alpha D \rangle; \quad (n \geq 2; \alpha \neq 0);$
- 10) $(AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-1]) \oplus \langle J_{0n} + D + M \rangle; \quad (m=1,\dots,n-2; n \geq 3);$
- 11) $AE_1[1,n-1] \oplus \langle J_{0n} + D + M \rangle; \quad (n \geq 2);$
- 12) $(AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-1] \oplus \langle J_{0n} \rangle) \oplus \langle D \rangle; \quad (m=1,\dots,n-2; n \geq 3);$
- 13) $(AO[1,n-1] \oplus \langle J_{0n} \rangle) \oplus \langle D \rangle \quad (n \geq 2);$
- 14) $(AO[0,m] \oplus AE[m+1,n-1]) \oplus \langle D \rangle; \quad (m=2,\dots,n-2; n \geq 4);$
- 15) $AO[0,n-1] \oplus \langle D \rangle; \quad (n \geq 3);$
- 16) $(\langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE[2,n-1]) \oplus \langle J_{0n} - 2D \rangle; \quad (n \geq 3);$
- 17) $\langle G_1 + P_0 - P_2 \rangle \oplus \langle J_{02} - 2D \rangle; \quad (n=2);$
- 18) $(AO[0,m] \oplus AO[m+1,q] \oplus AE[q+1,n]) \oplus \langle D \rangle; \quad (m=2,\dots,n-2; q=m+1,\dots,n; n \geq 4);$

Література .

1. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений.- Киев: Наук. думка, 1991.- 304с.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1978.- 400с.