УДК 519.85

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ С ПОМОЩЬЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Листопад В.В, Шоха В.П.
Национальный университет пищевых технологий, г. Киев, Украина, vlystopad@ukr.net

Листопад В.В., Шоха В.П. Решение задач распределения ресурсов с помощью информационных технологий·

Анотация. Рассмотрено решение задачи о распределении ресурсов (однородных, пропорциональных и разных), которая встречается на производстве, в образовании, финансах, кадровом менеджменте, сельском хозяйстве и др. Процесс решения этой задачи реализуется с помощью функции-оптимизатора ПОИСК РЕШЕНИЯ с электронных таблиц Ms Excel.

Ключевые слова. Задача распределения ресурсов, ресурсы однородные, пропорциональные, разные.

Lystopad V.V., Shoha V.P. The solution of the problem of ressources distribution by the mean MS Excel

*Abstract.*The author studies the problem of the distribution of the ressources (similar, proportional and different) applied to production, education, finances, HR management, agriculture etc. MS Excel add "Solver" is applied.

Keywords. The task of resource allocation, resources are homogeneous, proportional, different

lystopad@ukr.net

1) Задача распределения однородных ресурсов

Транспортная задача является типичной задачей линейного программирования, поэтому ее решение можно получить обычным симплекс-методом и с помощью информационных технологий. Специфическая структура транспортной задачи дает возможность получать альтернативный метод отыскания оптимального плана в виде вычислительной процедуры, которая проще симплекс-метода. Транспортная задача принадлежит к типу распределительных задач линейного программирования. Экономическое содержание таких задач может рассматривать разнообразные проблемы, которые не связаны с перевозкой грузов, как, например, задачи оптимального размещения производства, складов, оптимального назначения, распределения ресурсов и др.[2, с.184-254]. Рассмотрим решение задачи распределения ресурсов (однородных, пропорциональных и разных) с помощью функции-оптимизатора ПОИСК РЕШЕНИЯ с электронных таблиц Ms Excel.

Классическая транспортная задача есть простой задачей распределения одного ресурса, где матрица D не задана и не применяется, потому, что ресурс у всех поставщиков один и тот же, полностью одинаковый, например, щебень или песок из карьера или финансы при расчетах и др.[1, с.151-157]

Постановка задачи

В реальных задачах распределения требование одинаковости есть серьезным недочетом, потому что для удовлетворения спроса применяются разные транспортные средства, оборудование, сырье и др. специфическими свойствами, технологическими и другими параметрами. Тот же песок, который развозится, не одинаковый на разных карьерах, он должен отличаться для приготовления бетона, раствора или для подсыпки дорог. Поэтому возникает необходимость учитывать эти особенности и для этого применяется матрица норм D, которая есть промежуточно-согласующим звеном между запасами ресурсов и спросом.

Рассмотрим три варианта использования этой матрицы для распределения ресурсов:

1) Однородных,
2) Пропорциональных,

3) Полностью разных.

Специфика задания однородных ресурсов: для каждого $i-$го ресурса дополнительно задано показатель, d_i который позволяет использовать однородные и полностью взаимозаменяемые ресурсы для однородных спросов, этот показатель указывает удельную норму применения, то есть, какой спрос может удовлетворить единица определенного ресурса. Приведем пример в котором ресурсами есть машино-часы универсальных машин, например экскаваторы, а показателем d_i - продуктивность $i-$й машины, которая не зависит от типа землекопных работ. В этой модели благодаря однородности ресурсов и работ матрица D представлена своим первым столбцом, то есть вектором.

Пример 1.

Найти оптимальное распределение трех машин (поставщиков) по четырем работам (потребители) , при условии поставки заданных объемов (спрос) и чтобы общая стоимость выполнения всех работ была минимальной.

Исходные данные:

- ✓ Матрица себестоимости работ (у.е./м^3)
- ✓ Вектор ресурсов машин (часы)
- ✓ Вектор продуктивности машин (м^3/час)
- ✓ Вектор объемов работ (м^3).

Таблица 1 – Данные примера 1

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Распределение машин по работам**						
2		Работа	Работа	Работа	Работа	Ресурс	Продуктивность
3		1	2	3	4	(часы)	($м^3$/час)
4	Машина 1	2	1	0,5	1,2	240	30
5	Машина 2	0,8	1,2	0,9	0,8	160	55
6	Машина 3	0,5	1	0,6	0,9	150	18
7	Объем $м^3$	500	2000	3000	8000		

Найти:

Прямая задача

- План распределения машино-часов по работам (часы);
- Общую стоимость выполнения всех работ (ЦФ).

Двоистая задача

Оценки:

- Ограничений продуктивностей машин;
- Объемов работ.

Математическая модель

I. Найти матрицу распределения $X=\left\{x_{ij}\right\}, i=1,2,3; j=\overline{1,4},$ где: $x_{ij}-$количество часов работы $i-$машины для выполнения $j-$й работы, такую, чтобы

II. Общие расходы $Z=2x_{11}+x_{12}+0,5x_{13}+\ldots+0,9x_{34}\rightarrow\min$

III. При ограничениях:

(3.1) для объемов работ:

$30x_{11}+55x_{21}+18x_{31}=5000$ (все машины на 1-й работе)

$30x_{12}+55x_{22}+18x_{32}=2000$ (все машины на 2-й работе)

$30x_{13}+55x_{23}+18x_{33}=3000$ (все машины на 3-й работе)

$30x_{14}+55x_{24}+18x_{34}=8000$ (все машины на 4-й работе)

(3.2) для ресурсов машин

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 240$ (рабочее время 1-й машины не превышает ее ресурса)

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 160$ (рабочее время 2-й машины не превышает ее ресурса)

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 240$ (рабочее время 3-й машины не превышает ее ресурса)

и предельных условий: все $x_{ij}\ge 0$.

Табличная модель

После ввода исходных данных формируем:

- Матрицу распределения;
- Вектор Всего, его элементы – суммы порядкам этой матрицы;
- Вектор Резерв, его элементы: разница Ресурс – Всего;
- Вектор-строка Выполнено, его элементы - сумма произведений столбцов матрицы распределения и вектора продуктивности;
- ЦФ – сумма произведений матриц распределения и затрат.

Определяем место для теневых цен, которые будут получены из *отчета по устойчивости.* Воспользуемся функцией ПОИСК РЕШЕНИЯ.

Таблица 2 – Результаты решения примера 1

10		Работа	Работа	Работа	Работа	Всего	Резерв	Т-цена
11		1	2	3	4	(часы)		
12	Машина 1	0,0	66,7	100,0	50,0	216,7	23,3	0
13	Машина 2	41,8	0	0	118,2	160,0	0,0	-1,4
14	Машина 3	150,0	0	0	0	150,0	0,0	-0,2
15	Выполнено $м^3$	5000	2000	3000	8000	379,7		
16	Т- цена	0,04	0,03	0,02	0,04			

<u>Прямая задача:</u> План (B12:E14), общие расходы 379,7 у.е. 1-я машина недогружена, ее резерв составляет 23,3 часа.

<u>Двоистая задача:</u>

- Теневые цены полностью использованных ресурсов2-й та 3-й машин (с минусом) указывают, что с увеличением их ресурса общие расходы уменьшатся, более «выгодной» есть вторая машина, которая могла бы работать с большим часовым ресурсом.
- Теневые цены объемов работ показывают, как возрастаю то общие расходы при увеличении объемов работ, 1-я и 4-я работы наиболее затратные.

2) Задача распределения пропорциональных ресурсов

<u>Особенности:</u> Ресурсы и спрос неоднородны, но матрица $D=\{d_{ij}\}$ с пропорциональными строчками устанавливает связи между единицами ресурсов и спроса. Элементы этой матрицы определяются следующим образом: $d_{ij}=k_i d_{1j}$, где масштабный коэффициент k_i - индекс $i-$го рядка (для первого рядка 0), с помощью которого простыми вычислениями можно определить все рядки матрицы по заданному первому (базисному) рядку. В примере ресурсами будут машино-часы универсальных , например, энергетических агрегатов, технологические параметры каждого $i-$го из них (продуктивность) относительно $j-$го спроса d_{ij} определяются с помощью параметров d_{1j} первого порядка «базисным» станком с учетом соответствующего $i-$го индекса k_i.

Пример 2.

Найти оптимальное распределение троих станков (поставщики) для изготовления четырьох продуктов (потребители) , при условии выполнения запланированных объемов (спрос) общие затраты должны быть минимальными.

Исходные данные:

- Матрица затрат (у.е./шт);
- Матрица продуктивности (шт./час) заданная первым рядком и вектором индексов;
- Вектор ресурсов (час);
- Вектор запланированного выпуска (шт).

Таблица 3 – Данные примера 2

	A	B	C	D	E	F
1	**Пропорциональное распределение станков по продуктам**					
2	Себестоимость и ресурсы					
3		Продукт	Продукт	Продукт	Продукт	Ресурс
4		1	2	3	4	(часы)
5	Станок 1	2	1	0,5	1,2	240
6	Станок 2	0,8	1,2	0,9	0,8	160
7	Станок 3	0,5	1	0,6	0,9	150
8	План (шт)	3000	15000	4500	1500	
9	Продуктивность (матрица $\boxed{D}$)					
10		Продукт	Продукт	Продукт	Продукт	Индекс
11		1	2	3	4	до1-го
12	Станок 1	30	50	30	20	0
13	Станок 2	60	100	60	40	2
14	Станок 3	18	30	18	12	0,6

Найти:

- План оптимального распределения (часы);
- Общие затраты (ЦФ)

Двоистая задача:

Оценки ограничений:

- Временных ресурсов;
- объемов выпуска.

Математическая модель

I. Найти матрицу распределения $X = \{x_{ij}\}, i = 1,2,3; j = \overline{1,4},$ где: x_{ij} – количество часов работы i – го станка для изготовления j – го продукта, такую, чтобы

II. Общие расходы $Z = 2x_{11} + x_{12} + 0,5x_{13} + \ldots + 0,9x_{34} \to \min$

III. При ограничениях:

(3.1) для объемов работ:

$30x_{11} + 60x_{21} + 18x_{31} = 3000$ (все станки для 1-го продукта)

$50x_{12} + 100x_{22} + 30x_{32} = 15000$ (все станки для 2-го продукта)

$30x_{13} + 60x_{23} + 18x_{33} = 4500$ (все станки для 3-го продукта)

$20x_{14} + 40x_{24} + 12x_{34} = 1500$ (все станки для 4-го продукта)

(3.2) для ресурсов (часы)

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 240$ (рабочее время 1-го станка не превышает его ресурса)

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 150$ (рабочее время 2-го станка не превышает его ресурса)

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 150$ (рабочее время 3-го станка не превышает его ресурса)

и предельных условий: все $x_{ij}\ge 0$.

Табличная модель

Формируем:

- Матрицу продуктивности (вычисляем за первым рядком и вектором индексов);
- Матрицу распределения;
- Столбик Использовано, его элементы – сумы по рядкам этой матрицы;
- Столбик Резерв, его элементы: разность Ресурс-Использовано;
- Рядок Изготовлено, его элементы – сумма произведение одноименных столбцов продуктивности и матрицы распределения;
- (ЦФ), ее значение – сумма произведений матрицы затрат и распределения, критерий минимум.

Табличная модель

После ввода исходных данных формируем:

- Матрицу продуктивности (вычисляем за первым рядком и вектором индексов);
- Матрицу распределения;
- столбик Использовано, его элементы – суммы порядкам этой матрицы;
- столбик Резерв, его элементы: разница Ресурс – Использовано;
- рядок Изготовлено, его элементы - сумма произведений одноименных столбцов продуктивности и матрицы распределения;
- ЦФ – сумма произведений матриц распределения и затрат, критерий – минимум.

Определяем место для теневых цен, которые будут получены из *отчета по устойчивости.*

Таблица – Результаты решения примера 2

17	Распределение (часы)							
18		Продукт	Продукт	Продукт	Продукт	Использовано	Резерв	Т-цена
19		1	2	3	4			
20	Станок 1	**0**	**90**	**150**	**0**	240	0	-0,03
21	Станок 2	**7,5**	**105**	**0**	**37,5**	150	0	-0,87
22	Станок 3	**141,7**	**0**	**0**	**0**	141,7	8,3	0
23	План (шт)	3000	15000	4500	1500	ЦФ=	**397,8**	
24	Т цена	0,028	0,021	0,018	0,042			
25								
26	Производственная программа (штук)							
27	Станок 1		4500	4500				
28	Станок 2	450	10500		1500			
29	Станок 3	2550						
30		3000	15000	4500	1500			

<u>Прямая задача:</u> план распределения (B20:E22), общие затраты 397,8 у.е.; третий станок имеет резерв 8,3 часа.

<u>Двоистая задача:</u>

- Теневые цены полностью загруженных 1-го и 2-го станков (с минусом) указывают, что с увеличением их ресурса общие расходы уменьшатся, более «выгодной» есть второй станок (-0,87 на каждый дополнительный час).

- Теневые цены плановых заданий по изготовлению продукции показывают, как возрастают общие расходы при увеличении этих показателей, 4-й продукт наиболее «невыгодный).

Имея почасовое распределение ресурсов и продуктивности станков, строим матрицу Производственная программа (шт.), где определяем количество продуктов каждого типа, изготовленных на соответствующих станках, внизу – контрольная строчка.

Замечание Суммы по рядкам этой матрицы не находить, поскольку продукты неоднородные**.**

3) Общая задача распределения ресурсов

Особенности: все ресурсы и спрос неоднородные, но с помощью матрицы $D=\{d_{ij}\}$ с произвольными коэффициентами устанавливаются связи между спросом и предложением.

В приведенном примере с проблематики аграрного менеджмента распределяются земельные ресурсы для выращивания разных с/х культур, где элементами матрицы D является урожайность каждой культуры на определенном участке. Это универсальная модель распределения ресурсов.

Пример 3.

Найти оптимальное распределение 3-х земельных участков по 4-м с/х культурам при условии получения заданных объемов урожая и с минимальными общими затратами.

Исходные данные и постановка задачи:

- Матрица себестоимости или затрат (у.е./ц);
- Матрица урожайности (ц/га);
- Вектор земельных ресурсов (га);
- Вектор запланированного урожая (ц).

Найти:

Прямая задача

- План оптимального распределения земельных ресурсов(часы);
- Общие затраты (ЦФ)

Двоистая задача:

Оценки ограничений:

- земельных ресурсов (площадей участков);
- объемов урожая культур.

Математическая модель

I. Найти матрицу распределения $X=\{x_{ij}\}, i=1,2,3; j=\overline{1,4},$ где: $x_{ij}-$ размер (га) $i-$ го участка для выращивания $j-$ ой культуры, так, чтобы

II. Общие расходы $Z=2x_{11}+x_{12}+0,5x_{13}+...+0,9x_{34}\to \min$

III. При ограничениях:

(3.1) для с/х культур:

$12x_{11}+10x_{21}+15x_{31}=500$ (все участки для 1-й культуры)

$16x_{12}+12x_{22}+16x_{32}=200$ (все участки для 2-й культуры)

$16x_{13}+20x_{23}+24x_{33}=250$ (все участки для 3-й культуры)

$20x_{14}+40x_{24}+12x_{34}=1500$ (все участки для 4-й культуры)

(3.2) для земельных ресурсов (участков)

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 30$ (занятые площади 1-й культуры не превышает ее ресурса)

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 50$ (занятые площади 2-й культуры не превышает ее ресурса)

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 20$ (занятые площади 3-й культуры не превышает ее ресурса) и предельных условий: все $x_{ij}\ge 0$.

Табличная модель

Формируем:

- Матрицу продуктивности (вычисляем за первым рядком и вектором индексов);
- Матрицу распределения;
- Столбик Использовано, его элементы – сумы по рядкам этой матрицы;
- Столбик Резерв, его элементы: разность Ресурс-Использовано;
- Рядок Изготовлено, его элементы – сумма произведение одноименных столбцов продуктивности и матрицы распределения;
- (ЦФ), ее значение – сумма произведений матрицы затрат и распределения, критерий минимум.

Табличная модель

После ввода исходных данных формируем:

- Матрицу распределения В(16:Е18), неизвестные;
- столбик Использовано, его элементы – суммы порядкам этой матрицы;
- столбик Резерв, его элементы: разница Площадь – Использовано;
- рядок Урожай, сумма произведений одноименных столбцов урожайности и матрицы распределения;
- ЦФ (F19)-сумма произведений матриц затрат и распределения, критерий – минимум.

Таблица 5 – Исходные данные и результаты результаты решения примера 3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Рраспределение земельных ресурсов по культарам**							
2	Себестоимость, план и ресурсы							
3		Культура 1	Культура 2	Культура 3	Культура 4	Площадь (га)		
4	Участок 1	2	2,5	3	3	30		
5	Участок 2	2,4	3	3,2	0,5	50		
6	Участок 3	1,8	2	2,5	1,1	20		
7	План	500	200	400	250			
8	Урожайность (матрица $\boxed{D}$)							
9		Культура 1	Культура 2	Культура 3	Культура 4			
10	Участок 1	12	15	16	25			
11	Участок 2	10	12	20	15			
12	Участок 3	15	16	24	23			
13								
14	Распределение							
15		Культура 1	Культура 2	Культура 3	Культура 4	Использовано	Резерв	Т-цена
16	Участок 1	**17,5**	**12,5**	**0**	**0**	30	0	-0,5
17	Участок 2	**0**	**0**	**19,2**	**16,7**	35,9	14,1	0
18	Участок 3	**19,3**	**0**	**0,7**	**0**	20	0	-1,3
19	Урожай	500	200	400	250	ЦФ=	**172,5**	
20	Т цена	0,31	0,19	0,16	0,03			

Прямая задача: план распределения (B16:E18), общие затраты 172,5 у.е., 2-й участок имеет резерв, который составляет 14,1 га.

Двоистая задача:

- Теневые цены полностью загруженных 2-го и 3-го участков (с минусом) указывают, что с увеличением их ресурса общие расходы уменьшатся, более «выгодным» есть третий участок (-1,3).

- Теневые цены плановых заданий по уборке культур показывают, как возрастают общие расходы при увеличении этих показателей, 1-я и 2-я культуры наиболее «невыгодны»).

Література

1. Кузьмічов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в Excel:Навч. посібн.-К.:Вид-во Європ. Ун-ту, 2005.-320 с.
2. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування.:Навчальний посібник.-К.:КНЕУ,2005-452с.