

УДК 539.3

Михайло А. Мартиненко,
Ірина В. Лебедєва

Осесиметрична задача для пружного середовища зі сферичним включенням, послабленого тріщиною на міжфазовій межі
Серія: фізико-математичні науки

Точними методами лінійної теорії пружності розв'язано задачу про напружений стан пружного середовища зі сферичним включенням, послабленого тріщиною на міжфазовій межі. Задачу зведено до взаємозв'язаної системи парних інтегральних рівнянь відносно функцій Лежандра, а потім – до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно двох функцій. Досліджено поведінку розв'язків рівнянь поблизу граничного кола сферичного розрізу. Розглянуто випадок, коли поверхні розрізу перебувають під нормальним внутрішнім тиском сталої інтенсивності.

Ключові слова: пружний, тріщина, композит, порожнина, включення.

*E-mail: LebedevaI@ukr.net

Розглядається осесиметрична задача теорії пружності для двоскладеного тіла з тріщиною по частині сферичної поверхні, що міститься на межі розділу пружних властивостей матеріалів. Ця задача пов'язана з дослідженням напруженого стану високоміцних композиційних матеріалів з малим відсотковим об'ємом дисперсних частинок сферичної форми. Точними методами лінійної теорії пружності задачі про неплоскі тріщини на міжфазовій межі, швидше за все, не розглядалися.

Нехай пружний простір (v_2, G_2) містить пружне сферичне включення (v_1, G_1) , причому на межі з'єднання є сферична тріщина $(r = r_0, 0 < \theta \leq \theta_0, 0 < \varphi < 2\pi)$, на поверхнях якої діють осесиметричні дотичні та нормальні навантаження. Вважається, що поверхні тріщини не вступають у контактну взаємодію, а вздовж іншої частини межі – з'єднання ідеальне.

Mykhaylo A.. Martynenko,
Iryna V. Lebedyeva I

Axisymmetric Problem for an Elastic Medium with a Spherical Inclusion when There is a Crack at the Interface
Series: Physics & Mathematics Sciences

A problem on the stressed state of an elastic medium with a spherical inclusion when there is a crack at the interface is solved by exact methods of the linear theory of elasticity. At first the problem is reduced to an interrelated system of paired integral equations with respect to the Legendre functions, and then – to a system of singular integral equations relative to two unknown functions. The behaviour of the equation solutions is studied near the interface circle of a spherical section. The case is examined when the cross-section surfaces are under normal internal pressure of constant intensity.

Key Words: elastic, crack, composite, cavity, inclusion.

За таких припущень граничні умови мають вигляд

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)}, \quad (r = r_0, 0 < \theta \leq \pi) \quad (1)$$

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} = f_1(\theta), \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(2)} = f_2(\theta), \quad (r = r_0, 0 < \theta \leq \theta_0),$$

де $\sigma_r^{(i)}, \tau_{r\theta}^{(i)}, u_r^{(i)}, u_\theta^{(i)}$ – компоненти тензора напружень та вектора переміщень для простору зі сферичною порожниною (індекс 2) або для сферичного включення (індекс 1); $f_i(\theta)$ – відомі функції, що відповідають навантаженню на нескінченості; r, θ, φ – сферичні координати.

Записуючи загальний розв'язок для простору зі сферичною порожниною та для сферичного включення у вигляді розкладів за функціями Лежандра [1] і задовольняючи граничні умови (1), задача зводиться до наступної взаємозв'язаної системи парних рядів-рівнянь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\Delta_{n2}} (\alpha_{11}A'_n + \alpha_{12}B'_n) P_n(\cos\Theta) = 0, \quad (\theta_0 < \theta \leq \pi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\Delta_{n2}} (\alpha_{21}A'_n + \alpha_{22}B'_n) \frac{P'_n(\cos\Theta)}{n(n+1)} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[-(n^2 + 3n - 2v_2)C'_n + (n+2)D'_n \right] P_n(\cos\Theta) = f_1(\theta), \quad (0 < \theta \leq \theta_0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n^2 - 2 + 2v_2)C'_n - (n+2)D'_n \right] \frac{P'_n(\cos\Theta)}{n(n+1)} = f_2(\theta),$$

де

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2}G_2(n+2)(n-2+4v_1)\Delta_{n2} - G_1[3n^4 + 7n^3 - 2n^2 - 12n - 2 + 2(v_1 - v_2)(n^2 + n + 1) + 2v_1v_2(2n+1) - 2mv_2(2n^3 + 5n^2 - n - 6)],$$

$$\alpha_{12} = (n+2) \left\{ \frac{1}{2}G_2\Delta_{n2} - G_1(n-1)[3n+2-2v_2(2n+1)] \right\},$$

$$\alpha_{21} = n \left\{ \frac{1}{2}G_2(n+2)(n+5-4v_1)\Delta_{n2} - G_1[3n^4 + 12n^3 + 9n^2 - 8n - 10 - 2v_2(n^2 - 1)(n+2)(2n+3) - 2(v_2 - v_1)(n^2 + n + 1) - 2v_1v_2(2n+1)] \right\},$$

$$\alpha_{22} = (n+1)\alpha_{12}; \quad \Delta_{n2} = 2[(2n+1)v_2 - n^2 - n - 1],$$

$$A'_n = A_n r_0^n; \quad B'_n = B_n r_0^{n-2}; \quad C'_n = C_n r_0^{-n-1}; \quad D'_n = D_n r_0^{-n-3}, \quad (2)$$

v_i – коефіцієнт Пуассона; G_i – модуль зсуву матеріалу.

Між довільними сталими A'_n, B'_n, C'_n, D'_n існує наступна залежність:

$$C'_n = \frac{n-1}{\Delta_{n2}} [n(2n+3)A'_n + (2n+1)B'_n],$$

$$D'_n = \frac{1}{(n+2)\Delta_{n2}} \left\{ [2n^2 + 5n^4 - 5n^2 + 6n + 4 - 4(v_2 - v_1)(n^2 + n + 1)] - 4v_1v_2(2n+1)A'_n + (n^2 - 1)(2n-1)B'_n \right\}. \quad (3)$$

Розв'язок системи (2) шукаємо методом, запропонованим у [2,3].
Покладемо

$$\frac{1}{(n+2)\Delta_{n2}} (\alpha_{11}A'_n + \alpha_{12}B'_n) = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \varphi(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt = I_n^{(1)},$$

$$\frac{(2n+1)^{-1}}{(n+2)\Delta_{n2}} (\alpha_{21}A'_n + \alpha_{22}B'_n) = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \psi(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt = I_n^{(2)}, \quad (4)$$

де введені допоміжні функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ вважаються неперервними всередині проміжка $(-\theta_0, \theta_0)$ і мають наступні властивості:

$$\varphi(-t) = -\varphi(t); \quad \psi(-t) = \psi(t). \quad (5)$$

Використовуючи розривні суми для функцій Лежандра [2-4], легко перевірити, що шляхом вибору розв'язку у формі (4) перші дві рівності системи (2) будуть задовольнятися тотожно за виконання наступної інтегральної умови

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \psi(t) \cos \frac{t}{2} dt = 0. \quad (6)$$

Розв'язуючи послідовно системи (4), (3), дістанемо

$$C'_n = \frac{n-1}{\alpha_{13}} [nI_n^{(1)} + (2n+1)I_n^{(2)}], \quad D'_n = \frac{1}{\alpha_{13}\alpha_{31}} [\beta_{21}I_n^{(1)} + \beta_{22}(2n+1)I_n^{(2)}], \quad (7)$$

$$\text{де } \alpha_{13} = \frac{1}{2} G_2 \Delta_{n2} - G_1(n-1)[3n+2-2v_2(2n+1)],$$

$$\alpha_{31} = G_2(n+2)[2v_1(2n+1)-3n-1] - \frac{1}{2} G_1 \Delta_{n1},$$

$$\beta_{21} = (n+1) \left\{ \frac{1}{2} G_1(n-1) \Delta_{n1}(n-4+4v_2) + G_2[3n^4 - 9n^2 + 2n - 2 + 2(v_2 - v_1)(n^2 + n + 1) + 2v_1v_2(2n+1) - 2v_1n(n-1)(2n-1)(n+2)] \right\},$$

$$\beta_{22} = G_2[3n^4 + 5n^3 - 5n^2 - n + 4 - 2v_1(n^2 - 1)(2n-1)(n+2) - 2(v_2 - v_1)(n^2 + n + 1)] + \frac{1}{2} G_1(n-1)(n+3-4v_2) \Delta_{n1},$$

$$\Delta_{n1} = 2[n^2 + n + 1 + (2n+1)v_1].$$

Після інтегрування останніх двох рівнянь системи (2) у межах від 0 до θ та підстановки замість невідомих сталих їх виразів через допоміжні інтеграли (7) приходимо до наступних рівнянь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (L_{11}I_n^{(1)} + L_{12}I_n^{(2)}) \frac{P_n(\cos\theta)}{n(n+1)} = F_1(\theta),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (L_{21}I_n^{(1)} + L_{22}I_n^{(2)}) \frac{P_n(\cos\theta)}{n(n+1)} = F_2(\theta), \quad (8)$$

$$\text{де } L_{11} = \frac{1}{2\alpha_{13}\alpha_{31}} \{ G_1(n-1)\Delta_{n1}[2n^2 + 5n + 4 - (2n^2 + 7n + 4)v_2] - G_2(n+2)\Delta_{n2}[2n^2 - n + 1 - (2n^2 - 3n - 1)v_1] \},$$

$$L_{12} = \frac{2n+1}{2\alpha_{13}\alpha_{31}} \{ G_1(n-1)\Delta_{n1}[(2n+3)v_2 - n - 3] - G_2(n+2)\Delta_{n2}[n - 2 - (2n-1)v_1] \},$$

$$L_{22} = \frac{2n+1}{2\alpha_{13}\alpha_{31}} \{ G_1(n-1)\Delta_{n1}[2n^2 + 4n + 1 - v_2(2n^2 + 5n + 1)] - G_2(n+2)\Delta_{n2}[2n^2 - 1 - v_1(2n^2 - n - 2)] \},$$

$$L_{21} = \frac{n(n+1)}{2n+1} L_{12}; \quad F_2(\theta) = c_1 + \int_0^{\theta} f_2(\theta) d\theta;$$

$$F_1(\theta) = \frac{1}{\sin\theta} \left[\int_0^{\theta} f_1(\theta) \sin\theta d\theta + \frac{8(1+v_1)I_0^{(1)} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2G_2(2v_2-1) - G_1(1+v_1)} \right]. \quad (9)$$

Якщо скористатися інтегральним представленням для функцій Лежандра [2-4] і у (8) змінити порядок підсумування та інтегрування, то прийдемо до системи інтегральних рівнянь Абеля, після розв'язання якої дістанемо наступну систему сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\varphi(x) - \frac{a}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\psi(t) dt}{\sin \frac{t-x}{2}} + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [K_{11}(x,t)\varphi(t) + K_{12}(x,t)\psi(t)] dt = \Phi_1(x),$$

$$\psi(x) + \frac{a}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\varphi(t)}{\sin \frac{t-x}{2}} + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [K_{21}(x,t)\varphi(t) + K_{22}(x,t)\psi(t)] dt = \Phi_2(x), \quad (10)$$

$$\text{де } a = \frac{a_2}{a_1}, \quad a_2 = G_1(2v_2-1) + G_2(1-2v_1), \quad a_1 = 2[G_1(1-v_2) + G_2(1-v_1)],$$

$$b_1 = 2[G_2(4\nu_1 - 3) - G_1][G_1(4\nu_2 - 3) - G_2], \quad c = \frac{2b_1}{\pi a_1},$$

$$K_{11}(x, t) = c \sum_{n=0}^{\infty} \left(L_{11} \beta^{-1} - \frac{a_1}{b_1} \right) \sin \beta t \sin \beta x, \quad \beta = n + \frac{1}{2},$$

$$K_{12}(x, t) = c \sum_{n=0}^{\infty} \left(L_{12} \beta^{-1} - \frac{2a_2}{b_1} \right) \sin \beta t \sin \beta x,$$

$$K_{21}(x, t) = c \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{L_{21}}{n(n+1)} - \frac{a_2}{b_1} \right) \sin \beta t \cos \beta x,$$

$$K_{22}(x, t) = c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L_{22}}{n(n+1)} - \frac{2a_2}{b_1} \right) \cos \beta t \cos \beta x,$$

$$\Phi_1(x) = -\frac{c}{2 \sin x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{F_1(\theta) \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos x}}, \quad \Phi_2(x) = -\frac{c}{2} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{F_2(\theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos x}},$$

причому в сумах для ядер $K_{11}(x, t)$ та $K_{21}(x, t)$ внутрішні коефіцієнти при $n=0$ відповідно дорівнюють $\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)$ і $\left(-\frac{a_2}{b_1}\right)$. Легко бачити, що ядра K_{11} та K_{21} - фредгольмові, а K_{12} і K_{22} - мають слабку логарифмічну особливість. Систему (10) можна розв'язати прямими обчислювальними методами, однак для визначення особливості розв'язку на кінцях інтервалу регуляризуємо її за Карлеманом-Векуа [5]. Представимо (10) у вигляді комплексного рівняння

$$K_0 f(x) + \pi k f = \Phi(x), \quad (11)$$

де $f = \psi + i\varphi$; $\Phi(x) = \Phi_2 + i\Phi_1$; $K_0 f = f(x) + \frac{a}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{f(t) dt}{\sin \frac{t-x}{2}}$,

$$k f = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [K_1(x, t) f(t) + K_2(x, t) \overline{f(t)}] dt;$$

$$K_1 = \frac{1}{2} [K_{22} + K_{21} + i(K_{11} + K_{12})]; \quad K_2 = \frac{1}{2} [K_{22} + K_{21} + i(K_{12} - K_{11})].$$

На відміну від сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші, теорія яких достатньо добре розроблена, сингулярні інтегральні рівняння з ядром $\csc \frac{t-x}{2}$ фактично недосліджені. Тут слід відзначити роботу [6].

Спираючись на ідеї та результати робіт [5-7], побудуємо розв'язок характеристичного рівняння

$$f(x) + \frac{\gamma}{\pi i} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{f(t) dt}{\sin \frac{t-x}{2}} = F(x), \quad (12)$$

Введемо до розгляду функцію комплексної змінної z в площині L , що має розріз вздовж лінії $[-\theta_0, \theta_0]$, наступним чином

$$\Psi(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{f(t) dt}{\sin \frac{t-z}{2}}. \quad (13)$$

Визначення цієї функції зводиться до розв'язання крайової задачі Рімана [7]

$$\Psi^+ = G(t) \Psi^- + g(t), \quad (14)$$

де

$$\Psi^+(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(t) \csc \frac{t-x}{2} dt;$$

$$\Psi^-(x) = -\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(t) \csc \frac{t-x}{2} dt;$$

$$G(t) = \frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}; \quad g(t) = \frac{F(t)}{1+2\gamma}. \quad (15)$$

Після того як задачу Рімана розв'язано, характеристичне рівняння можна представити у вигляді

$$f(x) = \frac{Z(x)}{1-4\gamma^2} \left[F(x) - \frac{\gamma}{\pi i} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{F(t) - F(x)}{Z(t) \sin \frac{t-x}{2}} dt \right], \quad (16)$$

де $Z(x) = \sqrt{1-4\gamma^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_0 - x}{4} \right)^{i\lambda} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_0 + x}{4} \right)^{-i\lambda}$; $\lambda = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+2\gamma}{1-2\gamma}$. (17)

Отриманий розв'язок характеристичного рівняння (12) дозволяє привести сингулярне рівняння (11) до рівняння Фредгольма, подібно до того як регуляризуються сингулярні рівняння у монографії [5].

Перепишемо рівняння (11) у вигляді

$$f(x) + \frac{\gamma}{\pi i} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{f(t) dt}{\sin \frac{t-x}{2}} = \Phi(x) - k f(x) \quad (18)$$

і будемо тимчасово розглядати праву частину рівняння як відому функцію. Легко показати, що функція $k f(x)$ є регулярною. Розв'язуючи (18) за формулою (16), дістанемо

$$f(x) + \frac{Z(x)}{1-4\gamma^2} \left[kf(x) - \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{kf(t) - kf(x)}{Z(t) \sin \frac{t-x}{2}} dt \right] = \frac{Z(x)}{1-4\gamma^2} \left[\Phi(x) - \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\Phi(t) - \Phi(x)}{Z(t) \sin \frac{t-x}{2}} dt \right]$$

Таким чином, особливість розв'язку рівняння (11) на кінцях відрізка $[-\theta_0, \theta_0]$ визначається функцією $Z(t)$. Отже, $f(t)$ може бути представлена у вигляді

$$f(t) = Z(t)L(t); \quad L(t) = L_1(t) + iL_2(t), \quad L(-t) = \bar{L}(t), \quad (20)$$

де $L(t)$ не має особливостей на кінцях відрізка $[-\theta_0, \theta_0]$.

Якщо ввести позначення

$$\frac{1}{1-4\gamma^2} \left[\Phi(x) - \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\Phi(t) - \Phi(x)}{Z(t) \sin \frac{t-x}{2}} dt \right] = F_*(x),$$

то легко показати, що рівняння (19) еквівалентне наступному рівнянню Фредгольма

$$L(x) + \frac{1}{1-4\gamma^2} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [L(t)M_1(t, x) + \bar{L}(t)M_2(t, x)] dt = F_*(x), \quad (21)$$

$$M_1(t, x) = \frac{i\gamma Z(t)}{\pi(1-4\gamma^2)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \bar{Z}(\tau) \frac{K_1(t, \tau) - K_1(t, x)}{\sin \frac{\tau-x}{2}} d\tau + Z(t)K_1(t, x),$$

$$M_2(t, x) = \frac{i\gamma \bar{Z}(t)}{\pi(1-4\gamma^2)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \bar{Z}(\tau) \frac{K_2(t, \tau) - K_2(t, x)}{\sin \frac{\tau-x}{2}} d\tau + \bar{Z}(t)K_2(t, x). \quad (22)$$

Вигляд і властивості функції $Z(t)$ та $L(t)$ дозволяють у рівнянні (22) відокремити дійсні та уявні частини і отримати систему двох інтегральних рівнянь Фредгольма відносно функцій $L_1(t)$ та $L_2(t)$ на відрізку $[0, \theta_0]$. У зв'язку з громіздкістю ці рівняння тут не наводяться.

Перейдемо до стислого викладення методу обчислень полів напружень та переміщень поблизу граничного кола сферичного розрізу. Відомо, що при обчисленні цих характеристик поблизу контура дисковидної тріщини, розташованої на межі розділу двох різномірних матеріалів, виникають труднощі математичного характеру, пов'язані з асимптотичною оцінкою низки інтегралів. Аналогічна ситуація виникає і в даній задачі. Легко показати, що поблизу граничного кола сферичного

розрізу, тобто при $\theta \sim \theta_0 - \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) різниця переміщень у першому наближенні зображується інтегралом

$$\Delta u_\theta + i\Delta u_r = \frac{2r_0}{G_1 G_2} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{Z(t)L(t)dt}{\sin \theta \sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos t}} = \frac{2r_0 \sqrt{1-4\gamma^2}}{G_1 G_2} \int_{\theta}^{\theta_0} \left(\frac{\frac{\theta_0 - t}{4}}{\frac{\theta_0 + t}{4}} \right)^{i\lambda} \frac{L(t)dt}{\sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos t}}. \quad (24)$$

Застосовуючи до цього інтеграла метод асимптотичного інтегрування, при $\theta \sim \theta_0$ дістанемо

$$\Delta u_\theta + i\Delta u_r = \frac{2r_0 L(\theta_0) \sqrt{1-4\gamma^2}}{\cos \theta_0 / 2} \left(\frac{\text{tg}(\theta_0 - \theta)/4}{\text{tg}(\theta_0 + \theta)/4} \right)^{1/2 + i\lambda} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1+i\lambda)}{\Gamma(3/2+i\lambda)}, \quad (25)$$

де $\Gamma(x)$ – гама-функція.

Зазначимо, що з рівності (24) можна дістати формулу (25) різними методами, але найраціональнішою є підстановка

$$\sin \frac{t}{2} = \sin \frac{\theta}{2} + S \left(\sin \frac{\theta_0}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right). \quad (26)$$

Поля напружень на поверхні сфери $r=r_0$ зовні розрізу визначаються правими частинами рівностей (8), але для $\theta > \theta_0$. З аналізу рядів (8) випливає, що головні складові напружень при $\theta \approx \theta_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) знаходяться з сум

$$\sigma_r = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n J_n^{(1)} + b_n J_n^{(2)}] \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(\cos \theta);$$

$$\sigma_{r\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} b_n J_n^{(1)} + 2a_n J_n^{(2)} \right] \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right) P_n^1(\cos \theta)}{n(n+1)}. \quad (27)$$

З урахуванням співвідношень для функцій Лежандра [4] асимптотичні вирази для полів напружень можна подати у вигляді

$$\sigma_r \approx \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left\{ \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} [a_n J_n^{(1)} + b_n J_n^{(2)}] \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right) P_n^1(\cos \theta)}{n(n+1)} \right\};$$

$$\sigma_{r\theta} \approx \frac{d}{d\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} b_n J_n^{(1)} + 2a_n J_n^{(2)} \right] P_n(\cos \theta), \quad (\theta > \theta_0). \quad (28)$$

Якщо підставити в рівності (28) замість $I_n^{(1)}, I_n^{(2)}$ відповідні інтегральні оператори, а потім змінити порядки підсумовування та інтегрування, дістанемо

$$\sigma_r \approx \frac{2a_0}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\sin t \varphi(t) dt}{\sqrt{2 \cos t - 2 \cos \theta}}; \quad \sigma_{r\theta} \approx 2a_0 \frac{d}{d\theta} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{2 \cos t - 2 \cos \theta}}; \quad (29)$$

На основі рівностей (10), (17) і (20) останні співвідношення при $\theta \sim \theta_0$ можна представити в наступному еквівалентному вигляді

$$\sigma_{r\theta} + i\sigma_r \approx -2a_0 \sin \theta_0 L(\theta_0) \sqrt{1-4\gamma^2} \int_{\theta}^{\theta_0} \left(\frac{\theta_0-t}{4} \right)^{i\lambda} \frac{dt}{\sqrt{2 \cos t - 2 \cos \theta}}. \quad (30)$$

Після асимптотичного інтегрування дістанемо

$$\sigma_{r\theta} + i\sigma_r \approx (K_2 + iK_1) \theta_0^{-0,5} \left(\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta_0}{2} \right)^{\frac{1}{2} + i\lambda} \cdot \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta_0}{2} \right)^{\frac{1}{2} - i\lambda}, \quad (31)$$

де коефіцієнти інтенсивності нормальних K_1 та дотичних K_2 напружень визначаються формулою

$$K_2 + iK_1 = -4a_0 \sqrt{1-4\gamma^2} \sqrt{r_0} L(\theta_0) \frac{\Gamma(1+i\lambda) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma(3/2)}. \quad (32)$$

Як приклад розглядається випадок, коли поверхні розрізу знаходяться під нормальним внутрішнім тиском інтенсивності q . Тут звернемо увагу на те, що розв'язок системи інтегральних рівнянь (22) залежить від пружних сталей ν_1, ν_2, G_1, G_2 , геометрії розрізу r_0, θ_0 та умов навантаження поверхонь розрізу, причому кожен з вказаних параметрів має досить широкий інтервал зміни. Не маючи можливості повністю дослідити дану багатопараметричну задачу, наведемо лише ті висновки, які, на наш погляд, мають практичне значення.

Перш за все зазначимо, що залежність коефіцієнтів інтенсивності (КІН) від числа Пуассона, які лежать в інтервалі $0,2 < \nu_1, \nu_2 < 0,42$ ($G_1 = G_2$) є незначною. Так, наприклад, при $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$ і $\nu_1 = 1/3, \nu_2 = 1/4$ ($G_1 = G_2$) КІН K_1 відповідно дорівнюють 0,457 і 0,462.

На рис.1 показано поведінку КІН в залежності від відношення модулів зсуву $\beta = G_1/G_2$ включення і матриці ($\nu_1 = \nu_2 = 1/3$) для різних значень кута розрізу. Наведені результати дозволяють провести порівняння КІН для композиту ($\beta > 1$) і однорідного матеріалу ($\beta = 1$). З рис.1 випливає, що при збільшенні β КІН зростають і перевищують відповідні значення КІН для однорідного матеріалу. Якщо ввести параметри

$S_1 = K_1^{(K)}/K_1^{(0)}, S_2 = K_2^{(K)}/K_2^{(0)}$, (верхні індекси (K) і (0) відповідають композитному та однорідному матеріалам), то при $1 < \beta < 60$ параметри S_i лежать в інтервалі $1 < S_i < 1,5$. Зазначимо, що випадок $0 < \beta < 1$ не викликає практичного інтересу.

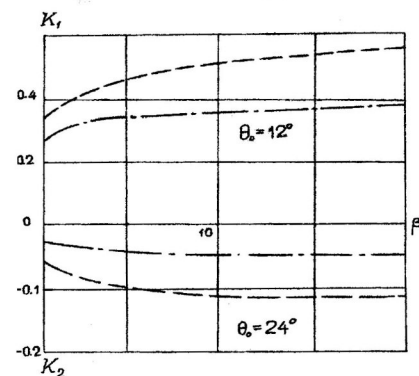


Рис.1. Залежність коефіцієнтів інтенсивності від параметрів β .

Література

1. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости.-М.:Гостехиздат, 1995.-491с.
2. Мартыненко М.А. Решение парных уравнений по полиномам Лежандра первого порядка.-Мат.физика, 1979,№25,с.106-109.
3. Мартыненко М.А., Улитко А.Ф. напряженное состояние вблизи вершины сферического разреза в неограниченной упругой среде.-Прикладная механика, 1978,14,№9, с.15-23.
4. Гобсон Е.В.Теория сферических и эллипсоидальных функций.-М.:1952-476с
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.- М.:Наука,1968-600 с.
6. Чибрикова Л.И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений// Уч.зап.Казан.ун-та.-1962-122,№5.-С.95-124.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи.-М.:Наука, 1977.-640с.