

## 60. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ДЕЯКИХ БІОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ХАРЧОВІЙ ПРОМИСЛОВОСТІ

Микола Медведєв, Володимир Листопад,  
Оксана Мулява

*Національний університет харчових технологій*

**Вступ.** При побудові нелінійних моделей для дослідження часто використовують метод найменших квадратів, який є основою симплекс-методу в лінійному програмуванні. Проте він не охоплює всі типи нелінійних залежностей. Це вимагає розробки нових підходів при побудові нелінійних моделей.

**Методи.** Продемонструємо схему побудови квадратичної нелінійної залежності результативної ознаки від трьох чинників методами кореляційно-регресійного аналізу. З експериментальних даних відомо, що в'язкість сироватко-рослинної суміші ( $Y$ ) залежить від кількості харчових волокон ( $X_1$ ) суміші, тривалості перемішування ( $X_2$ ) та температури набухання ( $X_3$ ).

Дослідним шляхом були отримані наступні дані:

*Таблиця 1*

| № з/п | $Y$  | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|-------|------|-------|-------|-------|
| 1     | 5    | 30    | 15    | 40    |
| 2     | 4,8  | 20    | 15    | 40    |
| 3     | 4,85 | 30    | 5     | 40    |
| 4     | 4,7  | 20    | 5     | 40    |
| 5     | 3,8  | 30    | 15    | 20    |
| 6     | 3,6  | 20    | 15    | 20    |
| 7     | 2,9  | 30    | 5     | 20    |
| 8     | 2,6  | 20    | 5     | 20    |
| 9     | 4,45 | 30    | 10    | 30    |
| 10    | 4,3  | 20    | 10    | 30    |
| 11    | 4,4  | 25    | 15    | 30    |
| 12    | 4,25 | 25    | 5     | 30    |
| 13    | 4,3  | 25    | 10    | 40    |
| 14    | 4,2  | 25    | 10    | 20    |

**Результати.** Множинний коефіцієнт кореляції, який характеризує лінійну залежність між  $Y$  та незалежними змінними  $R_{y,x_1x_2x_3} = 0,867$ .

Для вимірювання інтенсивності нелінійного зв'язку між показниками служить кореляційне відношення (індекс кореляції)

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Нехай зв'язок між змінними  $Y$  та  $X_1, X_2, X_3$  описується квадратичною функцією до якої входить  $m = 10$  невідомих параметрів.

$$\hat{Y}_{10} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2 + a_6x_3^2 + a_7x_1x_2 + a_8x_1x_3 + a_9x_2x_3.$$

В таблиці 2 наведені розрахунки  $\hat{y}_i (i = \overline{1,14})$ , індексів кореляції  $\eta$  та значень  $m = 10, 9, \dots, 4$ . Останнє значення  $m = 4$  відповідає лінійній моделі.

Таблиця 2

| $X_1$  | $X_2$ | $X_3$ | $Y_i$ | $\hat{Y}_{10}$ | $\hat{Y}_{9}$ | $\hat{Y}_{8}$ | $\hat{Y}_{7}$ | $\hat{Y}_{6}$ | $\hat{Y}_{5}$ | $\hat{Y}_{4}$ |
|--|-------|-------|-------|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 30   | 15    | 40    | 5     | 4,79           | 4,79          | 4,81          | 4,84          | 5,04          | 5,09          | 5,14          |
| 20   | 15    | 40    | 4,8   | 4,64           | 4,63          | 4,61          | 4,64          | 4,84          | 4,89          | 4,94          |
| 30   | 5     | 40    | 4,85  | 4,75           | 4,74          | 4,76          | 4,79          | 4,58          | 4,63          | 4,68          |
| 20   | 5     | 40    | 4,7   | 4,58           | 4,58          | 4,56          | 4,59          | 4,38          | 4,43          | 4,48          |
| 30   | 15    | 20    | 3,8   | 3,93           | 3,93          | 3,91          | 3,94          | 3,73          | 3,78          | 3,83          |
| 20   | 15    | 20    | 3,6   | 3,70           | 3,69          | 3,71          | 3,74          | 3,53          | 3,58          | 3,63          |
| 30   | 5     | 20    | 2,9   | 3,07           | 3,06          | 3,04          | 3,07          | 3,27          | 3,32          | 3,37          |
| 20   | 5     | 20    | 2,6   | 2,82           | 2,82          | 2,84          | 2,87          | 3,07          | 3,12          | 3,17          |
| 30   | 10    | 30    | 4,45  | 4,48           | 4,48          | 4,48          | 4,35          | 4,39          | 4,20          | 4,25          |
| 20   | 10    | 30    | 4,3   | 4,28           | 4,28          | 4,28          | 4,15          | 4,19          | 4,00          | 4,05          |
| 25   | 15    | 30    | 4,4   | 4,56           | 4,56          | 4,56          | 4,43          | 4,64          | 4,52          | 4,38          |
| 25   | 5     | 30    | 4,25  | 4,10           | 4,10          | 4,10          | 3,97          | 4,18          | 4,06          | 3,92          |
| 25   | 10    | 40    | 4,3   | 4,91           | 4,91          | 4,91          | 5,03          | 4,82          | 4,94          | 4,81          |
| 25   | 10    | 20    | 4,2   | 3,60           | 3,60          | 3,60          | 3,72          | 3,51          | 3,63          | 3,50          |
| <b>Кількість параметрів у моделі <math>m</math></b>      |       |       |       | 10             | 9             | 8             | 7             | 6             | 5             | 4             |
| <b>Індекс нелінійної кореляції <math>\eta</math></b>     |       |       |       | 0,922          | 0,922         | 0,922         | 0,913         | 0,884         | 0,880         | 0,867         |
| <b>Середнє значення відносної похибки <math>w</math></b> |       |       |       | 4,95%          | 4,95%         | 4,96%         | 5,40%         | 6,45%         | 6,54%         | 7,16%         |

З вищенаведеного випливає, що квадратична модель з точністю до 5% описує експериментальні дані, тому не має сенсу переходити до більш складних залежностей.

Квадратична модель, що має вісім параметрів

$\hat{Y}_8 = -4,2344 + 0,089x_1 + 0,277x_2 + 0,232x_3 - 0,0034x_1^2 - 0,0054x_2^2 - 0,0021x_3^2 - 0,0041x_2x_3$  використовується для знаходження найбільшого та найменшого значень в'язкості  $Y$  сироватко-рослинної суміші в залежності від  $X_1, X_2, X_3$  при обмеженнях:  $20 \leq X_1 \leq 30$ ;  $5 \leq X_2 \leq 15$ ;  $20 \leq X_3 \leq 40$ . Скориставшись програмою-оптимізатором «Поиск решения» (MS Excel) для нелінійних задач математичного програмування, знайдені

$$\hat{y}_{8max} = 5,07 \text{ при } X_1 = 27,2; X_2 = 15; X_3 = 40;$$

$$\hat{y}_{8min} = 2,84 \text{ при } X_1 = 20; X_2 = 5; X_3 = 20.$$

**Висновок.** За допомогою побудованої нелінійної квадратичної моделі можна розв'язувати важливі з практичної точки зору обернені задачі, коли для заданої в'язкості сироватко–рослинної суміші  $Y$  потрібно знайти невідомі величини  $X_1, X_2, X_3$ , які забезпечують цю в'язкість. Цілком зрозуміло, що такі задачі, як правило, мають неоднозначний розв'язок, що дає можливість досліднику підбирати раціональні комбінації кількості харчових волокон  $X_1$  в суміші, тривалості перемішування  $X_2$  та температури набухання  $X_3$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Наконечний, С.І. Економетрія: підруч. / С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко, Т.П. Романюк. – 2 – Ге вид., перероб і доп. – К.: КНЕУ, 2000 . – 296 с.