

УДК № 517.9.

А.М.Ткачук (КНУ ім.Т.Шевченка, Київ)

A.M.Tkachuk

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ІНВАРІАНТНИМИ МНОЖИНАМИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ВІДПОВІДНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

THE RELATION BETWEEN INVARIANT SETS OF THE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL AND CORRESPONDING DIFFERENCE EQUATION

Досліджено зв'язок між інваріантними множинами систем диференціальних та відповідних різницевих рівнянь в термінах знакосталих функцій Ляпунова. Для систем диференціальних рівнянь отримано обернений результат про існування додатно визначеної функції Ляпунова, нулі якої співпадають з заданим інваріантним многовидом.

The relation between invariant sets of the systems of differential and corresponding difference equation in terms of the Lyapunov functions of constant signs is investigated. For the systems of the differential equations it is received the inverted result about existence of positively defined function of Lyapunov which zeros coincide with the given invariant manifold.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (1)$$

та відповідну їй систему різницевих рівнянь

$$x_{n+1}^h = x_n^h + hX(x_n^h), \quad (2)$$

де $n \in \mathbb{Z}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ – крок різницевого рівняння, $x_n^h = x_n^h(t_0 + nh)$, $x_0^h(t_0) = x_0$.

Вектор-функція $X(x)$ визначена при $x \in D$ (D – деяка область простору \mathbb{R}^n). Будемо вивчати зв'язок між інваріантними множинами систем (1) та (2).

Означення 1 . Множину $M \subset D$ назвемо інваріантною множиною системи (2), якщо вона має властивість: розв'язок $x_n^h(x_0)$ системи (2), що починається в точці $x_0 \in M$, залишається на M для довільного $n \in \mathbb{Z}$. Якщо $n \in \mathbb{Z}^+$, то множину M будемо називати додатно інваріантною множиною системи (2).

Зв'язок між інваріантними множинами систем (1) та (2) може бути вивчений в термінах знакосталих функцій Ляпунова. Подальші дослідження є продовженням роботи [1], в якій було встановлено умови існування інваріантної множини для системи (2).

Нехай D_1 – обмежена область, що міститься в D з деяким своїм оточенням, $\overline{D_1}$ – замикання D_1 .

Означення 2 . Функцію $V_h(x)$, визначену в $\overline{D_1}$, будемо називати знакосталою в D_1 , якщо для всіх $x \in \overline{D_1}$ ненульові значення функції $V_h(x)$ мають один і той же знак. Знакосталу в D_1 функцію $V_h(x)$ назвемо знаковизначеною в D_1 , якщо множина її нулів непорожня і компактна в D_1 .

2. Основні результати.

Позначимо через $\Delta V(x) = V(x + hX(x)) - V(x)$ та нехай $V(x) \in \mathbb{C}^1(D_1)$. Наведена нижче теорема дає умови існування інваріантної множини системи (1) в термінах знакосталих функцій Ляпунова системи (2).

Теорема 1 . Якщо $V(x)$ знаковизначена в D_1 функція, для якої $\Delta V(x)$ знакостала в D_1 , тоді множина нулів N_0 :

$$V(x) = 0, \quad x \in D_1 \quad (3)$$

є (додатно) інваріантною множиною відповідної системи диференціальних рівнянь (1), коли знаки $V(x)$ та $\Delta V(x)$ різні.

Доведення. Припустимо, що $V(x) \geq 0$, $\Delta V(x) \leq 0$, $x \in \overline{D_1}$. Покажемо, що похідна функції $V(x)$ в силу системи (1) не додатна.

Оскільки $V(x) \in \mathbb{C}^1(D_1)$, то для неї існує похідна за довільним напрямком в будь-якій точці $x \in D_1$.

З того, що $\Delta V(x) \leq 0$, маємо:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x + hX(x)) - V(x)}{h} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} X(x) \leq 0.$$

З [2, с. 68] отримаємо, що (3) є інваріантною множиною системи (1).

Тепер, на відміну від попереднього результату, де $V(x)$ не залежала від h , будемо вважати, що функція Ляпунова $V_h(x)$ залежить від кроку h різницевого рівняння.

Нехай для кожного $0 < h \leq h_0$ сім'я функцій $V_h(x) \in \mathbb{C}^1(D_1)$ та рівностепенно неперервна по x , тобто для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що буде справедливою нерівність

$$\|V_h(x') - V_h(x'')\| < \varepsilon, \quad \text{при} \quad |x' - x''| < \delta, \quad x', x'' \in D_1, \quad \forall h \leq h_0.$$

Теорема 2 . Нехай $V_h(x)$ знаковизначена в D_1 функція, для якої $\Delta V_h(x)$ знакостала в D_1 , сім'я функцій $V_h(x)$ рівномірно збігається по x (при $h \rightarrow 0$) до $V(x) \in \mathbb{C}^1(D_1)$ та множина нулів $N_0(h)$:

$$V_h(x) = 0, \quad x \in D_1 \quad (4)$$

рівномірно відділена по h від границі області ∂D_1 , тобто

$$\exists h_0 > 0, \quad \exists \gamma > 0, \quad \text{що} \quad \rho(N_0(h), \partial D_1) > \gamma, \quad \forall h \leq h_0. \quad (5)$$

Тоді система (1) має інваріантну множину, якщо знаки $V_h(x)$ та $\Delta V_h(x)$ різні.

Доведення. Припустимо, що $V_h(x) \geq 0$, $\Delta V_h(x) \leq 0$, $x \in \overline{D_1}$. Покажемо, що множина нулів функції $V(x)$ непорожня в D_1 . Із умови теореми маємо, що для довільного $h > 0$ існує $x \in D_1$ такий, що $V_h(x) = 0$. Оскільки D_1 — обмежена, то з (5) випливає, що нулі всіх функцій $V_h(x)$ лежать в деякому компактi з D_1 . Тому існує збіжна послідовність $\{x_n\}$ така, що

$$\forall n \geq 0 \quad x_n \in D_1, \quad \text{і} \quad V_{h_n}(x_n) = 0, \quad \text{де} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad x_0 \in D_1.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} V_{h_n}(x_n) = 0$.

Доведемо наступну рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{h_n}(x_n) = V(x_0).$$

Із рівномірної збіжності $V_h(x)$ випливає:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in D_1: \quad \|V_{h_n}(x) - V(x)\| < \varepsilon. \quad (6)$$

Тоді із (6) та рівностепенної неперервності $V_h(x)$ при $x = x_n$ маємо

$$\|V_{h_n}(x_n) - V(x_0)\| \leq \|V_{h_n}(x_n) - V_{h_n}(x_0)\| + \|V_{h_n}(x_0) - V(x_0)\| < 2\varepsilon,$$

при $n \geq N$ і таких, що $|x_n - x_0| < \delta$.

Отже знайдеться $x \in D_1$ таке, що $V(x) = 0$. Тепер покажемо, що похідна функції $V(x)$ в силу системи (1) не додатна.

Із $\Delta V_h(x) = V_h(x + hX(x)) - V_h(x) \leq 0, x \in \overline{D}_1$ отримаємо

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{V(x + tX(x)) - V(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \left[\lim_{h \rightarrow 0} (V_h(x + tX(x)) - V_h(x)) \right] \leq 0,$$

де $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{V(x+tX(x))-V(x)}{t}$ – похідна функції $V(x)$ за напрямком $X(x)$.

Одержали, що $\frac{\partial V}{\partial x} X(x) \leq 0, x \in D_1$.

З [2, с. 68] випливає, що множина

$$V(x) = 0, \quad x \in D_1$$

є (додатно) інваріантною множиною системи (1). Теорему доведено.

Наслідок. Якщо в теоремі 2 умови:

- а) рівностепенну неперервність $V_h(x)$ по x ;
- в) рівномірну збіжність $V_h(x)$ по x

замінити на наступні:

- 1) сім'я функцій $V_h(x)$ рівномірно обмежена, тобто

$$\exists C_1 > 0 : \|V_h(x)\| \leq C_1, \quad \forall h \leq h_0, \quad \forall x \in \overline{D}_1; \quad (7)$$

- 2) існують $C_2 > 0, C_3 > 0$ такі, що

$$\left\| \frac{\partial V_h(x)}{\partial x} \right\| \leq C_2; \quad \left\| \frac{\partial^2 V_h(x)}{\partial x^2} \right\| \leq C_3, \quad \forall h \leq h_0, \quad \forall x \in \overline{D}_1, \quad (8)$$

то твердження теореми залишається справедливим.

Доведення. Із (7), (8) випливає рівностепенна неперервність функцій $V_h(x)$ та їх похідних $\frac{\partial V}{\partial x}$. З вище сказаного маємо, що із сім'ї функцій $V_h(x)$ можна виділити збіжну підпоследовність, яка буде збігатися до функції $V(x)$ із класу $C^1(\overline{D}_1)$.

При доведенні теорем 1 та 2 основну роль відігравали результати А.М.Самойленка [2, с. 68] про існування інваріантних множин системи (1) в термінах нулів невід'ємно визначених функцій Ляпунова.

В роботах [3], [4] дані результати узагальнені на системи неавтономних диференціальних рівнянь та рівнянь з випадковими збуреннями. В них доведено, що нулі деякої невід'ємно визначеної функції Ляпунова $V(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ є інваріантною множиною, при умові, що їх проекція на \mathbb{R}^n компактна в D , а похідна $V(t, x)$ в силу системи недодатно визначена.

Вияснимо питання на скільки наявність функції Ляпунова з даними властивостями є необхідною для існування та стійкості інваріантних множин. Тобто в подальшому фактично отримаємо обернення теорем А.М.Самойленка аналогічно оберненим теоремам Ляпунова в теорії стійкості (дивись, наприклад, [5, с. 254]). В роботі [6] досліджено аналогічне питання, але суттєвою відмінністю її від даної, є умова рівномірної асимптотичної стійкості інваріантної множини.

Отже, розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (9)$$

в області $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, де функція $X(t, x)$ неперервна за сукупністю змінних і ліпшіцева по x .

Нехай $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, а M_{t_0} — переріз M гіперплощиною $t = t_0$, $t_0 \geq 0$.

Означення 3 . Множину M , назовемо додатно інваріантною множиною системи (9), якщо розв'язок $x(t)$ системи (9) такий, що $x(t_0) \in M_{t_0}$, має властивість: $x(t) \in M_t$ для довільного $t \geq 0$.

Означення 4 . Додатно інваріантну множину M системи (9) назовемо стійкою при $t \geq t_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що якщо $\rho(x(t_0), M_{t_0}) < \delta$, то $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ для $t \geq t_0$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3 . Нехай система (9) має при $t \geq 0$ гладкий, додатно інваріантний стійкий многовид M такий, що $Pr_{\mathbb{R}^n} M$ — компактна в D ($Pr_{\mathbb{R}^n} M$ — проекція множини M на \mathbb{R}^n).

Тоді в області $t \geq 0$, $x \in D$ існує диференційована за будь-яким напрямом функція Ляпунова $V(t, x)$ з властивостями:

1) $V(t, x)$ — додатно визначена рівномірно по $t \geq 0$, тобто

$$\inf_{t \geq 0; x: \rho(x, M_t) > \varepsilon} V(t, x) = V_\varepsilon > 0, \quad \text{при довільному } \varepsilon > 0; \quad (10)$$

2) похідна функції $V(t, x)$ в силу системи (9) недодатно визначена:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, X(t, x) \right) \leq 0, \quad t \geq 0, \quad x \in D;$$

3) множина нулів функції $V(t, x)$ співпадає з M , тобто

$$M = \{(t, x) : V(t, x) = 0, t \geq 0, x \in D\}.$$

Доведення. Нехай $x(s; t, x)$ — розв'язок системи (9), що визначається початковою умовою $x(t; t, x) = x$.

Розглянемо функцію

$$V(t, x) = (1 + e^{-t})\rho^2(x(\tau; t, x), M_\tau), \quad t \geq 0, \quad x \in D, \quad (11)$$

де τ — момент першого виходу розв'язку $x(s, t, x)$ ($0 \leq s \leq t$) на границю області D .

Якщо такого τ на $[0, t]$ не існує, то функцію $V(t, x)$ визначимо наступним чином

$$V(t, x) = (1 + e^{-t})\rho^2(x(0; t, x), M_0), \quad t \geq 0, \quad x \in D, \quad (12)$$

де $\rho(x(0; t, x), M_0) = \min_{y \in M_0} \|x(0; t, x) - y\|$ — відстань від розв'язку системи (9) до M_0 .

Із стійкості многовиду при $t \geq 0$ маємо: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що якщо $\rho(x_0, M_0) < \delta$, то

$$\rho(x(t; 0, x_0), M_t) < \varepsilon, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Покажемо справедливість нерівності (10). Дійсно, якщо це не так, то

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \text{що} \quad \forall \delta_1 > 0 \quad (\delta_1 < \delta^2) : \inf_{t \geq 0; x: \rho(x, M_t) > \varepsilon} V(t, x) < \delta_1.$$

Звідки випливає, що існують

$$\bar{t} \geq 0, \quad \bar{x} \in D, \quad \text{що} \quad \rho(\bar{x}, M_{\bar{t}}) > \varepsilon \quad (14)$$

і

$$V(\bar{t}, \bar{x}) = (1 + e^{-\bar{t}})\rho^2(x(\tau; \bar{t}, \bar{x}), M_\tau) < \delta_1.$$

З компактності проєкції, малості δ_1 і останньої нерівності випливає, що $x(\tau, \bar{t}, \bar{x}) \in D$ для довільного $\tau \in [0, \bar{t}]$. Тоді із (12) маємо, що

$$V(\bar{t}, \bar{x}) = (1 + e^{-\bar{t}})\rho^2(x(0; \bar{t}, \bar{x}), M_0) < \delta_1.$$

А тому із стійкості множини M , вибором достатньо малого δ_1 , при $t = \bar{t}$ отримаємо нерівність

$$V(\bar{t}, \bar{x}) = (1 + e^{-\bar{t}})\rho^2(x(\bar{t}; \bar{t}, \bar{x}), M_{\bar{t}}) = (1 + e^{-\bar{t}})\rho^2(\bar{x}, M_{\bar{t}}) < \varepsilon,$$

що суперечить (14).

Для доведення властивості 2) розглянемо функцію $\rho(x) = \min_{y \in M_t} \|x - y\|^2$ для довільного фіксованого $t \geq 0$. Покажемо її диференційованість за довільним напрямом при $x \in D$.

Якщо $x_0 \notin M_t$, то диференційованість випливає із з [7, с. 245].

Нехай $x_0 \in M_t$, тобто $\rho(x_0) = 0$. Візьмемо довільну послідовність $\{\alpha_k\}$ таку, що $\alpha_k \rightarrow 0+$ і розглянемо границю

$$\lim_{\alpha_k \rightarrow 0+} \frac{\rho(x_0 + \alpha_k g) - \rho(x_0)}{\alpha_k} = \lim_{\alpha_k \rightarrow 0+} \frac{\rho(x_0 + \alpha_k g)}{\alpha_k}, \quad (15)$$

що є похідною за напрямом g для довільного $g \in \mathbb{R}^n$. З гладкості множини M випливає існування для M_t дотичного підпростору в кожній точці, тоді $x_{\alpha_k} = x_0 + \alpha_k h + o(\alpha_k) \in M_t$, де h фіксований елемент з дотичного підпростору до M_t в точці x_0 .

З (15) маємо

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\rho(x_0 + \alpha_k g)}{\alpha_k} &= \frac{1}{\alpha_k} \min_{y \in M_t} \|x_0 + \alpha_k g - y\|^2 \leq \frac{1}{\alpha_k} \|x_0 + \alpha_k g - x_0 - \alpha_k h - o(\alpha_k)\|^2 = \\ &= \alpha_k \|g - h - \frac{o(\alpha_k)}{\alpha_k}\|^2 \rightarrow 0, \quad \alpha_k \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

З останнього співвідношення випливає диференційованість функції $\rho(x)$ на многовиді M_t .

Для похідної в силу системи (9) функції $V(t, x)$, заданої співвідношенням (11), будемо мати

$$\frac{dV}{dt} = \left\{ \frac{d}{ds} [1 + e^{-s}] \rho^2(x(\tau; s, x_s), M_\tau) \right\}_{s=t}, \quad (16)$$

де $x_s = x(s; t, x)$. Але $x(\tau; s, x_s) = x(\tau; t, x)$ при $s \geq 0$.

Таким чином, із (16) отримаємо

$$\frac{dV}{dt} = \rho^2(x(\tau; t, x), M_\tau) \left[\frac{d}{ds} (1 + e^{-s}) \right]_{s=t} = -e^{-t} \rho^2(x(\tau; t, x), M_\tau) < 0.$$

У випадку, коли $V(t, x)$ визначається (12), доведення проводиться аналогічно.

Властивість 3) випливає очевидним чином із означення функції $V(t, x)$ та інваріантності многовиду.

Література

- [1] *Ткачук А.М.* Інваріантні множини різницевих систем та їх стійкість//Нелінійні коливання.-2005.-8, №2.-с.258-264.
- [2] *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. - М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1987.-304с.
- [3] *Станьшицький О.М.* Дослідження інваріантних множин систем з випадковими збуреннями за допомогою функцій Ляпунова//Укр.мат.журн.-1998.-50, №2.-с.309-312.
- [4] *Игнатьев А.О.* Об асимптотической устойчивости интегральных множеств//Укр.мат.журн.-1996.-48, №8.-с.1064-1073.
- [5] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. -М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1967.-472 с.
- [6] *Игнатьев А.О.* О существовании функции Ляпунова в задачах устойчивости интегральных множеств//Укр.мат.журн.-1993.-45, №7.-с.932-941.
- [7] *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. -М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1981.-384 с.