МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВО-МЕТОДИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ

СУЧАСНІ НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Матеріали конференції

26 — 27 червня 2001 року

Київ

Київ УДУХТ 2001

Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі: Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції, 26-27 червня 2001 р.- К.: УДУХТ, 2001.-170 с.

Збірник містить основні матеріали, з якими виступали учасники Всеукраїнської науково-методичної конференції: «Сучасні науково–методичні проблеми математики у вищій школі». В рамках конференції працювали дві секції.

У матеріалах висвітлено шляхи і методи інтенсифікації навчального процесу й вплив новітніх наукових розробок на формування майбутніх спеціалістів.

Розраховано на наукових співробітників та викладачів вищих закладів освіти.

Відповідальний за випуск проф. Мартиненко М.А.

НАБЛИЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИМИ СУМАМИ ЗИГМУНДА КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$.

Островська О.В., канд. фіз.-мат. наук.

Український державний університет харчових технологій

Сапіліді Т.М.., канд. фіз.-мат. наук

Рівненський державний гуманітарний університет

Нехай L_p, $p \geq 1$ — простір 2π–періодичних функцій $f(\cdot)$ із скінченною нормою $\|f\|_p$, де при $p \in [1,\infty)$ $\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt)^{1/p}$, при $p = \infty$, $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(t)|$; C — множина 2π-періодичних неперервних функцій $f(\cdot)$ з нормою $\|f\|_C = \max |f(t)|$; $\omega(f,\delta)$, $0 < \delta \leq \pi$ — модуль неперервності функції $f \in C$, а H_ω — клас 2π-періодичних неперервних функцій, що задовольняють умову $|f(t) - f(t')| \leq \omega(|t - t'|)$, де $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Нехай

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x) \; (1)$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$, $S_n = S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f,x)$ — її суми Фур'є.

А.Зигмунд [1] ввів у розгляд лінійний метод підсумовування рядів Фур'є. Цей метод визначається за допомогою трикутної матриці чисел

$$\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\} = \left\{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right\}, \quad k = 1,\ldots,n-1, \quad s > 0, \quad \lambda_0^{(n)} = 1.$$

При цьому кожній функції $f \in L$ на основі її розвинення в ряд Фур'є (1)

$Z_n(f,\Lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)}A_k(f,x),\ n=1,2,\ldots$ *Такі поліноми називаються сумами Зигмунда.*

У випадку $f\in C$ послідовність $Z_n(f,\Lambda)$ рівномірно збігається. Апроксимативні властивості сум Зигмунда вивчалися багатьма математиками (див., наприклад, [1]–[4]). В роботах [3]–[4] розглянуто аналог сум Зигмунда, в якому $\lambda_k^{(n)}=1-\dfrac{\varphi(n)}{\varphi(k)}$, де $\varphi(k)$ — значення в точках $k\in\mathrm{N}$ деякої неперервної спадної функції $\varphi(x)$. Такі узагальнені суми Зигмунда позначаються $Z_n^{\varphi}(f,x)$.

Нехай $\psi(x)$, $x\geq 1$ — неперервна опукла вниз функція, що прямує до нуля при $x\to\infty$. Множину таких функцій позначають M.

В роботі [5] запропонована класифікація функцій на основі перетворення їхніх рядів Фур'є і позначено через L_β^ψ клас сумовних 2π-періодичних функцій $f(x)$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right),\quad \beta\in\mathrm{R},$$

є рядом Фур'є деякої функції з L, яка позначається f_β^ψ і називается (ψ,β)-похідною функції $f(x)$. Якщо $f\in C$, а $f_\beta^\psi\in L_\infty$ і при цьому $\|f\|_\infty\leq 1$, то клас таких функцій позначають $C_{\beta,\infty}^\psi$. Якщо ж $f_\beta^\psi\in H_\omega$, то його позначають $C_\beta^\psi H_\omega$.

Кожній функції $\psi\in\mathrm{M}$ поставлено у відповідність пару функцій $\eta(t)=\eta(\psi,t)$ і $\mu(t)=\mu(\psi,t)$, покладаючи [5]

$$\eta(t)=\psi^{-1}(\psi(t)/2),\quad \mu(t)=\frac{t}{\eta(t)-t}.$$

Через M_∞ позначають підмножину функцій $\psi\in\mathrm{M}$, для яких $\mu(\psi,t)$ при $t\to\infty$ монотонно зростає і необмежена зверху.

У даній роботі вивчається поведінка величини $\mathrm{E}_n(C_\beta^\psi H_\omega, Z_n^\psi)$ у випадку

$\psi \in \mathrm{M}_{\infty}$, де $\mathrm{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}, Z^{\psi}_n) = \sup\limits_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left| f(x) - Z^{\psi}_n(f) \right|$.

Нехай $\lambda_n(v)$, $0 \le v \le 1$, $n = 1, \ldots$ — послідовність функцій таких, що

$$\lambda_n(\tfrac{k}{n}) = 1 - \frac{\psi(n)}{\psi(k)}, \quad k = 1, \ldots, n-1, \qquad \lambda_n(v) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\psi(n)}{\psi(k)}, & \dfrac{1}{n} \le v \le 1, \\ 0, & v \ge 1, \end{cases}$$

$$\tau_n(v, \psi) = \tau_n(v) = \begin{cases} nv\psi(n), & 0 \le v \le \frac{1}{n}, \\ (1 - \lambda_n(v))\psi(nv), & \dfrac{1}{n} \le v \le 1, \\ \psi(nv), & v \ge 1. \end{cases}$$

Оскільки перетворення Фур'є $\hat{\tau}_n(t) = \dfrac{1}{n}\int\limits_0^{\infty} \tau_n(v) \cos\left(vt + \dfrac{\beta\pi}{2}\right) dv$ функції $\tau_n(v)$ є сумовною функцією на числовій прямій (див. [2], [4], [5]) то, як показано в [5], відхилення $\rho_n(f, x)$, $f \in C^{\psi}_{\beta}$, можна подати у вигляді $\rho_n(f, x) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x + \dfrac{t}{n}\right) \hat{\tau}(t)\, dt$. Крім того, у цьому випадку [5] $\tau_n(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t) \cos\left(vt + \dfrac{\beta\pi}{2}\right) dt$.

Справедливі такі теореми:

Теорема 1. Якщо $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} = 0$, $\psi \in \mathrm{M}_{\infty}$, то при $n \to \infty$

$$\mathrm{E}_n(C^{\psi}_0 H_{\omega}, Z^{\psi}_n) = \begin{cases} \dfrac{2\theta}{\pi}\psi(n)\int\limits_0^{\pi/2} \omega(2t)\, dt + o(1)\psi(n), & \omega\left(\dfrac{1}{n}\right)\ln(\min(n, \mu(n))) = o(1), \\ \dfrac{2\theta}{\pi^2}\psi(n)\ln(\min(n, \mu(n))) \times \\ \quad \times \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\dfrac{2t}{n}\right)\sin t\, dt + O(1)\psi(n), & \omega\left(\dfrac{1}{n}\right)\ln(\min(n, \mu(n))) \to \infty, \end{cases}$$

$$\mathrm{E}_n(C^{\psi}_0 H_{\omega}, Z^{\psi}_n) = O(1)\psi(n), \quad \omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln(\min(n, \mu(n))) = O(1), \text{ де } \frac{2}{3} \le \theta < 1.$$

Теорема 2. Нехай $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\neq 0$, $\psi\in\mathrm{M}_{\infty}$.

Якщо $\displaystyle\int_{\pi/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t}dt\le K$, то при $n\to\infty$

$$\mathrm{E}_n(C_{\beta}^{\psi}H_{\omega},Z_n^{\psi})=O(1)\,\psi(n);$$

якщо $\displaystyle\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\ln(\min(n,\mu(n)))=o\left(\int_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{t}dt\right)$, то

$$\mathrm{E}_n(C_{\beta}^{\psi}H_{\omega},Z_n^{\psi})=\frac{\theta}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\int_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{t}dt+O(1)\,\psi(n)\left[1+\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\ln(\min(n,\mu(n)))\right],$$

де $\dfrac{2}{3}\le\theta<1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Zygmund A.* The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke math. J.—1945.—**12**, N 4,—P. 695–704.

2. *Бушев Д. Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда.—К., 1984.—62 с.—(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 84.56).

3. *Гаврилюк В. Т.* О классах насыщения линейных методов суммированя рядов Фурье // Укр. мат. журн.—1988.—**38**, N 5.—С. 569–576.

4. *Ковальская И. Б.* Приближение классов периодических функций аналогами сумм Зигмунда в метрике C.—К., 1988.—28 с.—(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 88.14).

5. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.—К.: Наук. думка, 1987.—287 с.