

УДК 559.3

©2007 Л. П. Хорошун, Д. В. Бабич, Е. Н. Шикула

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН ИЗ ЗЕРНИСТОГО КОМПОЗИТА С ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТРИЦЕЙ И ПОВРЕЖДАЮЩИМИСЯ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Введение. Результаты исследования явления бифуркационной потери устойчивости пластин и оболочек из однородных и неоднородных изотропных повреждающихся линейно-упругих материалов представлены в работах [3 – 5]. Устойчивость тонкостенных элементов конструкций с учетом повреждаемости однородного физически нелинейного материала рассматривалась в [6, 7]. Особенностью повреждающихся линейно-упругих материалов является нелинейный характер деформирования, который обуславливается зависимостью концентрации повреждений в виде рассеянных квазисферических пор от величины нагрузки. Эффективные характеристики жесткости такого материала являются функциями компонентов тензора макродеформаций. Физически нелинейные повреждающиеся материалы также деформируются нелинейно с той разницей, что наряду с повреждаемостью дополнительной причиной нелинейности выступает физическая нелинейность (например, пластичность) сплошного материала. При этом, как и в случае повреждающихся линейно-упругих материалов, эффективные характеристики жесткости повреждающихся физически нелинейных материалов являются функциями компонентов тензора макродеформаций. Отмеченное обстоятельство позволяет при постановке задач бифуркационной устойчивости тонкостенных конструкций из повреждающихся линейно-упругих либо из физически нелинейных повреждающихся материалов пользоваться одинаковой процедурой вывода уравнений устойчивости, которая сводится к построению для них уравнений нейтрального равновесия в приращениях приведенных сил и моментов в точке бифуркации. Различия в уравнениях устойчивости для конкретных объектов связаны с видом нелинейности диаграммы деформирования материала, которая зависит от свойств материала и характера основного напряженного состояния. Поэтому процедура исследования устойчивости определенных пластин и оболочек носит конкретный характер, связанный с особенностями диаграмм деформирования (уравнений состояния) материала объекта и, в сущности, является синтезом методики решения задач устойчивости пластин и оболочек в нелинейно упругой области и результатов моделирования связанных процессов деформирования и повреждаемости материалов с различными механическими свойствами.

В качестве примера такого синтеза рассматривается задача устойчивости прямоугольной пластины из зернистого композита с физически нелинейной матрицей и повреждающимися включениями.

При выводе уравнений устойчивости пластин из физически нелинейного материала с учетом микроповреждаемости используется аналогия этой задачи с задачей устойчивости для упруго пластических тел на основе деформационной теории пластичности [1, 2]. Применительно к упруго пластическим и повреждающимся телам наиболее распространенными являются два подхода к определению критических нагрузок [1, 2]: концепция приведенно-модульной нагрузки и концепция продолжающегося нагружения. В первом случае критические нагрузки находят при фиксированных значениях действующей нагрузки (приведенно-модульные критические нагрузки), во втором – при ее возрастании (касательно-модульные нагрузки). Согласно концепции Шенли [2], сущность потери устойчивости при продолжающемся нагружении состоит

в том, что малое приращение внешних сжимающих воздействий вызывает малое, вполне определенное искривление оболочки, которое не сопровождается разгрузкой. С появлением частичной разгрузки сопротивление изгибу возрастает, поэтому становится возможным равновесие тела при определенном значении прогиба. До момента достижения некоторого уровня внешней нагрузки (касательно-модульной критической силы) в телах самопроизвольно ликвидируются малые возмущения их первоначальной формы. При этом минимальное значение критических усилий будет соответствовать деформированному состоянию тела без разгрузки, а максимальное – вполне определенному состоянию деформирования с разгрузкой в силу возрастания сопротивления изгибу. В [3] показано, что подход к исследованию устойчивости тонкостенных конструкций из повреждающихся материалов на основе концепции продолжающегося нагружения является более предпочтительным как с точки зрения точности результатов, так и с точки зрения упрощения решения задач устойчивости, поскольку в этом случае отпадает необходимость в определении зон разгрузки и догрузки. В связи с этим ниже рассматривается устойчивость пластин из зернистого композита с физически нелинейной матрицей и повреждающимися включениями на основе концепции продолжающегося нагружения.

§1. Определяющие уравнения для зернистого композита с повреждающимися включениями и физически нелинейной матрицей. В работе [8] построена теория деформирования зернистого композита с физически нелинейной матрицей, которое сопровождается микроповреждаемостью включений.

Микроповреждаемость включений моделируется образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Пусть включения материала имеют пористость p_1 . Физически нелинейное деформирование матрицы композита описывается зависимостью ее упругих модулей от деформаций. Обозначим модули объемного сжатия и сдвига материалов каркаса включений и матрицы соответственно K_1, μ_1 и K_2, μ_2 , а объемные содержания пористых включений и матрицы соответственно c_1, c_2 . Модули включений K_{1p} и μ_{1p} , которые определяются через K_1, μ_1 формулами

$$K_{1p} = \frac{4K_1\mu_1(1-p_1)^2}{3K_1p_1 + 4\mu_1(1-p_1)}; \quad \mu_{1p} = \frac{(9K_1 + 8\mu_1)\mu_1(1-p_1)^2}{3K_1(3-p_1) + 4\mu_1(2+p_1)}, \quad (1.1)$$

зависят от их пористости p_1 , а модули матрицы K_2 и μ_2 – от деформаций. Зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ можно представить в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \left(K^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (1.2)$$

причем эффективные модули объемного сжатия K^* и сдвига μ^* будут функциями пористости включений p_1 и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Определение эффективных модулей упругости зернистого композита с пористыми включениями и физически нелинейной матрицей сводится к следующему итерационному алгоритму. Эффективные модули объемного сжатия $K^{*(n)}$ и сдвига $\mu^{*(n)}$ в n -ом приближении определяются через соответствующие модули включений K_{1p}, μ_{1p} и матрицы в n -ом приближении $K_2^{(n)}, \mu_2^{(n)}$ формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{*(n)} &= c_1 \mathbf{K}_{1p} + c_2 \mathbf{K}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) - c_1 c_2 \frac{\left[\mathbf{K}_{1p} - \mathbf{K}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) \right]^2}{c_1 \mathbf{K}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) + c_2 \mathbf{K}_{1p} + n_c^{(n)}}; \\ \boldsymbol{\mu}^{*(n)} &= c_1 \boldsymbol{\mu}_{1p} + c_2 \boldsymbol{\mu}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) - c_1 c_2 \frac{\left[\boldsymbol{\mu}_{1p} - \boldsymbol{\mu}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) \right]^2}{c_1 \boldsymbol{\mu}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) + c_2 \boldsymbol{\mu}_{1p} + m_c^{(n)}}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)}$ – средние в матрице деформации в n -ом приближении;

$$n_c^{(n)} = \frac{4}{3} \boldsymbol{\mu}_c^{(n)}; \quad m_c^{(n)} = \frac{(9\mathbf{K}_c^{(n)} + 8\boldsymbol{\mu}_c^{(n)}) \boldsymbol{\mu}_c^{(n)}}{6(\mathbf{K}_c^{(n)} + 2\boldsymbol{\mu}_c^{(n)})}, \quad (1.4)$$

причем

$$\mathbf{K}_c^{(n)} = c_1 \mathbf{K}_{1p} + c_2 \mathbf{K}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right); \quad \boldsymbol{\mu}_c^{(n)} = c_1 \boldsymbol{\mu}_{1p} + c_2 \boldsymbol{\mu}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right), \quad (1.5)$$

если жесткость матрицы больше жесткости пористых включений, и

$$\mathbf{K}_c^{(n)} = \frac{\mathbf{K}_{1p} \mathbf{K}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right)}{c_1 \mathbf{K}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) + c_2 \mathbf{K}_{1p}}; \quad \boldsymbol{\mu}_c^{(n)} = \frac{\boldsymbol{\mu}_{1p} \boldsymbol{\mu}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right)}{c_1 \boldsymbol{\mu}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) + c_2 \boldsymbol{\mu}_{1p}} \quad (1.6)$$

в противном случае.

Средние в матрице деформации в $(n+1)$ -ом приближении $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n+1)}$, входящие в формулы (1.3), (1.5), (1.6), определяются через макродеформации $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \rangle$ по формулам

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n+1)} &= \\ &= - \left\{ \frac{2\boldsymbol{\mu}^{*(n)} \left[\boldsymbol{\mu}_{1p} - \boldsymbol{\mu}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) \right] \left(\mathbf{K}^{*(n)} - \mathbf{K}_{1p} \right) - 3\mathbf{K}^{*(n)} \left[\mathbf{K}_{1p} - \mathbf{K}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) \right] \left(\boldsymbol{\mu}^{*(n)} - \boldsymbol{\mu}_{1p} \right)}{6c_2 \boldsymbol{\mu}^{*(n)} \left[\boldsymbol{\mu}_{1p} - \boldsymbol{\mu}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) \right] \left[\mathbf{K}_{1p} - \mathbf{K}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) \right]} \times \right. \\ &\quad \left. \times \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{rr} \rangle \boldsymbol{\delta}_{ij} + \frac{\left(\boldsymbol{\mu}^{*(n)} - \boldsymbol{\mu}_{1p} \right)}{c_2 \left[\boldsymbol{\mu}_{1p} - \boldsymbol{\mu}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right) \right]} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В нулевом приближении матрицу принимаем линейно деформирующейся, т.е.

$$\mathbf{K}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(0)} \right) = \mathbf{K}_2(0); \quad \boldsymbol{\mu}_2 \left(\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^2 \rangle^{(0)} \right) = \boldsymbol{\mu}_2(0). \quad (1.8)$$

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \rangle$ определяются как предельные значения итерационного процесса

$$K^* = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{*(n)}; \quad \mu^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*(n)}. \quad (1.9)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала включений принимаем критерий прочности Губера – Мизеса

$$I_{\sigma}^{11} = k_1, \quad (1.10)$$

где $I_{\sigma}^{11} = \left(\langle \sigma_{ij}^{11} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{11} \rangle' \right)^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^{11} \rangle'$ по неповрежденной части материала включений; k_1 – предел микропрочности включений, являющийся случайной функцией координат.

Так как инвариант девиатора тензора средних напряжений по неповрежденной части материала включений I_{σ}^{11} связан с инвариантом девиатора средних деформаций во включениях $I_{\varepsilon}^1 = \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle' \right)^{1/2}$ зависимостями

$$I_{\sigma}^{11} = \frac{2\mu_{1p}}{1-p_1} I_{\varepsilon}^1, \quad (1.11)$$

а инвариант девиатора средних деформаций во включениях I_{ε}^1 определяется через инвариант $I_{\varepsilon} = \left(\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle' \right)^{1/2}$ для всего композита соотношением

$$I_{\varepsilon}^1 = \frac{\mu^* - \mu_2}{c_1 (\mu_{1p} - \mu_2)} I_{\varepsilon}, \quad (1.12)$$

то с учетом соотношений (1.11), (1.12) критерий прочности (1.10) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$\frac{2\mu_{1p} (\mu^* - \mu_2)}{c_1 (1-p_1) (\mu_{1p} - \mu_2)} I_{\varepsilon} = k_1. \quad (1.13)$$

Простейшим заданием одноточечной функции распределения $F_1(k_1)$ предела микропрочности k_1 неповрежденной части материала включений является степенной закон на некотором отрезке

$$F_1(k_1) = \begin{cases} 0, & k_1 < k_{10}; \\ \left(\frac{k_1 - k_{10}}{k_{11} - k_{10}} \right)^{n_1}, & k_{10} \leq k_1 \leq k_{11}; \\ 1, & k_1 > k_{11}, \end{cases} \quad (1.14)$$

а также распределение Вейбулла

$$F_1(k_1) = \begin{cases} 0, & k_1 < k_{10}; \\ 1 - \exp[-m_1(k_1 - k_{10})^{n_1}], & k_1 \geq k_{10}, \end{cases} \quad (1.15)$$

где k_{10} – минимальное значение предела микропрочности включений; k_{11} , m_1 , n_1 – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования.

Случайное поле предела микропрочности включений k_1 является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k_1 и распределение микронапряжений в материале включений при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F_1(k_1)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части включений, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k_1 . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^{11} \rangle$ функция $F_1(I_\sigma^{11})$ согласно (1.10), (1.14), (1.15), определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета включений. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то обозначая начальную пористость включений p_{10} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов включений или их пористости

$$p_1 = p_{10} + (1 - p_{10}) F_1(I_\sigma^{11}). \quad (1.16)$$

С учетом соотношений (1.11), (1.12) уравнение баланса пористости включений (1.16) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$p_1 = p_{10} + (1 - p_{10}) F_1 \left[\frac{2\mu_{1p}(\mu^* - \mu_2)}{c_1(1 - p_1)(\mu_{1p} - \mu_2)} I_\varepsilon \right], \quad (1.17)$$

где эффективный модуль сдвига μ^* и модуль сдвига включений μ_{1p} определяются формулами (1.1), (1.3) – (1.6).

Уравнения (1.1) – (1.8), (1.17) образуют замкнутую систему относительно макродеформаций, макронапряжений и пористости зернистых включений, описывающую процесс статистически однородного деформирования зернистого композита с физически нелинейной матрицей при повреждаемости в его включениях. Физическая нелинейность матрицы влияет на образование пористости во включениях при деформировании композита, изменение пористости включений в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования зернистого композита обусловлена физической нелинейностью материала его матрицы и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости во включениях при деформировании.

Решение задачи о деформировании зернистого композита с физически нелинейной матрицей при повреждаемости в его включениях в условиях заданных макродеформаций сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости зернистого материала с пористыми включениями и физически нелинейной матрицей, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (1.1), (1.3) – (1.8), и определению пористости включений из уравнения (1.17), что осуществляется

также определенным итерационным методом. Представим уравнение (1.17) для n -го шага итерационного процесса (1.1), (1.3) – (1.8) в виде

$$f_1^{(n)} \equiv p_1 - p_{10} - (1 - p_{10}) F_1 \left[\frac{2\mu_{1p} (\mu^{*(n)} - \mu_2^{(n)})}{c_1 (1 - p_1) (\mu_{1p} - \mu_2^{(n)})} I_\varepsilon \right]. \quad (1.18)$$

Тогда определение корня p_1 уравнения (1.18) на m -ом шаге некоторого итерационного процесса можно представить формулой

$$p_1^{(m,n)} = A_1 f_1^{(n)} (p_1^{(m-1,n)}), \quad (1.19)$$

где A_1 – определенный оператор, действующий на функцию $f_1^{(n)}(p_1)$.

Искомый корень определяется как предельное значение

$$p_1 = \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} p_1^{(m,n)}. \quad (1.20)$$

Соотношения (1.1) – (1.9), (1.18), (1.20) дают решение поставленной задачи, т.е. для заданного зернистого композита с физически нелинейной матрицей и микроповреждающимися включениями они определяют диаграммы макродеформирования (зависимости $\langle \sigma_{ij} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{pq} \rangle$).

При постановке задач устойчивости пластин наиболее удобно пользоваться секущими модулями упругости E^* , ν^* , которые через эффективные модули объемного сжатия и сдвига композита K^* , μ^* определяются формулами

$$E^* = \frac{9K^* \mu^*}{3K^* + \mu^*}; \quad \nu^* = \frac{3K^* - 2\mu^*}{6K^* + 2\mu^*}. \quad (1.21)$$

§2. Уравнения устойчивости пластин из зернистого композита с физически нелинейной матрицей и повреждающимися включениями.

Рассматривается пластина в прямоугольной системе координат $0x_1x_2x_3$, связанной со срединной плоскостью. Оси координат $0x_1$, $0x_2$ совмещены со сторонами пластины, а координата x_3 отсчитывается по нормали к срединной плоскости. Постановка задач устойчивости пластин проводится на основе уравнений состояния для плоского напряженного состояния ($\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$). С учетом равенства

$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu^*}{1 - \nu^*} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$ связь между макронапряжениями и макродеформациями

(здесь и далее угловые скобки опускаются) в этом случае имеет вид

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu^* E^*}{1 - \nu^{*2}} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \frac{E^*}{1 + \nu^*} \varepsilon_{ij} \quad (i, j, r = 1, 2). \quad (2.1)$$

Эффективные секущие характеристики упругости в (2.1) определяются формулами (1.21).

При выводе уравнений устойчивости пластин понадобятся уравнения связи конечных значений и приращений интенсивностей макронапряжений и макродеформаций, которые определяются вторыми инвариантами девиаторов тензоров макронапряжений и макродеформаций

$$I'_\sigma = \sqrt{2/3} \sqrt{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)}; \quad (2.2)$$

$$I'_\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(1-\nu^*)} \sqrt{(\varepsilon_{11} + \nu^* \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} + \nu^* \varepsilon_{11})^2 - (\varepsilon_{11} + \nu^* \varepsilon_{22}) \times (\varepsilon_{22} + \nu^* \varepsilon_{11}) + 3(1-\nu^*)^2 \varepsilon_{12}^2}. \quad (2.3)$$

С учетом (2.1) связь между интенсивностями (2.2), (2.3) и их приращениями определяется соотношениями

$$I'_\sigma = 2\mu^* I'_\varepsilon; \quad dI'_\sigma = 2\mu_k dI'_\varepsilon, \quad (2.4)$$

где $\mu_k = \mu^* + I'_\varepsilon \frac{\partial \mu^*}{\partial I'_\varepsilon}$ — касательный модуль сдвига.

Для исследования устойчивости пластины из физически нелинейного материала при микроповреждаемости будем исходить из уравнения нейтрального равновесия [3]

$$M_{ij,jj} + (T_{ij}^0 w_{,j})_{,i} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (2.5)$$

Здесь $M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \bar{\sigma}_{ij} dx_3$; $\bar{\sigma}_{ij}$; w соответственно обозначают приращения моментов и напряжений в пластине вследствие изгиба, а также прогибов срединной поверхности в возмущенном состоянии; $T_{ij}^0 = -\sigma_{ij}^0 h$ — тангенциальные усилия в основном безмоментном напряженном состоянии.

В (2.5) в общем случае усилия в основном напряженном состоянии T_{ij}^0 будут функциями тангенциальных координат x_1 , x_2 . Деформации пластины толщиной h при изгибе без учета поперечных касательных напряжений определяются выражениями

$$\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 w_{,ij}(x_1, x_2) \quad (i, j = 1, 2). \quad (2.6)$$

Для вычисления возмущений напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ необходима конкретизация предполагаемого механизма перехода пластины в возмущенное состояние подобно тому, как это делается при постановке задач устойчивости за пределом упругости [1, 2].

В [1, 2, 3] показано, что касательно-модульная модель приводит к меньшим значениям критической нагрузки по сравнению с приведенно-модульной. Поскольку теоретические значения критической нагрузки, как правило [1, 2], выше экспериментальных значений, то применение касательно-модульной модели при исследовании устойчивости пластин из физически нелинейного повреждающегося материала является более предпочтительным по сравнению с приведенно-модульной моделью. В связи с этим приращения напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ определяются путем варьирования в окрестности основного состояния уравнений (2.1) с учетом зависимостей (2.2) – (2.4). При этом интенсивности напряжений и деформаций в конечном счете будут определяться компонентами основного напряженного состояния σ_{ij}^0 в силу исчезающе малых, как это следует из постановки задачи о бифуркационной устойчивости, возмущений докритического напряженного состояния при переходе в бесконечно близкое равновесное состояние.

В результате варьирования соотношений (2.1) приращения напряжений представим в виде

$$\bar{\sigma}_{11} = a_{11} \bar{\varepsilon}_{11} + a_{12} \bar{\varepsilon}_{22} + a_{13} \bar{\varepsilon}_{12}; \quad \bar{\sigma}_{22} = a_{21} \bar{\varepsilon}_{11} + a_{22} \bar{\varepsilon}_{22} + a_{23} \bar{\varepsilon}_{12};$$

$$\bar{\sigma}_{12} = a_{31}\bar{\varepsilon}_{11} + a_{32}\bar{\varepsilon}_{22} + a_{33}\bar{\varepsilon}_{12}, \quad (2.7)$$

где коэффициенты a_{ij} , определяемые соотношениями

$$a_{11} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{11}}, \quad a_{12} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{22}}, \dots,$$

имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{11}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{22}^0]\sigma_{11}^0}{3(1-\nu^{*2})I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{12} &= \frac{\nu^*E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{22}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{11}^0]\sigma_{11}^0}{3(1-\nu^{*2})I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{22} &= \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{22}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{11}^0]\sigma_{22}^0}{3(1-\nu^{*2})I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{21} &= \frac{\nu^*E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{11}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{22}^0]\sigma_{22}^0}{3(1-\nu^{*2})I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{31} &= \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{11}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{22}^0]\sigma_{12}^0}{3(1-\nu^{*2})I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{32} &= \frac{(E_k - E^*)[(2\nu^*-1)\sigma_{11}^0 + (2-\nu^*)\sigma_{22}^0]\sigma_{12}^0}{3(1-\nu^{*2})I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{13} &= 2(E_k - E^*)\frac{\sigma_{11}^0\sigma_{12}^0}{(1+\nu^*)I_{\sigma^0}^2}; \quad a_{23} = 2(E_k - E^*)\frac{\sigma_{22}^0\sigma_{12}^0}{(1+\nu^*)I_{\sigma^0}^2}; \\ a_{33} &= \frac{E^*}{1+\nu^*} + 2(E_k - E^*)\frac{(\sigma_{12}^0)^2}{(1+\nu^*)I_{\sigma^0}^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В случае однородного докритического напряженно-деформированного состояния уравнение (2.5) с учетом соотношений (2.7), (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} D[a_1 w_{,1111} + a_2 w_{,1122} + a_3 w_{,2222} + 2a_4 w_{,1112} + 2a_5 w_{,1222}] - \\ - T_{11}^0 w_{,11} - 2T_{12}^0 w_{,12} - T_{22}^0 w_{,22} = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$a_1 = \bar{a}_{11}; \quad a_2 = \bar{a}_{12} + \bar{a}_{21} + 2\bar{a}_{33}; \quad a_3 = \bar{a}_{22}; \quad a_4 = \bar{a}_{13} + \bar{a}_{31}; \quad a_5 = \bar{a}_{23} + \bar{a}_{32};$$

$\bar{a}_{ij} = a_{ij} / E$; $D = Eh^3 / 12$; E – модуль упругости для неповрежденного материала включений.

При решении конкретных задач к уравнению (2.9) необходимо присоединить краевые условия, соответствующие характеру закрепления торцов пластины.

§3. Устойчивость пластин при одноосном сжатии. Рассмотрим в качестве примера задачу о потере устойчивости длинной пластины по цилиндрической форме изгиба при одноосном сжатии вдоль оси $0x_1$ ($T_{11}^0 \neq 0$). Уравнение (2.9) в этом случае принимает вид

$$Da_1 w_{,1111} - T_{11}^0 w_{,11} = 0, \quad (3.1)$$

где на основании (2.8) для рассматриваемой задачи коэффициент a_1 определяется выражением

$$a_1 = \frac{E^*}{(1 - \nu^{*2})E} + \frac{(E_k - E^*)(2 - \nu^*)}{2(1 - \nu^{*2})E}. \quad (3.2)$$

При шарнирном опирании длинных сторон пластины шириной b решение уравнения (3.1) имеет вид

$$w = A \sin \frac{n\pi x_1}{b}, \quad (3.3)$$

где n – количество полуволн формы потери устойчивости в направлении сжатия.

Критические напряжения, согласно (3.1), (3.3), определяются соотношением

$$\sigma_{11}^0 = \frac{\pi^2 h^2 E a_1}{12 b^2}. \quad (3.4)$$

Выражение для критических напряжений (3.4) является нелинейным относительно σ_{11}^0 уравнением и не дает явной информации о влиянии физической нелинейности матрицы и повреждаемости включений зернистого композитного материала на устойчивость пластины. Прямое решение нелинейных уравнений типа (3.4) для пластин заданных геометрических размеров можно осуществить с помощью итерационных методов с привлечением методики расчета эффективных параметров деформативности зернистого композита с физически нелинейной матрицей и повреждающимися включениями, подробно изложенной в §1.

Исследование влияния микроповреждаемости включений зернистого композита с физически нелинейной матрицей на устойчивость пластин при одноосном сжатии и других видах нагружения можно провести также по упрощенной процедуре. Целью этой процедуры является установление явной зависимости безразмерной толщины пластины h/b от параметра нагружения (в рассматриваемой задаче σ_{11}^0), которые связаны нелинейным соотношением (3.4). При других вариантах нагружения формула (3.4) поменяется.

Указанная процедура состоит в следующем:

в подходящем образом выбранном интервале $(0, \bar{\epsilon}_{11}^0)$ с некоторым шагом задается последовательность значений макродеформаций $(\epsilon_{11}^0)_i$;

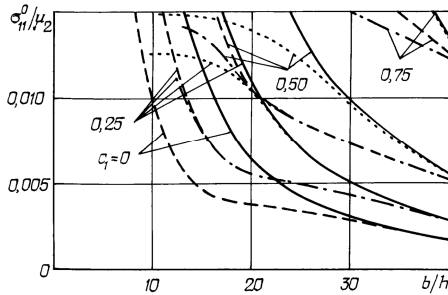
с использованием формул (1.1), (1.2), (1.17) итерационным методом определяется последовательность соответствующих значений эффективных модулей, пористости и макронапряжений $(\sigma_{11}^0)_i$, которые отождествляются с критическими напряжениями пластины;

последовательность значений касательного модуля вычисляется по формуле

$$(E_k)^i = \frac{(\sigma_{11}^0)_{i+1} - (\sigma_{11}^0)_i}{(\varepsilon_{11}^0)_{i+1} - (\varepsilon_{11}^0)_i}.$$

Относительные толщины пластин, соответствующие последовательности значений $(\sigma_{11}^0)_i$, определяются по формуле $\frac{h}{b} = \frac{2\sqrt{3\sigma_{11}^0}}{\pi\sqrt{a_1 E}}$.

Результаты вычислений по указанной схеме представлены на рисунке в виде гра-



фиков, где сплошными, штриховыми, пунктирными и штрихпунктирными линиями соответственно обозначены зависимости безразмерного параметра критических напряжений σ_{11}^0 / μ_2 от обратной величины относительной толщины пластины для зернистого композита с линейно упругой матрицей и сплошными включениями, для композита с физически нелинейной матрицей и сплошными включениями, для композита с линейно упругой

матрицей и повреждающимися включениями и для композита с физически нелинейной матрицей и повреждающимися включениями. Вычисления выполнены для пластин из зернистого композитного материала с нелинейно деформирующейся матрицей, причем ее объемные деформации являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в микрообъеме сплошного материала имеют место соотношения

$$\sigma_{rr}^2 = K_2 \varepsilon_{rr}^2; \quad \sigma_{ij}^{2'} = 2\mu_2 (S_2) \varepsilon_{ij}^{2'},$$

где K_2 – модуль объемного сжатия, который не зависит от деформаций. Модуль сдвига $\mu_2(S_2)$ описывается функцией

$$\mu_2(I_\varepsilon^1) = \begin{cases} \mu_2, & T_2 \leq T_{20}; \\ \mu_2' + \left(1 - \frac{\mu_2'}{\mu_2}\right) \frac{T_{20}}{2S_2}, & T_2 \geq T_{20}, \end{cases}$$

причем

$$S_2 = (\varepsilon_{ij}^{2'} \varepsilon_{ij}^{2'})^{1/2}; \quad T_2 = (\sigma_{ij}^{2'} \sigma_{ij}^{2'})^{1/2}; \quad T_{20} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{20},$$

$\varepsilon_{ij}^{2'}, \sigma_{ij}^{2'}$ – компоненты девиаторов соответственно деформаций и напряжений; σ_{20} – предел пропорциональности; μ_2, μ_2' – постоянные материала матрицы.

В качестве компонентов композита выбирались линейно упругие зерна с характеристиками $K_1 = 38,89$ ГПа; $\mu_1 = 29,17$ ГПа; и линейно-упрочняющаяся матрица с постоянными $K_2 = 3,33$ ГПа; $\mu_2 = 1,11$ ГПа; $\mu_2' = 2,89$ ГПа; $\sigma_{20} = 0,003$ ГПа.

Характер распределения микропрочности включений описывался законом Вейбулла с характеристиками разброса прочности $k_{10} = 0,009$ ГПа; $n_1 = 2$; $m_1 = 10^3$.

Представленные на рисунке результаты показывают, что физическая нелинейность матрицы и микроповреждаемость включений зернистого композитного материала приводят к понижению устойчивости пластин. Степень влияния указанных факторов на снижение критических нагрузок повышается с увеличением относительной толщины пластин.

РЕЗЮМЕ. Виконано постановку і дано розв'язок задач про біфуркаційну стійкість прямокутних пластин із зернистих композитних матеріалів з фізично нелінійною матрицею і пошкоджуваними включеннями.

SUMMARY. The statement is carried out and the solution is given for the problem of bifurcation stability of rectangular plates made of granular composite materials with the physically nonlinear matrix and damageable inclusions.

Key words: granular composite, physically nonlinear matrix, damageable inclusions, bifurcation stability, rectangular plate.

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 879 с.
2. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К. Вища шк., 1986. – 511 с.
3. Khoroshun L.P., Babich D.V. Problems of Plate Stability in Short-Term Damaging of a Material // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 2. – P. 898 – 905.
4. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Plates Made of Fibrous Composite with Damageable Components // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 5. – P. 532 – 537.
5. Khoroshun L.P., Babich D.V. Stability of Cylindrical Shells Made of Fibrous Composite with Damageable Matrix // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 6. – P. 675 – 681.
6. Khoroshun L.P., Babich D.V., Shikula E.N. Stability of Plates Made of a Damageable Physically Nonlinear Material // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 9. – P. 1029 – 1035.
7. Khoroshun L.P., Babich D.V., Shikula E.N. Stability of Cylindrical Shells Made of Damageable Physically Nonlinear Material // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 10. – P. 1129 – 1136.
8. Khoroshun L.P., Shikula E.N. A Theory of Short-Term Micromechanics of Homogeneous Material for the Physically Nonlinear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 4. – P. 388 – 395.

Ин-т механики им. С.П. Тимошенко
НАН Украины, Киев (Украина)

Поступила 22.05.2006