РОЗВ'ЯЗОК ОДНОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗАСОБАМИ MATHCAD

О.Л. Сєдих, С.В. Маковецька

Національний університет харчових технологій

Коло питань математичної фізики тісно пов'язано з вивченням різних фізичних процесів. До них відносяться явища, що вивчаються в гідродинаміці, теорії пружності, електродинаміки, тощо. Математичні задачі, які виникають при цьому і містять багато спільних елементів, складають предмет математичної фізики.

Постановка задач математичної фізики, яка тісно пов'язана з вивченням фізичних проблем, має свої специфічні риси. Так, наприклад, початкова та кінцева стадії процесу мають якісно різний характер і потребують застосування різних математичних методів.

Диференціальні рівняння в частинних похідних представляють собою одну з найбільш складних і одночасно цікавих задач обчислювальної математики. Ці рівняння характеризуються тим, що для їх вирішення не існує єдиного універсального алгоритму. Рівняннями в частинних похідних можна з успіхом моделювати найскладніші явища і процеси (дифузія, гідродинаміка, квантова механіка, екологія, тощо).

Диференціальні рівняння в частинних похідних потребують знаходження функції не однієї, як для ОДР, а декількох змінних, наприклад, f(x,y) або f(x,t). Постановка задач включає саме рівняння (або систему рівнянь), що містить похідні невідомої функції по різним змінним (частинні похідні), а також певну кількість крайових умов на границях розрахункової області. Розв'язувати диференціальне рівняння в частинних похідних можна шляхом програмування алгоритмів, що складені користувачем.

Розглянемо як приклад параболічного рівняння одномірне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

яке описує процес розподілу тепла в нерівномірно нагрітому металевому стержня, поверхня якого покрита теплоізоляційним матеріалом. Будемо нехтувати товщиною стержня, припускаючи, що в будь-якій точці довільно обраного перетину температура постійна.

Протягом певного проміжку часу на кінцях стержня підтримується постійна температура T_0, T_L, що необхідно вказати в граничних умовах:

$$T(t,0) = T_0 \quad T(t,L) = T_L \quad 0 \le t \le A$$

Початкова умова задає температуру стержня в момент часу t = 0:

$$T(0,x) = T_{\text{поч}}(x) \quad 0 \le x \le L$$

Коефіцієнт температуропровідності a є характеристикою матеріалу, яка враховує його щільність, теплоємність і теплопровідність.

Задамо рівняння, що описує процес дифузії тепла. Для цього нанесемо на розрахункову область сітку, у вузлах якої будемо шукати функцію T_{μ} - температуру ділянки i в момент часу j. Зауважимо, що довжина кроку k і h по тимчасовій і просторовій координатам j та i можуть і не співпадати. Тобто

$$T_{j+1} = T_j + k \quad T_{i+1} = T_i + h$$

Запишемо вихідне диференціальне рівняння в кінцево-різницевій формі:

$$\frac{T_{j+1,i} - T_{j,i}}{k} = \frac{a^2 T_{j,i-1} - 2T_{j,i} + T_{j,i+1}}{h^2}$$

Загальна температура стержня при t = j буде рішенням рівняння на часовому прошарку j. Звернемо увагу на те, що температуру в наступний момент часу j +1 можна виразити, виходячи з раніше знайдених значень T в трьох сусідніх вузлах і попереднього тимчасового прошарку j. Такого роду схеми називаються явними.

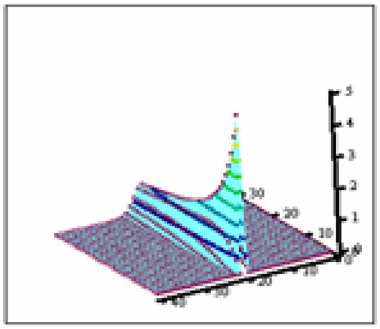
$$T_{j+1,i} = c \cdot T_{j,i-1} + (1 - 2 \cdot c) \cdot T_{j,i} + c \cdot T_{j,i+1}, \quad \text{де} \quad c = \frac{a^2 \cdot k}{h^2}$$

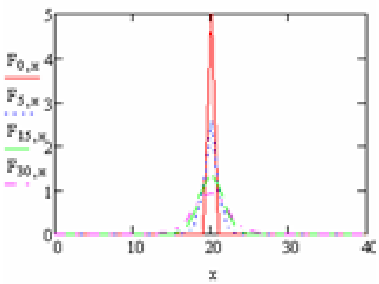
Рішення, отримане за допомогою наведеної різницевої схеми, представлено у вигляді програми, яка реалізована в середовищі MathCad.

$A := 30 \quad L := 40 \quad n := 30 \quad m := 500 \quad a := 1 \qquad x := 0..40$

$$h := \frac{A}{n-1} \qquad k := \frac{L}{m-1} \qquad c := \frac{a^2 \cdot k}{h^2}$$

```
F := | for j ∈ 0..A − 1
     |   for i ∈ 1..L − 1
     |     | T0,20 ← 5
     |     | Tj,0 ← 0
     |     | Tj,40 ← 0
     |     | Tj+1,i ← c·(Tj,i−1 − 2·Tj,i + Tj,i+1) + Tj,i
     | T
```





Література:

1. *Гурский Д.А., Турбина Е.С.* Вычисления в MathCad 12. – СПб.: Питер, 2006

2. *Карслоу Г.С.,* Теория теплопроводности, пер. с англ., М.: Приор, 2002.

3. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных: Учеб.пособие. М.: Наука, 1983. 424 с.