

17. Аналітичний розв'язок однорідного рівняння теплопровідності для одновимірної області з однорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою

Тарас Погорілий

Національний університет харчових технологій

Вступ. При математичному моделюванні процесу рекристалізації за коливальним механізмом, базуючись на комірчастій моделі колективного росту і розчинення кристалів сахарози, для знаходження аналітичного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності для однієї одновимірної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою спочатку необхідно знайти аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для однієї одновимірної області з однорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою. Дана задача математично формулюється наступним чином: необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = a \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, \quad (1)$$

де $v_1(x, t)$, °C — функція розподілу температури в одновимірній області $D = \{x \mid x_1 \leq x \leq x_2\}$, в залежності від координати x , м та часу t , с; $a = \lambda / (c \cdot \rho)$, м/с² — коефіцієнт температуропровідності; λ , Вт/(м·К) — коефіцієнт теплопровідності; c , кДж/(кг·К) — теплоємність; ρ , кг/м³ — густина речовини, з неоднорідними граничними умовами другого роду

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{x=x_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{x=x_2} = 0, \quad (t \geq 0), \quad (2)$$

на відповідних границях одновимірної області D , та при наступній неоднорідній початковій умові:

$$v_1(x, t) \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad (x_1 \leq x \leq x_2; t \geq 0), \quad (3)$$

де $\psi(x)$ — неперервна обмежена функція для всіх значень x , таких що $(x_1 \leq x \leq x_2)$.

Матеріали і методи. Для знаходження розв'язку даної задачі використаємо метод розділення змінних Фур'є. В даному випадку метод Фур'є можливо застосувати безпосередньо для розв'язання поставленої нестационарної задачі теплопровідності (1)–(3) в силу однорідних (тобто таких, що дорівнюють тотожно нулю) граничних умов (2).

Таким чином, представимо функцію розподілення тепла у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить від своєї змінної:

$$v_1(x, t) = X(x) \cdot T(t) \neq 0, \quad (x_1 \leq x \leq x_2; t \geq 0), \quad (4)$$

де функція $X(x)$ — залежить лише від змінної координати x , а функція $T(t)$ — залежить лише від змінної часу t . В результаті розв'язку даної задачі приходимо до задачі про власні значення та власні функції, що ще носить назву задача Штурма-Ліувілля.

Таким чином, в результаті розв'язання поставленої задачі (1)–(3), отримуємо такі власні числа:

$$\lambda_n(x) = \left(\frac{n\pi}{x_2 - x_1} \right)^2, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Цим власним числам λ_n , ($n \geq 0$), отриманим у виразі (5) відповідають наступні знайдені власні функції X_{1_n} , ($n \geq 0$):

$$X_{1_n}(x) = \cos \frac{n\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1}, \quad (x_1 \leq x \leq x_2; n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Власним числам λ_n , ($n \geq 0$), отриманим у виразі (5) також відповідають функції:

$$T_{1_n}(t) = A_n \cdot e^{-a \cdot \left(\frac{n\pi}{x_2 - x_1} \right)^2 \cdot t}, \quad (t \geq 0; n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Тоді розв'язок задачі (1)–(3) на основі (6)–(7) запишеться у вигляді

$$v_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos \frac{n\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1} \cdot e^{-a \cdot \left(\frac{n\pi}{x_2 - x_1} \right)^2 \cdot t}, \quad (x_1 \leq x \leq x_2; t \geq 0). \quad (8)$$

Результати. Представлено (8) аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для однієї одновимірної області з однорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою.

Висновки. На основі знайденого розв'язку (8) можна знайти аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для однієї одновимірної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою. Таким чином, на основі знайденого розв'язку (8) цього долається ще один етап по створенню математичної моделі процесу рекристалізації за коливальним механізмом, базуючись на комірчастій моделі колективного росту і розчинення кристалів сахарози.

Література

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. — М.: Высшая школа. 1970. — 712 с.