18. ПРО УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПАРАБОЛІЧНИМ ПРОЦЕСОМ В КРУГОВОМУ СЕКТОРІ

Олексій Капустян, Олена Капустян
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Олег Мазур
Національний університет харчових технологій

Вступ. Розглядається задача керування параболічним процесом в круговому секторі. Задача не допускає ні повного розщеплення, ні застосування L^2 - теорії.

Методи. Для розв'язання поставленої задачі в класі розподілених керувань використовується біортонормовані системи функцій та подальший аналіз розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма.

В області $Q=(0;\ T)\times\Omega,\ \Omega=\{(r;\ \theta)|r\in(0;\ 1),\ \theta\in(0;\ \pi)\}$ досліджується розв'язність наступної задачі оптимального керування: знайти функцію стану $y=y(t;\ r;\ \theta)$ і керування $u=u(t;\ \theta)$ такі, що

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}=\Delta y+g(r)\cdot u(t;\ \theta), \quad (t;\ r;\ \theta)\in Q, \\ y|_{r=1}=y|_{\theta=0}=0,\ \dfrac{\partial y}{\partial\theta}|_{\theta=0}=\dfrac{\partial y}{\partial\theta}|_{\theta=\pi}, \\ y|_{t=0}=h(r)p(\theta), \end{cases} \tag{1}$$

$$J(y;\ u)=\int_0^1 r\|y(T;\ r)\|_D^2\,dr+\int_0^\tau\|u(t)\|_D^2\,dt\to\inf\ , \tag{2}$$

де $g,\ h,\ p$ — задані функції, $\|\cdot\|_D$ — норма в $L^2(0;\ \pi)$, що задається рівністю

$$\|\upsilon\|_D=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^\pi\upsilon(\theta)\psi_n(\theta)d\theta\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де системи функцій

$$\psi=\left\{\psi_0=\frac{2}{\pi^2},\ \psi_{2n}=\frac{4}{\pi^2}(\pi-\theta)\sin 2n\theta,\ \psi_{2n-1}=\frac{4}{\pi^2}\cos 2n\theta\right\},$$

$$\phi=\{\varphi_0=\theta,\ \varphi_{2n}=\sin 2n\theta,\ \varphi_{2n-1}=\theta\cos 2n\theta\}$$

є біортонормованими і повними в $L^2(0;\ \pi)$.

Результати. За допомогою цих функцій задача (1), (2) зводиться до послідовності зв'язаних між собою початково-крайових задач (3), (4), (5) в області $\Pi=(0;\ T)\times(0;\ 1)$ з функціоналом якості (6).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_0}{\partial t}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial y_0}{\partial r}\right)+u_0(t)\cdot g(r),\ (t;r)\in\Pi \\ y_0(t;1)=0,\ t\in(0;\ T) \\ y_0(0;\ r)=p_0\cdot h(r),\ r\in(0;1) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_{2n-1}}{\partial t}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\dfrac{\partial y_{2n-1}}{\partial r}\right)-\left(\dfrac{2n}{r}\right)^2\cdot y_{2n-1}+u_{2n-1}(t)\cdot g(r), \qquad (t;r)\in\Pi \\ y_{2n-1}(t;1)=0, \qquad t\in(0;T) \\ y_{2n-1}(0;r)=p_{2n-1}\cdot h(r), \quad r\in(0;1) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_{2n}}{\partial t} = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \dfrac{\partial y_{2n}}{\partial r} \right) - \left(\dfrac{2n}{r} \right)^2 \cdot y_{2n} - \dfrac{4n}{r^2} y_{2n-1} + u_{2n}(t) \cdot g(r), \ (t; r) \in \Pi \\ y_{2n}(t; 1) = 0, \quad t \in (0; T) \\ y_{2n}(0; r) = p_{2n} \cdot h(r), \quad r \in (0; 1) \\ \end{cases} \tag{5}$$

$$J(y; u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 r \cdot y_n^2(T; r)\, dr + \int_0^T u_n^2(t)\, dt \right) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \tag{6}$$

Висновки. Доведено, що задача (1), (2) має єдиний розв'язок $\{\tilde{y};\ \tilde{u}\}$, причому

$$\tilde{u}(t;\ \theta) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{u}_u(t) \varphi_n(\theta),$$

де функції $\{\tilde{u}_n\}_{n=0}^{N}$ визначаються з інтегральних рівнянь Фредгольма, ядра яких виписуються явно за допомогою функцій Бесселя $\{J_{2n}\}_{n=0}^{N}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Моисеев, Е.И. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней задачи / Е.И. Моисеев, В.Э. Амбарцумя // Дифференциальные уравнения. - 2008. - Т. 16. № 5. - С. 718-725.

2. Kapustyan, V.O. Problem of optimal control for the Poisson equation with nonlocal boundary conditions / V.O. Kapustyan, O.A. Kapustyan, O.K. Mazur // Journal of Mathematical Sciences. - 2014. —Vol. 201, № 3. — P. 325-334.