МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

М.А. МАРТИНЕНКО
О.П. ЗІНЬКЕВИЧ
А.М. ТКАЧУК

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів напрямів підготовки
6.051701 «Харчові технології та інженерія», 6.051401 «Біотехнологія»,
6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування», 6.040101 «Готельно-ресторанна справа»
денної та заочної форм навчання

СХВАЛЕНО
на засіданні кафедри
вищої математики
протокол № 16
від 01.06. 2010 р.

КИЇВ НУХТ 2010

Мартиненко М.А., Зінькевич О.П., Ткачук А.М. Вища математика: Конспект лекцій для студентів напрямів підготовки 6.051701 «Харчові технології та інженерія», 6.051401 «Біотехнологія», 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування», 6.040101 «Готельно-ресторанна справа» − К.: НУХТ, 2010. − 223 с.

Рецензент **І.П. Вовкодав,** к-т фіз.-мат. наук

М.А. МАРТИНЕНКО, д-р фіз.-мат. наук
О.П. ЗІНЬКЕВИЧ
А.М. ТКАЧУК, к-ти фіз.-мат. наук

Видання подається в авторській редакції

ЛЕКЦІЯ 1

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Визначники та їх властивості.
Розклад визначників та їх обчислення.
Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.
Однорідні системи лінійних рівнянь.

1.1 Визначники та їх властивості

Означення. Вираз $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ називається визначником (детермінантом) другого порядку.

Тут a_{ij} $(i, j = 1,2)$ – елементи визначника, перший індекс означає номер рядка, другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент.

Діагональ зліва вниз направо називається головною діагоналлю, інша діагональ називається побічною.

Приклади. Обчислити визначники другого порядку.

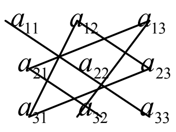
1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = 14$. 2. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$.

Означення . Вираз

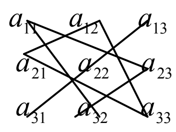
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

називається визначником третього порядку.

Правило обчислення визначника третього порядку можна записати у вигляді:



а) “ + ”



б) “ – “

В таблиці а) лініями з‘єднані ті елементи, добуток яких береться із знаком “плюс”, а в таблиці б) ті елементи, добуток яких береться із знаком “мінус”.

Приклад. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=1\cdot 2\cdot 2+2\cdot 3\cdot 3+(-1)\cdot 5\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 3-2\cdot 5\cdot 2-1\cdot 3\cdot 1=28-28=0 .$$

Властивості визначників:

1. Величина визначника не зміниться, якщо рядки (стовпці) замінити відповідними стовпцями (рядками). Тому всі наступні властивості, які сформульовані для рядків, виконуються також і для стовпців.

2. Якщо будь-який рядок визначника складається лише з нулів, то визначник дорівнює нулю.

3. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (не обов‘язково сусідні), то зміниться знак визначника.

4. Якщо визначник містить два однакові рядки, то він дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи деякого рядка визначника помножити на довільне число, то сам визначник помножиться на це число.

6. Визначник, який містить два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

7. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного з його рядків додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне й те ж саме число, відмінне від нуля.

1.2 Розклад визначників та їх обчислення

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслювання i-го рядка та j-го стовпця.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається мінор цього елемента, помножений на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} .$$

Теорема 1 (про розклад визначника). Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів:

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} .$$

Наприклад $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}, \qquad (i=1,2,3).$$

Права частина цієї рівності називається розкладом визначника за елементами i-го рядка.

Для обчислення визначників порядку $n \geq 3$ користуються властивостями визначників та теоремою про розклад визначника, яка дозволяє перейти до обчислення визначників нижчого порядку.

Приклад. Обчислити визначник, розклавши його за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-6-2) - 5(9-8) + (3+8) = -2\cdot 8 - 5 + 11 = -21 + 11 = -10.$$

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення. Системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де x_i $\left(i = 1,2,\ldots,n\right)$ – невідомі, a_{ij} – коефіцієнти при невідомих, b_i $\left(i = 1,2,\ldots,m\right)$ – вільні члени.

Розв'язком системи називається упорядкована множина чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка перетворює кожне рівняння системи на тотожність.

Означення. Система називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв‘язок; сумісна система називається визначеною, якщо вона має тільки один розв‘язок, і невизначеною, якщо вона має безліч розв‘язків; система називається несумісною, якщо вона не має жодного розв‘язку.

1.4 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Нехай задано систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими x_1, x_2.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на a_{22}, друге ─ на $-a_{12}$, а потім складемо їх; після цього перше рівняння помножимо на a_{21}, а друге ─ на $-a_{11}$ і складемо їх. Дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ x_2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 \cdot \Delta = \Delta_1; \\ x_2 \cdot \Delta = \Delta_2, \end{cases}$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Визначник Δ, складений з коефіцієнтів системи, називається визначником системи. Визначники Δ_1 та Δ_2 утворюються з визначника Δ відповідно заміною стовпців при невідомих вільними членами.

При розв’язуванні системи можуть бути такі випадки:

1) $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний розв’язок: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

2) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, тоді система має безліч розв’язків, тобто є невизначеною;

3) $\Delta = 0$; $\Delta_1 \neq 0$ або $\Delta_2 \neq 0$, тоді система не має розв’язків, тобто є несумісною.

Розглянемо тепер систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то остання система має єдиний розв’язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Приклад. Розв’язати систему $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$

Розв’язання. Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 36.$$

Так як визначник системи $\Delta \neq 0$, то для розв'язування системи можна скористатись формулами Крамера. Обчислимо визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \\ 12 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 36, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \\ 2 & 12 & 2 \end{vmatrix} = -72, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 72.$$

За формулами Крамера маємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{36}{36} = 1; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-72}{36} = -2; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{72}{36} = 2.$$

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$.

1.5 Однорідні системи лінійних рівнянь

Нехай задано однорідну ($b_1 = b_2 = b_3 = 0$) систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

Однорідна система завжди сумісна, так як вона має розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, який називається нульовим або тривіальним.

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то тривіальний розв'язок буде єдиним розв'язком системи.

Якщо $\Delta = 0$, тоді система має нескінченну множину розв'язків. Розглянемо два випадки.

1. Припустимо, що у визначнику Δ існує принаймні один відмінний від нуля мінор другого порядку. Нехай, наприклад, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Візьмемо ті рівняння системи, що містять відмінний від нуля мінор, і запишемо їх у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3. \end{cases}$$

За формулами Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta_1 x_3}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2 x_3}{\Delta}$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$. Оскільки x_3 може набувати довільних дійсних значень, покладемо $x_3 = \Delta \cdot t$, де t – довільне дійсне число. Одержимо:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \qquad x_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot t, \qquad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t.$$

2. Нехай тепер $\Delta = 0$ і всі його мінори другого порядку дорівнюють нулю. Це означає, що коефіцієнти всіх трьох рівнянь системи пропорційні, тому система зводиться до одного рівняння з трьома невідомими. Надаючи двом невідомим довільних значень, знайдемо відповідне їм третє невідоме.

Приклад. Розв’язати систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Складаємо і обчислюємо визначник системи Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Знаходимо: $x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \cdot t = -18t;$ $\quad x_2 = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} \cdot t = 10t;$ $\quad x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 7t$.

Одержуємо розв’язок

$$x_1 = -18t, \qquad x_2 = 10t, \qquad x_3 = 7t.$$

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Дайте поняття визначника та сформулюйте його властивості.

2. Якщо у визначнику поміняють місцями два сусідніх стовпці(рядки), то він змінить знак. Доведіть цю властивість і наслідок, який витікає з неї про величину визначника з двома однаковими стовпцями (рядками).

3.Доведіть властивість визначника: якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) помножити на одне і те ж число m, то значення визначника помножиться на число m. Які наслідки випливають із цієї властивості? Покажіть цю властивість і наслідки на прикладах.

4.Сформулюйте і доведіть теорему про розклад визначника за елементами його рядка (стовпця).

5.Що називається мінором і алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника 3-го порядку?

6. Як записується система m лінійних рівнянь з n невідомими?

7. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?

8. Запишіть формули Крамера. Коли застосовуються формули Крамера?

9. За якою умовою однорідна система лінійних рівнянь має єдиний тривіальний розв’язок; безліч розв’язків?

10. Розв’яжіть системи лінійних рівнянь

1. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 4x_2 = 8. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -9. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Відповіді: 1. (0; 2). 2. (1; 2). 3. (-1; 2 ; 0). 4. (1; -1; 2). 5. (1; 0; 3). 6. (1; 2; 1). 7. (2; -2; 3). 8. (1; 2; -2). 9. (0; 0; 0). 10. (0; 0; 0). 11. $(-t; 5t; 3t)$. 12. $(7t; 8t; 13t)$.

ЛЕКЦІЯ 2

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Поняття вектора.
Лінійні дії над векторами.
Лінійна незалежність векторів.
Розклад вектора за базисом.
Поділ відрізка в даному відношенні.
Скалярний добуток векторів.

2.1 Поняття вектора

Напрямлений відрізок $\overline{AB}$ прямої називається вектором. Модулем (довжиною) вектора називається відстань між його початком та кінцем. Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається нульовим вектором, його модуль дорівнює нулю, а напрямок не визначений.

Позначається вектор $\bar{r}$, $\overline{F}$, $\overline{AB}$; модуль – $|\bar{r}|$, $|\overline{F}|$,$|\overline{AB}|$. Нульовий вектор позначається $\bar{o}$.

Вектори вважаються рівними, якщо вони мають рівні модулі й однаковий напрямок. З цього випливає, що рівні вектори можна переносити паралельно самим собі (від цього не зміняться їхні модулі й напрямок).

2.2 Лінійні дії над векторами

До лінійних дій з векторами належать додавання і віднімання векторів, множення вектора на скаляр.

1. *Додавання векторів*. Вектор $\bar{c}$ називається сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо він з'єднує початок вектора $\bar{a}$ з кінцем вектора $\bar{b}$ за умови, що початок $\bar{b}$ збігається з кінцем вектора $\bar{a}$ (рис. 1).

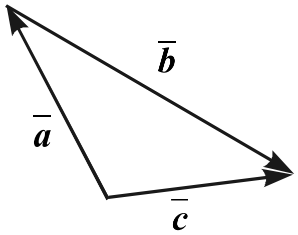


Рис. 1. Додавання векторів за правилом трикутника

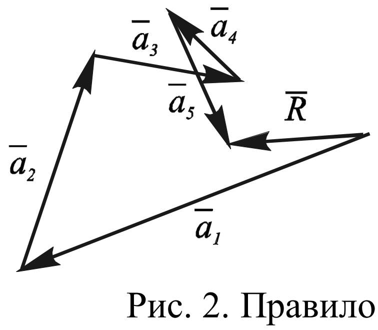


Рис. 2. Правило багатокутника

Якщо ж число векторів більше двох, то справедливо правило багатокутника (рис. 2).

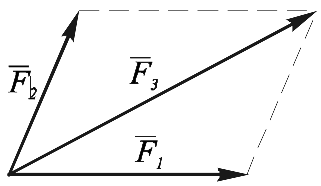


Рис. 3. Додавання сил за правилом паралелограма

Суму двох векторів можна побудувати також за правилом паралелограма (рис.3).

2. *Віднімання векторів.*

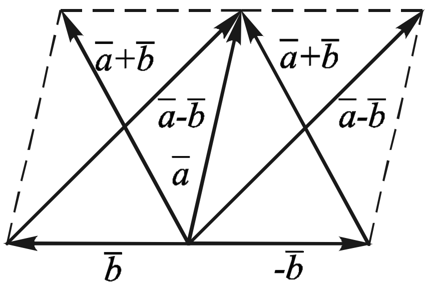


Рис. 4. Різниця векторів

Віднімання векторів може бути визначене через їхнє додавання. Для цього необхідно ввести в розгляд протилежний вектор. Вектор $\left(-\overline{b}\right)$ називається протилежним даному вектору $\overline{b}$, якщо він має модуль рівний модулю вектора $\overline{b}$, і протилежний напрям. Тоді під різницею векторів $\overline{a}-\overline{b}$ слід розуміти суму $a+\left(-\overline{b}\right)$ (рис. 4).
Одна діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$ визначає суму, а інша – різницю векторів.

3. *Множення вектора на скаляр*. Добутком вектора $\overline{a}$ на скаляр (число) λ є вектор $\lambda\overline{a}$ $\left(\overline{a}\lambda\right)$, довжина якого дорівнює добутку модуля даного вектора на абсолютну величину скаляра, і напрям якого збігається з напрямом даного вектора, якщо скаляр додатній, і протилежний, якщо скаляр менше нуля.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ – комутативний закон.
2. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$ – асоціативність відносно додавання.
3. $\lambda\cdot\left(\mu\overline{a}\right)=\mu\cdot\left(\lambda\overline{a}\right)$ – асоціативність відносно множення чисел, μ - скалярний множник.
4. $\lambda\cdot\left(\overline{a}\pm\overline{b}\right)=\lambda\overline{a}\pm\lambda\overline{b}$ – дистрибутивність відносно додавання векторів.
5. $\left(\lambda\pm\mu\right)\cdot\overline{a}=\lambda\overline{a}\pm\mu\overline{a}$ – дистрибутивність відносно додавання чисел.

2.3 Лінійна незалежність векторів

Означення. Вираз виду $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+...+\lambda_n\overline{a}_n$, де $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$ – вектори, а $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ – скаляри, називається лінійною комбінацією векторів.

Означення. Система векторів $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_n$, серед яких є не нулеві, називається лінійно залежною, якщо їхня лінійна комбінація є нульовим вектором за умови, що не всі скалярні множники λ_i дорівнюють нулю, тобто

$\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+...+\lambda_n\overline{a}_n=0$, за умови, що існує i, $i=1,2,...,n:\lambda_i\neq 0$.

Означення. Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ називається лінійно незалежною, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нулю тільки при умові, що всі скалярні множники λ_i дорівнюють нулю, тобто

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + ... + \lambda_n\bar{a}_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i,\ i = 1,2,...,n : \lambda_i = 0.$$

Означення. Вектори називаються колінеарними (рис. 5), якщо вони лежать на паралельних прямих. Вектори, що лежать на паралельних площинах, називаються компланарними (рис. 6).

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Нульовий вектор вважається компланарним будь-якій системі компланарних векторів.

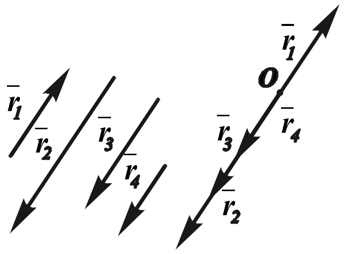


Рис.5. Колінеарні вектори

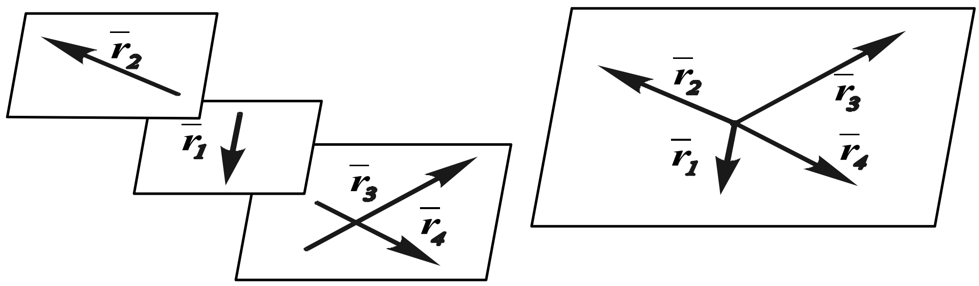


Рис.6. Компланарні вектори

Теорема 1. Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

Теорема 2. Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

2.4 Розклад вектора за базисом

Три не компланарних, тобто, лінійно незалежних вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ і $\bar{e}_3$ утворюють базис – систему векторів, через які може бути виражений будь-який інший вектор простору як їхня лінійна комбінація. Паралельним переносом можна привести ці вектори до загального початку. З кожним із них можна пов'язати однаково напрямлену з ним вісь. Ці осі й утворять у загальному випадку так названу афінну систему координат (рис. 7.).

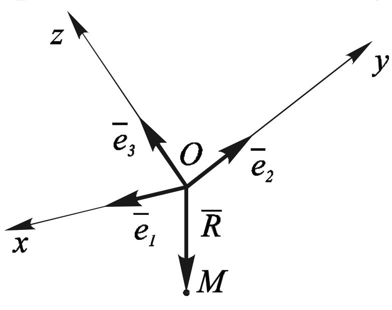


Рис. 7. Афінна система координат

Якщо в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ справедливий розклад довільного вектора $\bar{R}$, у вигляді:

$$\bar{R} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3 = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\bar{e}_i,$$

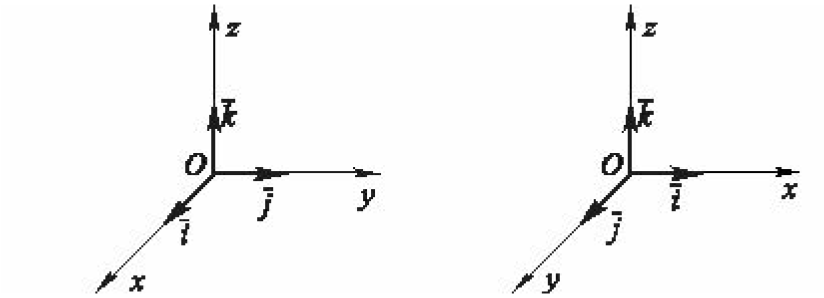
то числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називають координатами вектора і позначають $\bar{R} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Правило 1. Щоб скласти (відняти) два вектори, потрібно скласти (відняти) їхні відповідні координати.

Правило 2. Щоб помножити (поділити) вектор на число, необхідно помножити (поділити) на це число його координати.

Розглянемо окремий випадок афінної системи координат, у якої координатні осі взаємно перпендикулярні. Така система координат називається прямокутною. Базисні вектори в цьому випадку позначаються через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, вважаючи $\bar{i}$ першим, $\bar{j}$ – другим, $\bar{k}$ – третім вектором, і називають ортами, а відповідні їм осі позначають *0x*, *0y*, *0z*, крім того $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$.

Виділяють праву і ліву системи координат. Система координат і сама координатна трійка називається правою (лівою) (рис. 8), якщо з кінця вектора $\bar{k}$ поворот від вектора $\bar{i}$ до вектора $\bar{j}$ по найменшому куту відбувається проти годинникової (по годинниковій стрілці).



а) б)

Рис. 8. Прямокутна система координат:
а) права, б) ліва

На практиці найчастіше використовується права система координат.

Теорема 3. Координати вектора $\bar{R}=(x,\ y,\ z)$ є його проекціями на осі в прямокутній системі координат.

Якщо задані координати точок $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$, то координати вектора $\overline{AB}$ обчислюються:

$$\overline{AB} = \{x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A\}.$$

Довжина вектора обчислюється за формулою:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\ .$$

Вектор $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ утворює з осями декартової прямокутної системи координат *Ox, Oy, Oz* відповідно кути α, β, γ, які повністю визначають напрям вектора. Координати цього вектора задовольняють рівності:

$$a_x = |\bar{a}|\cos\alpha,\ \ a_y = |\bar{a}|\cos\beta,\ \ a_z = |\bar{a}|\cos\gamma.$$

Косинуси кутів α, β і γ, називаються напрямними косинусами і визначаються з співвідношень:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}}; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}}.$$

Сума квадратів напрямних косинусів дорівнює одиниці:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

2.5 Поділ відрізка в даному відношенні

Розглянемо відрізок заданий у системі координат *0xyz* своїм початком $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і кінцем $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 9).

На даному відрізку знайдемо таку точку $M(x, y, z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто

$$\frac{M_1M}{M_2M} = \lambda.$$

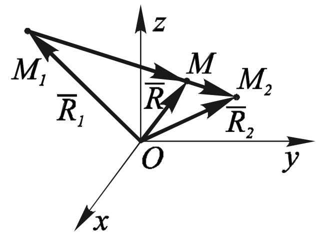


Рис.9. Поділ відрізка в даному відношенні

Розглянемо вектори $\overline{R}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{R}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ і $\overline{R} = (x, y, z)$. Вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{MM_2}$ – колінеарні. Тому

$$\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}.$$

Але $\quad \overline{M_1M} = \overline{R} - \overline{R_1}; \quad \overline{MM_2} = \overline{R_2} - \overline{R}.$

Тому $\quad \overline{R} - \overline{R_1} = \lambda(\overline{R_2} - \overline{R}).$

Розв’язуючи це рівняння відносно вектора $\overline{R}$, будемо мати:

$$\overline{R} = \frac{\overline{R}_1 + \lambda\overline{R}_2}{1+\lambda}.$$

Переходячи від векторної до координатної форми, одержимо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Ці формули виражають координати точки *M*.

2.6 Скалярний добуток векторів

Означення. Проекцією вектора $\overline{a}$ на вісь u називається величина відрізка $A'B'$ осі u, де A' і B' – відповідно проекції початку і кінця вектора $\overline{a}$ на вісь u (рис. 10).

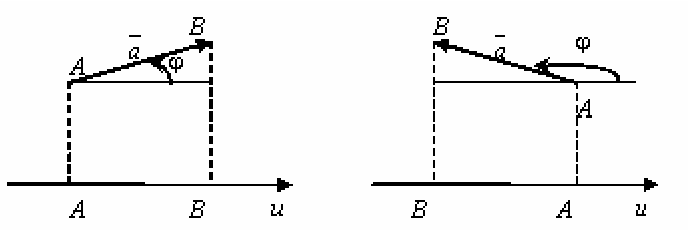


Рис.10

Проекцію вектора $\bar{a}$ на вісь u можна знайти за формулою: $np_u \bar{a} = |\bar{a}| \cos\varphi$, де φ - кут між вектором $\bar{a}$ і додатним напрямком осі u.

Зазначимо такі властивості проекцій векторів:

1) проекція суми векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ на вісь u дорівнює сумі проекцій цих векторів: $np_u(\bar{a}+\bar{b}) = np_u\bar{a} + np_u\bar{b}$;

2) при множенні вектора на число, проекція вектора на вісь також множиться на це число: $np_u(\lambda\bar{a}) = \lambda\, np_u\bar{a}$.

Введемо дію множення векторів, результатом виконання якої є скаляр.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Скалярний добуток двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ позначається: $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

За означенням, $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi$, де φ – кут між векторами. Дане означення можна переписати інакше:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\left(|\bar{b}|\cdot\cos\varphi\right) = |\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\left(|\bar{a}|\cdot\cos\varphi\right) = |\bar{b}|np_{\bar{b}}\bar{a}\ .$$

Розглянемо алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1. $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ – комутативна властивість множення..
2. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$ – дистрибутивна властивість відносно додавання векторів. Дійсно,

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = |\bar{a}|np_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c}) = |\bar{a}|(np_{\bar{a}}\bar{b} + np_{\bar{a}}\bar{c}) = |\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{b} + |\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}\ .$$

3. $(\lambda\cdot\bar{a})\cdot\bar{b} = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$– асоціативна властивість відносно множення на число. Вона доводиться просто: $(\lambda\cdot\bar{a})\cdot\bar{b} = |\bar{b}|np_{\bar{b}}(\lambda\cdot\bar{a}) = |\bar{b}|\lambda\cdot np_{\bar{b}}\bar{a} = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

4. $\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cos 0^\circ = |\bar{a}|^2$.

Знайдемо скалярний добуток в координатній формі. Нехай вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задані своїми координатами в прямокутній системі координат, тобто

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \qquad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Тоді

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right)=a_xb_x\left(\bar{i}\cdot\bar{i}\right)+$$
$$+a_xb_y\left(\bar{i}\cdot\bar{j}\right)+a_xb_z\left(\bar{i}\cdot\bar{k}\right)+a_yb_x\left(\bar{j}\cdot\bar{i}\right)+a_yb_y\left(\bar{j}\cdot\bar{j}\right)+a_yb_z\left(\bar{j}\cdot\bar{k}\right)+$$
$$+a_zb_x\left(\bar{k}\cdot\bar{i}\right)+a_zb_y\left(\bar{k}\cdot\bar{j}\right)+a_zb_z\left(\bar{k}\cdot\bar{k}\right).$$

Але $\quad \bar{i}\cdot\bar{i}=|\bar{i}|\cdot|\bar{i}|\cos 0^\circ=1\cdot 1=1; \qquad \bar{j}\cdot\bar{j}=1; \qquad \bar{k}\cdot\bar{k}=1;$

$$\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{i}=|\bar{i}|\cdot|\bar{j}|\cos 90^\circ=0; \quad \bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0; \quad \bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{j}=0.$$

Звідси випливає: $\qquad \bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$

Так як $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$, то для кута між векторами справедливе співвідношення:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Умова перпендикулярності двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$\bar{a}\perp\bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Для знаходження проекції одного вектора на іншій, наприклад, $\bar{a}$ на $\bar{b}$, отримаємо: $\qquad np_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$

Робота A сили $\vec{F}=\overrightarrow{OK}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}=\overrightarrow{OM}$, який утворює з вектором $\bar{F}$ кут φ (рис.11), дорівнює $A=|\vec{F}||\vec{S}|\cos\varphi=\vec{F}\cdot\vec{S}$, де $\varphi=\left(\vec{F},\hat{\ }\vec{S}\right)$.

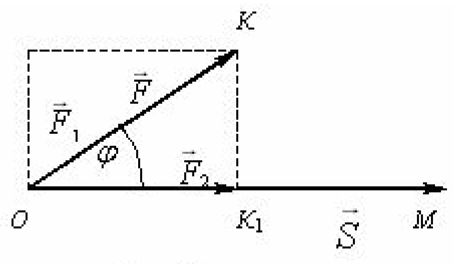


Рис. 12.

Приклад. Дано три сили $\overline{F_1}=\{3;\,-4\}, \overline{F_2}=\{2;\,3\}, \overline{F_3}=\{-3;\,-2\}$, які прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка їх прикладення, рухаючись прямолінійно, переміщається із точки $A(5;\,3)$ в точку $B(4;\,-1)$.

Розв'язання. Обчислюємо силу $\bar{F}$, яка є рівнодійною сил $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$:

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{F}=\{2;\,-3\}.$$

Знаходимо вектор переміщення $\overline{AB}=\{-1;\,-4\}$, обчислюємо роботу: $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=-2+12=10$ (од. роботи).

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Які величини називаються скалярними? Приклади.
2. Які величини називаються векторними? Приклади.
3. Що таке модуль вектора? Одиничний та нульовий вектори.
4. Колінеарність, компланарність, рівність векторів.
5. Які операції над векторами відносяться до лінійних?
6. В чому полягає правило трикутника (многокутника) при додаванні векторів?
7. Правило віднімання векторів.
8. Яка система векторів називається лінійно залежною, лінійно незалежною?
9. Що таке розклад вектора по певному базису?
10. Як виконуються лінійні операції над векторами в координатній формі?
11. Як записати вектор в координатній формі, якщо відомі координати його початку $A(x_A, y_A, z_A)$ і кінця $B(x_B, y_B, z_B)$?
12. Формула довжини вектора в координатній формі.
13. Напрямні косинуси вектора і їх властивості.
14. Сформулюйте алгебраїчні властивості скалярного добутку.
15. Запишіть формулу косинуса кута між двома векторами через їх скалярний добуток.

Приклад. Знайти точку *N,* з якою збігається кінець вектора $\overline{a}=\{3;-1;4\}$, якщо його початок збігається з точкою *M* (1; 2; -3).
Відповідь: *N*(4; 1; 1).
Приклад. Знайти довжину медіан трикутника, знаючи координати його вершин: *A*(3; -2), *B*(5; 2), *C*(-1; 4).
Відповідь: $\sqrt{6}, \sqrt{17}, \sqrt{41}$.

Приклад. Кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ $\gamma=\dfrac{2\pi}{3}$, довжини векторів $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=3$.

Обчислити: 1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $\overline{a^2}$; 3) $(\overline{a}+\overline{b})^2$.
Відповідь: 1) –12; 2) 16; 3) 13.
*Приклад***.** Дано точки *A*(0; 4; -6), *B*(3; 0; 6), *C*(1; 2; -4), обчислити
1) $\sqrt{\overline{CA^2}}$; 2) координати вектора $\overline{BC}(\overline{AC}\,\overline{AB})$.
Відповідь: 1) 3; 2) $\{-70;70;-350\}$.
Приклад. Знайти косинус кута між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:
1) $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$; $\overline{b}=2\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k}$; 2) $\overline{a}=5\overline{i}+6\overline{j}$, $\overline{b}=6\overline{i}-5\overline{j}$.

Відповідь: 1) $\dfrac{4}{9}$; 2) 0.

Приклад. Дано точки *A*(-1; 3; -3), *B*(4; 3; 6), *C*(2; 0; 3), *D*(4; 3; -3). Обчислити $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$

Відповідь: $-5\dfrac{6}{7}$.

Приклад. Дано вершини трикутника $A(-1;\ -2;4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$ і $C(3;\ -2;1)$. Визначити кут φ у трикутнику при вершині *B* і проекцію сторони *BA* на сторону *BC*.

Відповідь $\varphi = 45^\circ$, $пр_{\overline{BC}}\,\overline{BA} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Приклад. Обчислити, яку роботу виконує сила $\overline{F} = (2;-1;4)$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з точки $M(-1;0;3)$ в точку $N(2;-3;5)$.

Відповідь. А=17.

Приклад. Дано три сили $\overline{F_1} = (2;3)$, $\overline{F_2} = (-1;6)$, $\overline{F_3} = (0;4)$, які прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка їх прикладення, рухаючись прямолінійно, переміщається із точки $A(-6;\ 2)$ в точку $B(-4;\ 5)$.

Відповідь. А=41.

ЛЕКЦІЯ 3

ВЕКТОРНИЙ І МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Векторний добуток векторів.
Мішаний добуток векторів.
Полярна система координат.

3.1 Векторний добуток векторів

Означення. Векторним добутком вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, який позначається $\overline{a}\times\overline{b}$, і має такі властивості (рис. 1):

1) модуль $\overline{c}$ дорівнює добутку модулів векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ на синус кута між ними;

2) $\overline{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

3) якщо $\overline{c}\neq 0$, то вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ утворюють праву трійку векторів.

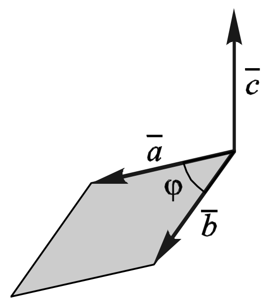


Рис. 1. Векторний добуток векторів

За означенням маємо: $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\varphi.$

Так само, як і скалярний добуток, векторний добуток своєю появою зобов'язаний необхідністю знаходити розв’язок фізичних задач. Розглянемо одну з них – задачу про обчислення моменту сили.

Моментом сили $\overline{F}$ відносно точки *O* називається вектор $\overline{M}$, довжина якого дорівнює добутку сили на плече і який напрямлений по осі обертання так, що коли дивитися з його кінця, то обертання тіла відбувається проти годинникової стрілки (рис. 2).

Оскільки $\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{r}\right|\left|\overline{F}\right|\sin\varphi$, то момент сили $\overline{F}$, прикладеної в точці *A*, відносно точки *O* визначається векторним добутком: $\overline{M} = \overline{OA}\times\overline{F}$.

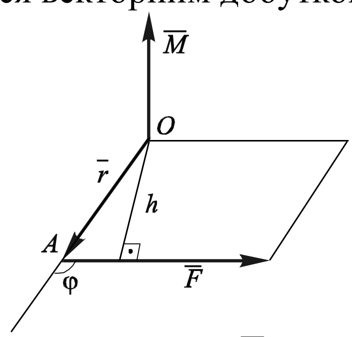


Рис. 2. Момент сили $\overline{F}$ відносно точки O

Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ дорівнює площі *S* паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=S,\qquad \varphi=\left(\vec{a},\ \widehat{\ }\ \vec{b}\right).$$

Векторний добуток двох колінеарних векторів є нуль-вектор:

$$\vec{a}\times\vec{b}=0\text{, якщо }\ \vec{a}\parallel\vec{b}\,.$$

Дійсно, маємо $\varphi=0$, або $\varphi=\pi$. Оскільки $\sin 0=\sin\pi=0$, то $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=0,$ і тому $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Розглянемо алгебраїчні властивості векторного добутку.

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$ – анти комутативність множення.

Дійсно, вектори $\overline{a}\times\overline{b}$ і $\overline{b}\times\overline{a}$ перпендикулярні до однієї і тієї ж площини, у якій знаходяться вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, але напрямлені в протилежні сторони, тому що, якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ утворять праву трійку, то вектори $\overline{b}$, $\overline{a}$, $\overline{c}$ будуть утворювати вже ліву трійку векторів, що і доводить дану властивість.

2. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$ – дистрибутивність відносно додавання.

3. $\lambda\cdot\overline{a}\times\overline{b}=\lambda\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$ – асоціативність відносно скалярного множника.

Знайдемо формулу векторного добутку векторів, заданих координатами.

Нехай задано вектори:

$$\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$

$$\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

Тоді

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$
$$=a_xb_x\left(\overline{i}\times\overline{i}\right)+a_xb_y\left(\overline{i}\times\overline{j}\right)+a_xb_z\left(\overline{i}\times\overline{k}\right)+a_yb_x\left(\overline{j}\times\overline{i}\right)+a_yb_y\left(\overline{j}\times\overline{j}\right)+a_yb_z\left(\overline{j}\times\overline{k}\right)+$$
$$+a_zb_x\left(\overline{k}\times\overline{i}\right)+a_zb_y\left(\overline{k}\times\overline{j}\right)+a_zb_z\left(\overline{k}\times\overline{k}\right).$$

Векторні квадрати координатних ортів дорівнюють нулю:

$$\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=0,$$

а добутки: $\begin{matrix}\left[\overline{i}\times\overline{j}\right]=\overline{k}; & \left[\overline{i}\times\overline{k}\right]=-\overline{j}; & \left[\overline{j}\times\overline{k}\right]=\overline{i};\\ \left[\overline{j}\times\overline{i}\right]=-\overline{k}; & \left[\overline{k}\times\overline{i}\right]=\overline{j}; & \left[\overline{k}\times\overline{j}\right]=-\overline{i}.\end{matrix}$

Тоді

$$\overline{a}\times\overline{b}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

Права частина останньої рівності є розкладом визначника третього порядку за елементами першого рядка $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Отже,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Приклад. Сила $\overline{F}=\{1;\ 3;\ 2\}$ прикладена в точці $B(3;\ 4;\ 5)$. Знайти момент сили $\vec{F}$ відносно точки $A(1;\ 2;\ 3)$.

Розв'язання. $\overline{AB}=\{2,\ 2,\ 2\}$. Тоді:

$$\overline{M}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$$

Приклад. Обчислити площу трикутника ABC з вершинами в точках $A(1;\ 0;\ 2)$, $B(2;\ 1;\ 3)$, $C(0;\ 1;\ 2)$.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\overline{AB}=\{1;\ 1;\ 1\}$ і $\overline{AC}=\{-1;\ 1;\ 0\}$.

Обчислимо векторний добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$$

Отже,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}(\text{од}^2.).$$

3.2 Мішаний добуток векторів

Нехай задано три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, множення яких можна виконати різними способами. Зокрема, можна утворити такі добутки: $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$, $(\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot\overline{c}$, також $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}$.

Перший з добутків $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$ − це скалярний добуток вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$. Він називається мішаним добутком векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Нехай $\overline{d}=\overline{a}\times\overline{b}$, тоді $|\overline{d}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і це дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на як на сторонах (рис. 3).

Помноживши вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ скалярно на $\overline{c}$, ми одержимо скаляр

$$\overline{d}\cdot\overline{c}=|\overline{d}||\overline{c}|\cos\psi=|\overline{a}||\overline{b}||\overline{c}|\cos\psi\sin\varphi\ ,$$

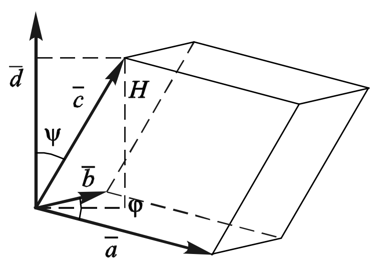


Рис. 3. Геометрична інтерпретація мішаного добутку векторів

де ψ – кут між векторами $\bar d$ і $\bar c$.

Мішаний добуток трьох векторів позначається $\bar a\bar b\bar c$.

Геометричний зміст мішаного добутку: модуль мішаного добутку векторів $\bar a, \bar b, \bar c$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar a$, $\bar b$ і $\bar c$, віднесених до спільного початку: $V = \left|\bar a\bar b\bar c\right|$

Мішаний добуток векторів дорівнює нулю тоді, коли який-небудь із векторів – нульовий або коли вектори компланарні (тобто лежать в одній площині).

Розглянемо властивості мішаного добутку.

1. $\left(\bar a \times \bar b\right)\cdot \bar c = \bar a \cdot \left(\bar b \times \bar c\right)$. Справедливість рівності випливає з того, що ці добутки мають однакові модулі. Крім того, трійка векторів $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ має ту ж саму орієнтацію, що і $\bar b$, $\bar c$, $\bar a$, яка відповідає добутку $\bar a \cdot \left(\bar b \times \bar c\right)$.

2. $(\bar a \times \bar b)\cdot \bar c = (\bar c \times \bar a)\cdot \bar b = (\bar b \times \bar c)\cdot \bar a$ – закон циклічної перестановки.

3. $\left(\bar a \times \bar b\right)\cdot \bar c = -\bar c \cdot \left(\bar b \times \bar a\right)$.

Знайдемо мішаний добуток векторів $\bar a, \bar b, \bar c$, заданих координатами:

$$\bar a = a_x\bar i + a_y\bar j + a_z\bar k;$$

$$\bar b = b_x\bar i + b_y\bar j + b_z\bar k;$$

$$\bar c = c_x\bar i + c_y\bar j + c_z\bar k.$$

Координати вектора $\bar a \times \bar b$ визначаються за формулою

$$\bar a \times \bar b = \vec i\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec j\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec k\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Помноживши вектор $\bar a \times \bar b$ скалярно на вектор $\bar c$, отримаємо

$$\bar a \cdot \bar b \cdot \bar c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

З цієї формули випливає умова компланарності векторів $\bar a$, $\bar b$ і $\bar c$:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо мішаний добуток $\bar a\bar b\bar c > 0$, то вектори $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ утворюють праву трійку; якщо $\bar a\bar b\bar c < 0$, то ліву.

Приклад. Обчислити об'єм трикутної піраміди, вершини якої знаходяться в точках $A(-7; -11; 1)$, $B(-4; -7; 3)$, $C(-1; -2; -4)$, $D(1; -1; 1)$.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\overline{AB}=\{3;\,4;\,2\}$, $\overline{AC}=\{6;\,9;\,-5\}$, $\overline{AD}=\{8;\,10;\,0\}$. Скористаємось співвідношенням $V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}V_{\text{пар}}$,

$$V_{\text{пар}}=\left|\left(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right)\right|=\left\|\begin{matrix}3 & 4 & 2\\ 6 & 9 & -5\\ 8 & 10 & 0\end{matrix}\right\|=|-34|=34.$$

$$V_{\text{пір}}=\frac{1}{6}\cdot 34=5\frac{2}{3}\text{(од. куб.)}$$

3.3 Полярна система координат

Положення точок на площині може бути задано не тільки декартовими координатами. Можливі й інші підходи для їх опису. Важливою є полярна система координат. Введемо полярну систему координат у такий спосіб. Виберемо на площині (рис. 4) довільну точку *O*, проведемо промінь $O\rho$, який

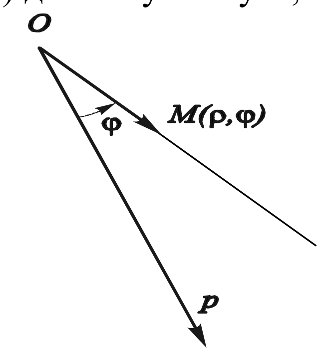


Рис. 4. Полярна система координат

називається полярною віссю, а точка *O* – полюсом. Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ, де ρ − відстань від полюса до точки M, φ − кут, на який потрібно повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором $\overline{OM}$. Точка з полярними координатами ρ і φ позначається $M(\rho,\varphi)$. Для самого полюса *O* полярний радіус дорівнює нулю, а кут φ невизначений. Для того, щоб була відповідність між полярними координатами і точками площини необхідно, щоб ρ і φ змінювались в таких межах: $0\le\rho<+\infty,\quad 0\le\varphi<2\pi.$

Знайдемо зв'язок між полярними і прямокутними координатами точки площини. Нехай полярна і декартова системи координат мають спільний початок, а полярна вісь ρ збігається з напрямком осі Ox (рис. 5). Точка *M* має полярні координати ρ,φ та декартові координати *x*, *y*. Тоді

$$\begin{aligned}x&=\rho\cos\varphi;\\ y&=\rho\sin\varphi.\end{aligned}\qquad(1)$$

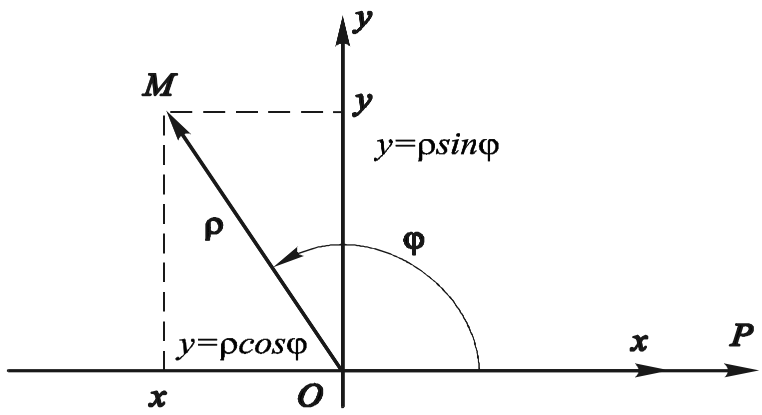


Рис. 5. Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки

Щоб перейти від декартових координат до полярних, з отриманих рівностей визначимо полярний радіус та полярний кут:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Остання формула дає два значення кута φ, з яких потрібно взяти те, для якого справедливі формули (1).

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Дайте означення векторного добутку двох векторів. Якою символікою користуються для позначення векторного добутку?
2. Сформулюйте геометричні властивості векторного добутку.
3. Сформулюйте алгебраїчні властивості векторного добутку.
4. Запишіть формулу обчислення векторного добутку, якщо вектори задано в координатній формі.

5.У якому випадку добуток трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається мішаним? Як позначається мішаний добуток?

6. Який геометричний зміст мішаного добутку?
7. За якою формулою обчислюється мішаний добуток векторів, коли вони задані в координатній формі?
8. Як виражається необхідна і достатня умови компланарності трьох векторів через їх мішаний добуток?

Приклад. Знайти модуль векторного добутку $\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$, якщо:

1) $\left|\bar{a}\right|=3$, $\left|\bar{b}\right|=10$, $(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b})=\dfrac{\pi}{6}$.   2) $\left|\bar{a}\right|=2$, $\left|\bar{b}\right|=3$, $(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b})=\dfrac{2\pi}{3}$.

Відповідь: 1) 15. 2) 3.

Приклад. Знайти векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}=7\bar{i}+4\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{b}=2\bar{i}-3\bar{k}$.   2) $\bar{a}=\{1;\ 2;\ -2\}$, $\bar{b}=\{8;\ 6;\ 4\}$

Відповідь: 1) $-12\bar{i}+23\bar{j}-8\bar{k}$. 2) $20\bar{i}-20\bar{j}-10\bar{k}$.

Приклад. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}$.

1) $\bar{a}=3\bar{i}-5\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}+2\bar{j}-10\bar{k}$. 2) $\bar{a}=\{1; 2; 3\}$ $\bar{b}=\{0; -5; 6\}$.

Відповідь: 1) $3\sqrt{437}$. 2) $\sqrt{790}$.

Приклад. Обчислити площу трикутника *ABC*, заданого вершинами *A*, *B*, *C*, якщо: $A(-1; -1; -1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(2; 1; 0)$.

Відповідь: $2\sqrt{6}$.

Приклад. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

$\bar{a}=\{4; -4; 2\}$, $\bar{b}=\{2; 3; 6\}$.

Відповідь: $\dfrac{5\sqrt{17}}{21}$.

Приклад . Обчислити мішані добутки $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ заданих векторів.

1) $\bar{a}=\bar{k}$; $\bar{b}=\bar{j}$; $\bar{c}=\bar{i}$. 2) $\bar{a}=-4\bar{i}-3\bar{j}-9\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-\bar{k}$, $\bar{c}=-5\bar{i}-4\bar{j}+3\bar{k}$.

Відповідь: 1) -1. 2) 46.

Приклад. Встановити, чи компланарні вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, якщо:

$\bar{a}=\{3;1;-1\}$, $\bar{b}=\{1;2;-3\}$, $\bar{c}=\{3;-4;7\}$.

Відповідь: не компланарні.

*Приклад***.** Доведіть, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють базис і розкласти вектор $\bar{d}$ за цим базисом: $\bar{a}=\{2;1;-3\}$, $\bar{b}=\{3;-2;1\}$, $\bar{c}=\{-1;0;-2\}$, $\bar{d}=\{-2;2;1\}$.

Відповідь: $\bar{d}=-\bar{b}-\bar{c}$.

Приклад. Обчислити об'єм піраміди *ABCD* з вершинами в точках: $A(1; -2; -1)$, $B(4; 4; 4)$, $C(2; 1; -1)$, $D(3; 0; 3)$.

Відповідь: $\dfrac{4}{3}$.

Приклад. У тетраедрі з вершинами в точках $A(2; 2; 1)$, $B(3; 1; 2)$, $C(3; 3; 2)$ і $D(4; 5; -3)$ обчислити висоту $h=\left|\overline{DE}\right|$.

Відповідь: $3\sqrt{2}$.

*Приклад***.** Об'єм піраміди V=2, три її вершини лежать у точках $A(2; 1; 3)$, $B(3; 3; 2)$, $C(1; 2; 4)$. Знайти координати четвертої вершини, коли відомо, що вона лежить на осі *Oz*.

Відповідь: $D_1(0;0;-1)$; $D_2(0;0;9)$.

Приклад. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на заданих векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$.

Відповідь: 13.

Приклад. Обчислити площу грані *ABC* і об'єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках $A(2;-1;\ 1)$, $B(5;\ 5;\ 4)$, $C(3;\ 2;-1)$, $D(4;\ 1;\ 3)$.

Відповідь: $S_{ABC}\approx 11{,}52$ (од^2). $V_{ABCD}=3$ (од^3).

ЛЕКЦІЯ 4

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА В ПРОСТОРІ

Пряма лінія на площині.
Кут між двома прямими, умова паралельності і перпендикулярності двох прямих на площині.
Пряма в просторі.
Кут між двома прямими, умова паралельності і перпендикулярності двох прямих в просторі.

4.1 Пряма лінія на площині

Рівняння $F(x;y)=0$ називається рівнянням лінії ℓ в даній системі координат, якщо координати x, y довільної точки площини задовольняють дане рівняння тоді і тільки тоді, коли точка належить цій лінії.

Лінії, рівняння яких містять x і y в першому степені, є прямими лініями на площині. Положення прямої на площині може бути однозначно задано різними шляхами. Розглянемо окремі випадки рівнянь прямих ліній на площині.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Рівняння прямої на площині з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y = kx + b, \qquad (1)$$

де *k*– кутовий коефіцієнт прямої, який дорівнює тангенсу кута, утвореного прямою і додатнім напрямом осі *Ox*, а *b* – ордината точки перетину прямої з віссю *Oy* (рис. 1).

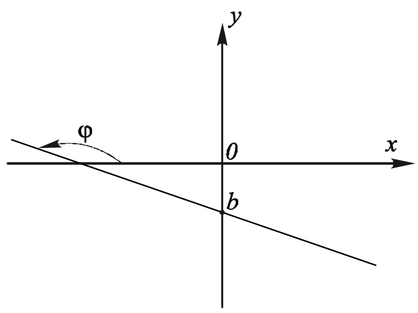


Рис. 1. Задання прямої рівнянням з кутовим коефіцієнтом

Значення параметрів *k* і *b* дозволяють однозначно визначити розташування прямої на площині. Якщо $k=0$, тобто $\operatorname{tg}\varphi = 0$ і $\varphi = 0$ то пряма проходить паралельно осі *Ox* і її рівняння $y=b$.

При $b=0$ пряма проходить через початок координат, її рівняння $y=kx$.

Якщо в рівнянні коефіцієнти *k* і *b* одночасно дорівнюють нулю, то воно приймає вигляд: $y=0$ і задає вісь *Ox*.

Загальне рівняння прямої

Нехай у системі координат Oxy задана пряма (рис. 2).

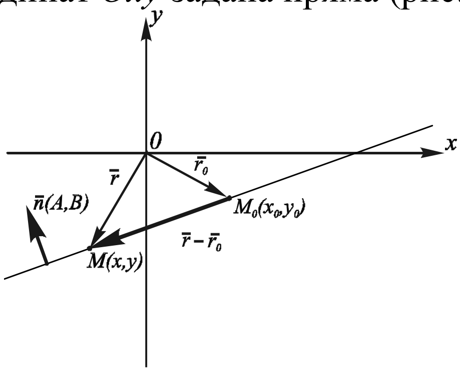


Рис. 2. Задання прямої загальним рівнянням

Назвемо ненульовий вектор $\bar{n}=(A,B)$, який перпендикулярний до прямої, нормальним вектором прямої. Будемо вважати відомими координати точки $M_0(x_0,y_0)$, що лежить на прямій. Нормальний вектор $\bar{n}$ і точка M_0 однозначно визначають положення прямої на площині. Нехай $M(x,y)$ – довільна точка, що лежить на прямій. Проведемо радіус-вектори $\bar{r}_0=(x_0,y_0)$ і $\bar{r}=(x,y)$ точок M_0 та M відповідно і розглянемо вектор $\overline{M_0M}=\bar{r}-\bar{r}_0$.

Для точок прямої буде виконуватися умова: $\overline{M_0M}\perp\bar{n}$.

Необхідною і достатньою умовою взаємної перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку:

$$\overline{M_0M}\cdot\bar{n}=0 \quad \text{або} \quad (\bar{r}-\bar{r}_0)\cdot\bar{n}=0.$$

Розкриваючи дужки, отримуємо: $\bar{r}\cdot\bar{n}-\bar{r}_0\cdot\bar{n}=0$.

Це є рівняння прямої у векторній формі. Воно містить у собі відомі вектори $\bar{r}_0$ і $\bar{n}$, а також вектор $\bar{r}$, який характеризує положення довільної точки, що лежить на даній прямій. Інші точки площини його задовольняти не будуть.

Так як $\bar{r}-\bar{r}_0=(x-x_0)\bar{i}+(y-y_0)\bar{j}$, $\bar{n}=A\bar{i}+B\bar{j}$,

то в координатній формі рівняння прямої набуде вигляду:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

або

$$Ax+By+C=0, \tag{2}$$

де $C=-Ax_0-By_0$.

Рівняння (2) називається загальним рівнянням прямої.

Проведемо дослідження загального рівняння прямої. Рівняння (2) приводиться до виду (1), якщо $B\neq 0$:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}, \quad B\neq 0.$$

При цьому $k=-\dfrac{A}{B}$ і $b=-\dfrac{C}{B}$.

Коефіцієнти A і B є координатами нормального вектора до прямої, а тому вони дозволяють одержати уявлення про її розташування на площині. Якщо $A=0$ і $B \neq 0$, то нормальний вектор $\overline{n} \perp 0x$, а пряма паралельна осі абсцис. Рівняння такої прямої має вигляд:

$$By + C = 0.$$

Якщо $A \neq 0$, $B = 0$, то нормальний вектор $\overline{n} \perp 0y$ і дана пряма паралельна осі ординат. Її рівняння набуває вигляду:

$$Ax + C = 0.$$

Якщо C=0 , то $Ax + By = 0$. Рівнянню задовольняє точка $O(0;0)$ і пряма проходить через початок координат.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і її напрям задається кутовим коефіцієнтом k. Рівняння цієї прямої можна записати у вигляді $y = kx + b$. Пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, то координати точки задовольняють рівняння: $y_0 = kx_0 + b$. Тобто $b = y_0 - kx_0$. Підставимо b в рівняння $y = kx + b$ отримаємо шукане рівняння, тобто

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Нехай пряма проходить через точки $M_0(x_0; y_0)$ і $M_1(x_1; y_1)$. Рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$. Так як пряма проходить через точку M_1, то $y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0)$ або $k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Підставимо отримане значення k в рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ отримаємо

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Приклад. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;\ 2)$ і $B(2;\ 1)$.

Розв`язання. Враховуючи, що $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, одержимо:

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x+1}{2+1} \Leftrightarrow \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{3},$$

після відповідних спрощень знайдемо рівняння шуканої прямої у загальному вигляді $x + 3y - 5 = 0$.

Параметричне та канонічне рівняння прямої

Нехай у прямокутній системі координат Oxy задана точка $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 3),

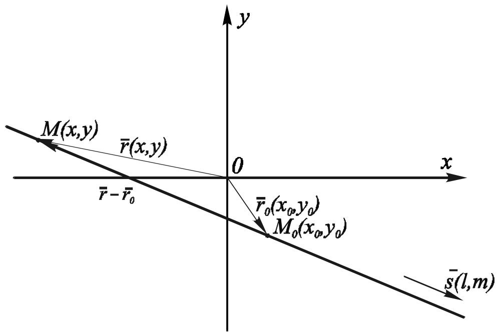


Рис. 3. Задання прямої за допомогою параметричних рівнянь

через яку проходить пряма, і задано ненульовий вектор $\bar{s} = (l, m)$, який їй паралельний. Вектор $\bar{s}$ називають напрямним вектором. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$, що лежить на прямій, і введемо, як і раніше, радіуси-вектори:

$$\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}, \qquad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}.$$

Тоді вектор $\bar{r} - \bar{r}_0 = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j}$ буде колінеарним напрямному вектору $\bar{s} = l\bar{i} + m\bar{j}$. А тому $\bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{s}$, де t – числовий параметр, який для кожної M, що лежить на прямій, приймає конкретне значення. Переписавши це рівняння у вигляді

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s}, \tag{3}$$

одержимо векторно–параметричне рівняння прямої. Прирівнюючи відповідні координати векторів $\bar{r}$ та $\bar{r}_0 + t\bar{s}$, маємо параметричне рівняння прямої

$$x = x_0 + lt;$$
$$y = y_0 + mt.$$

У даному випадку пряма визначається двома рівняннями. Задаючи конкретні значення t, ми можемо обчислити абсцису й ординату точки прямої.

Виразимо з цих рівнянь параметр t:

$$t = \frac{x - x_0}{l}; \qquad t = \frac{y - y_0}{m}$$

і прирівняємо праві частини отриманих рівностей:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{4}$$

Це є канонічне рівняння прямої, де x_0 і y_0 – координати відомої точки, що лежить на прямій , l і m– координати напрямного вектора.

4.2 Кут між двома прямими, умова паралельності і перпендикулярності двох прямих на площині

Знайдемо кут між двома прямими (рис. 4), заданими рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$$y = k_1x + b_1; \qquad y = k_2x + b_2,$$

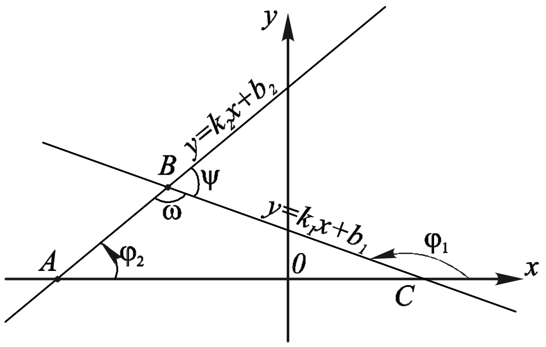


Рис. 4. Кут між прямими, заданими рівняннями з кутовими коефіцієнтами

де $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$. З рис. 4 видно, що

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},$$

звідси

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \tag{5}$$

Якщо в цій формулі поміняти місцями коефіцієнти k_1 і k_2 (що приведе до зміни знака аргументу арктангенса), то ми визначимо інший кут ψ, суміжний до кута ω.

Отримана формула (5) при $k_1 = k_2$ дає умову паралельності прямих.

Якщо $1 + k_1 k_2 = 0$, то прямі перпендикулярні (тепер $\omega = \frac{\pi}{2}$).

Знайдемо кут між двома прямими (рис. 5), заданими загальними рівняннями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \tag{6}$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \tag{7}$$

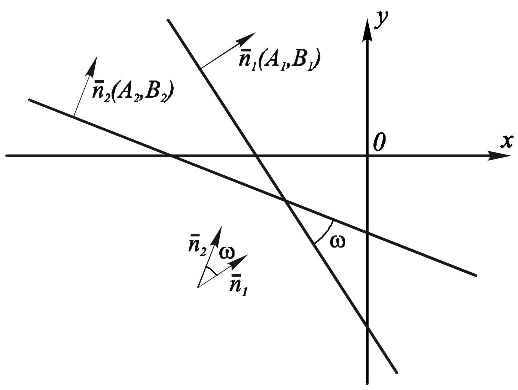


Рис. 5. Кут між прямими, заданими загальними рівнянням

Із рівнянь визначаємо координати нормальних векторів даних прямих: $\overline{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\overline{n}_2 = (A_2, B_2)$. Кут між двома даними прямими дорівнює куту між їхніми нормальними векторами, тому:

$$\cos\omega = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Якщо прямі паралельні, то їхні нормальні вектори $\bar{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2)$ будуть колінеарні, тому $\bar{n}_1 = \lambda \bar{n}_2$. Ця рівність визначає умову паралельності прямих у векторному вигляді. У координатній формі ця умова має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Якщо прямі взаємно перпендикулярні, то і відповідні нормальні вектори також перпендикулярні, отже, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю: $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, або в координатній формі:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Очевидно, що якщо в рівняннях (6) і (7) має місце пропорційність

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

то вони визначають одну пряму.

Параметричні і канонічні рівняння дозволяють досить просто визначити взаємне розташування прямих шляхом використання відповідних напрямних векторів. Якщо $\bar{s}_1 = (l_1, m_1)$ і $\bar{s}_2 = (l_2, m_2)$ напрямні вектори прямих (рис. 6), то

$$\cos\omega = \frac{(\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2)}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

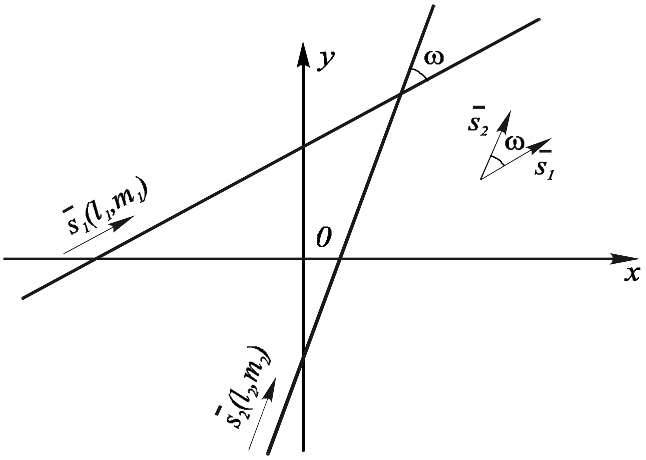


Рис. 6. Кут між прямими, заданими канонічно

Приклад. Обчислити кут між прямими (ℓ_1) $y = 2x + 3$; (ℓ_2) $y = -3x + 2$.

Розв`язання. В нашому випадку $k_1 = 2$, а $k_2 = -3$, за формулою маємо:

$$tg\theta = \frac{-3-2}{1+2(-3)} = 1, \quad tg\theta = 1, \ \theta = 45^0.$$

Відстань від точки до прямої

Відстань від точки $A(x_1;\, y_1)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається довжиною перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму, і обчислюється за формулою:

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

4.3 Пряма в просторі

Канонічне рівняння прямої в просторі

Пряму L в просторі можна визначити точкою $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, яка належить цій прямій, і напрямним вектором $\overline{q} = \{l,\, m,\, n\}$ цієї прямої. Візьмемо на прямій L змінну точку $M(x;\, y;\, z)$ і побудуємо вектор $\overline{M_1M} = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$. Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\vec{q}$ - колінеарні, а тому їх відповідні координати пропорційні. Отже, маємо:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \tag{8}$$

Рівняння (8) є канонічним рівнянням прямої в просторі.

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки

Пряму L в просторі можна визначити двома точками $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, що належать цій прямій.

Візьмемо на прямій змінну точку $M(x;\, y;\, z)$ і побудуємо вектори

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\},\quad \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}.$$

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ - колінеарні, а тому їх відповідні координати пропорційні. Отже, маємо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{9}$$

Рівняння (9) є рівнянням прямої в просторі, яка проходить через дві точки.

Параметричне рівняння прямої

Якщо в рівнянні (9) значення відношень позначити параметром t:

$$\frac{x - x_1}{l} = t;\quad \frac{y - y_1}{m} = t;\quad \frac{z - z_1}{n} = t,$$

а потім розв'язати одержані рівняння відносно x, y, z, то одержимо:

$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt, \\ z = z_1 + nt \end{cases} \tag{10}$$

Рівняння (10) називається параметричним рівнянням прямої.

4.4 Кут між двома прямими, умова паралельності і перпендикулярності двох прямих в просторі

Нехай прямі задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad (L_1)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \qquad (L_2)$$

Напрямними векторами цих прямих будуть вектори $\overline{q_1}=\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$, $\overline{q_2}=\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$.

Кут між прямими L_1 і L_2 визначається як кут між напрямними векторами цих прямих:

$$\cos\left(L_1 \,\hat{}\, L_2\right)=\cos\left(\overline{q}_1 \,\hat{}\, \overline{q}_2\right)=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \qquad (11)$$

Із формули (11) одержуємо умови паралельності і перпендикулярності прямих L_1 і L_2:

- якщо $L_1 \perp L_2$, то $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$;
- якщо $L_1 \parallel L_2$, то $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Дайте означення рівняння лінії на площині.

2. Що називається кутом нахилу прямої?

3. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Який геометричний зміст в ньому мають коефіцієнти k і b?

4. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.

5. Загальне рівняння прямої. Які координати має нормальний вектор цієї прямої?

6. Канонічне та параметричне рівняння прямої.

7. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами (загальними, канонічними). Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?

8. Відстань точки до прямої.

9. Канонічне та параметричне рівняння прямої в просторі. Який геометричний зміст мають сталі, що входять в це рівняння?

10. Рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві дані точки.

11. Кут між двома прямими в просторі. Умови паралельності, перпендикулярності двох прямих?

Приклад. Побудувати наступні прямі за їх рівняннями:

а) $2x-3y+6=0$; б) $7x-14y=0$; в) $x=-5$; г) $y=1$; д) $y=3x-9$.

Приклад. Знайти кут між прямими:
а) $3x-4y+1=0$ і $5x-12y+3=0$. б) $x=4$ і $2x-y-1=0$

Відповідь. а) $\varphi=\arccos\dfrac{63}{65}$. б) $\varphi=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку (-8; 1) паралельно прямій $2x-y+7=0$.

Відповідь. $y-2x-17=0$.

Приклад. Медіани BM і CN трикутника ABC лежать на прямих $x+y=3$ та $2x+3y=1$, а точка $A(1;1)$ - вершина трикутника. Скласти рівняння прямої BC.

Відповідь. $2x+y-15=0$.

Приклад. Задано три точки: $A(5;2)$, $B(9;4)$, $C(7;3)$. Показати, що вони лежать на одній прямій і записати її рівняння.

Відповідь. $2y-x+1=0$.

Приклад. Скласти рівняння прямих, які знаходяться від точки $A(1;-2)$ на відстані $d=\sqrt{20}$ і паралельні прямій $2x-y-5=0$.

Відповідь. $2x-y-14=0$, $\quad 2x-y+6=0$.

Приклад. Пряма задана загальними рівняннями. Скласти канонічні та параметричні рівняння цієї прямої, якщо:

а) $\begin{cases} x+2y-3z-5=0, \\ 2x-y+z+2=0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x-y+3z+5=0, \end{cases}$

Відповідь: а) $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z+1}{-5}$; $x=-t$, $y=1-7t$, $z=-1-5t$. б) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z+2}{-3}$; $x=2t$, $y=-1-5t$, $z=-2-3t$.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(3;-1;0)$ і $M_2(1;0;-3)$.

Відповідь: $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-3}$.

Приклад. Знайти кут між прямими $\begin{cases} 2x+y-z-1=0, \\ 2x-y+3z+5=0, \end{cases}$ і $\begin{cases} x=2t; \\ y=2-t; \\ z=-2+3t. \end{cases}$

Відповідь. $\varphi=90^0$.

ЛЕКЦІЯ 5

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Основні поняття.
Коло. Канонічне рівняння кола.
Еліпс. Канонічне рівняння еліпса.
Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи.
Парабола. Канонічне рівняння параболи.

5.1 Основні поняття

Лінія другого порядку − це множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, де коефіцієнти a, b, c, d, e, f − дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a, b, c відмінне від нуля. Зокрема, до ліній другого порядку належать лінії: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Уявимо собі конус, що утвориться при переміщенні прямої, що має нерухому точку O, по колу з центром у точці O_1, що розташовується в площині, перпендикулярній осі конуса OO_1.

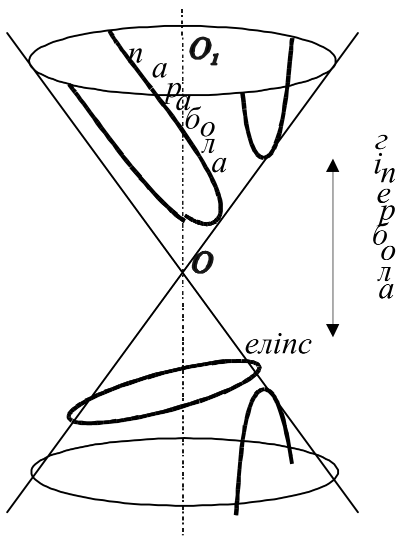


Рис. 1. Конічні перетини

Якщо цей конус розсікати різними площинами, то лінії, що знаходяться у перетині, зовні зовсім не схожі одна на одну. Лінії, які утворюються в перетині конуса площиною, називаються конічними перетинами.

5.2 Коло. Канонічне рівняння кола

Означення. Колом називається множина точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

В прямокутній системі координат Oxy через точку $O(a,b)$ позначимо центр кола, через $M(x,y)$ − довільну точку площини і через R − радіус кола. Точка M лежить на колі тоді і лише тоді, коли виконується рівність

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R.$$

Дане рівняння і є шуканим рівнянням кола. Але зручнішим користуватися рівнянням, яке отримаємо при піднесені обох частин рівняння до квадрата:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Приклад. Написати рівняння кола, якщо точки $A(-1;3)$ і $B(5;7)$ є кінцями його діаметра.

Розв'язання. Нехай $O(a;b)$ - центр кола. Тоді $AO=OB$, тому матимемо

$$a=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-1+5}{2}=2, \qquad b=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3+7}{2}=5.$$

Оскільки радіус кола $R=AO=\sqrt{(2-(-1))^2+(5-3)^2}=\sqrt{13}$, то отримаємо шукане рівняння: $(x-2)^2+(y-5)^2=13$.

5.3 Еліпс. Канонічне рівняння еліпса

Означення. Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для яких сума відстаней до двох заданих точок F_1 і F_2, які називаються фокусами, є величини стала і більша ніж відстань між фокусами.

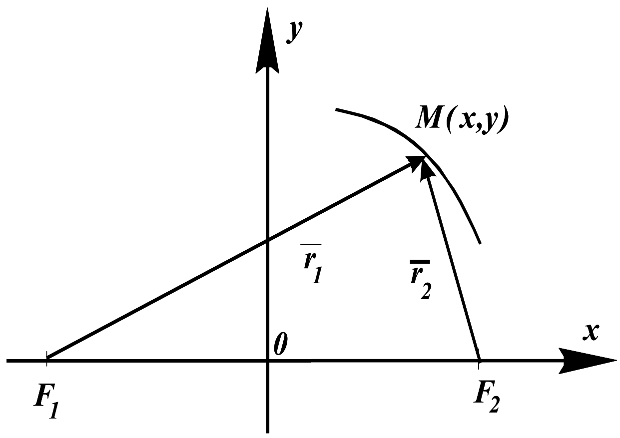


Рис. 2. Розташування прямокутної системи координат при отриманні рівняння еліпса

Розділимо відрізок F_1F_2, довжина якого називається фокусною відстанню, навпіл, виберемо посередині початок відліку і направимо осі Ox і Oy так, як показано на рис. 2.

Нехай довжина відрізка F_1F_2 дорівнює 2с, тоді координати фокусів еліпса будуть $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$, $M(x,y)$– довільна точка еліпса, а $\bar{r}_1=(x+c,y)$ і $\bar{r}_2=(x-c,y)$ – вектори, що пов'язують фокуси еліпса з цією точкою. Такі вектори називаються фокальними радіусами. За означенням еліпса справедливе співвідношення:

$$|\bar{r}_1| + |\bar{r}_2| = 2a, \tag{1}$$

Рівняння (1) є рівнянням еліпса у векторному вигляді.

Перейдемо до координатної форми запису цього рівняння:

$$|\bar{r}_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \quad |\bar{r}_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$\begin{gathered} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a; \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \end{gathered} \tag{2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

$$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc;$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2;$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2;$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Позначивши через $b^2 = a^2 - c^2$, $a > c$, одержимо: $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Або
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Рівняння (3) називається канонічним рівнянням еліпса.

Дослідимо еліпс по його канонічному рівнянню (3). Еліпс має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії. Вони називаються головними осями і збігаються з осями координат. Початок координат є центром симетрії. Ця точка називається центром еліпса. Точки *A(a,0), B(-a,0), C(0,b)* і *D(0,-b)* – точки перетину еліпса з головними осями, які називаються вершинами еліпса.

Відрізки, утворені перетинанням еліпса з головними осями, дорівнюють *2a* і *2b*, називаються, відповідно, великою та малою осями.

Параметри *a* і *b* називаються його півосями.

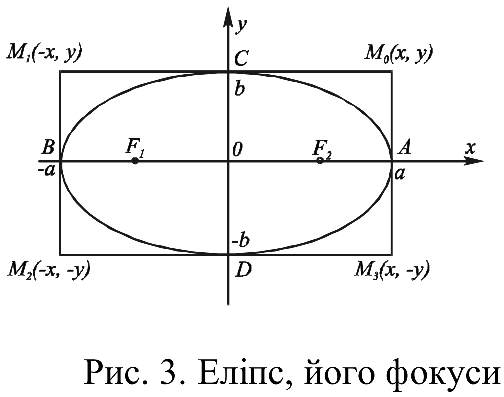


Рис. 3. Еліпс, його фокуси й осі

Якщо півосі еліпса рівні: $a=b$, тобто $c^2 = a^2 - b^2 = 0$, еліпс набуває форму кола.

Ексцентриситетом еліпса називають величину $e = \frac{c}{a}$, де c – половина фокусної відстані еліпса, a – довжина більшої півосі еліпса, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, отже $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Ексцентриситет еліпса менше одиниці так як $a > c$. Якщо довжини півосей еліпса близькі по довжині, то його ексцентриситет необмежено наближається до нуля, а еліпс – до кола.

На рисунку 4. показана трансформація форми еліпса, коли $a \to b$.

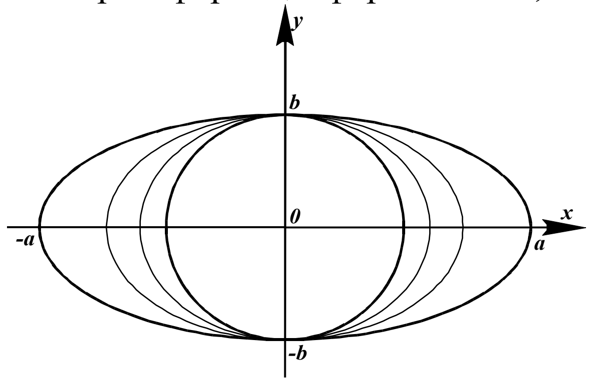


Рис. 4. Трансформація форми еліпса, при $a \to b$

У випадку, якщо центр еліпса не співпадає із початком координат, рівняння еліпса має вигляд $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, де x_0, y_0–координати центра еліпса.

5.4 Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи

Означення. Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок F_1 і F_2, які називаються фокусами, є величини стала і менша ніж відстань між фокусами.

Розділимо відрізок F_1F_2, довжина якого називається фокусною відстанню, навпіл, посередині виберемо початок відліку і введемо систему координат, як показано на рис. 6.

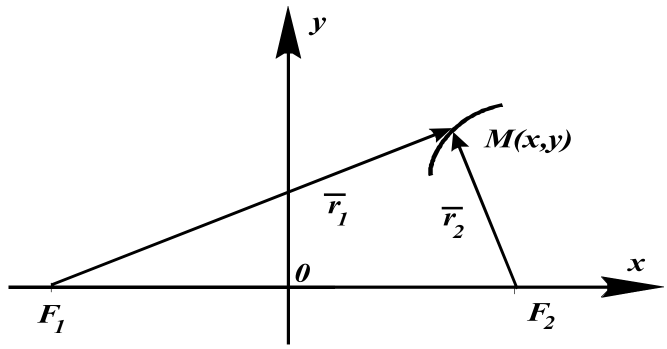


Рис. 6.Розташування прямокутної системи координат при отриманні рівняння гіперболи

Вводячи аналогічні позначення при виводі рівняння гіперболи як і у випадку еліпса, виходячи із означення гіперболи можна записати рівність:

$$\left\| \bar{r}_1 \right| - \left| \bar{r}_2 \right\| = 2a, \tag{4}$$

де $2a$ – постійна, про яку говориться у означенні гіперболи. Рівняння (4) є рівнянням гіперболи у векторному вигляді.

Переходячи до координатної форми запису цього рівняння, одержимо:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \ .$$

Виконуючи, аналогічні попереднім перетворення, одержимо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. Гіпербола, вітки якої направлені вверх і вниз по вісі Oy описуються рівнянням $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $a^2 = c^2 - b^2$ і називають спряженою до (5). В цьому випадку b – дійсна піввісь, а a – уявна.

Гіпербола має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії. Вони також називаються головними осями і збігаються з осями координат. Початок координат є центром симетрії. Ця точка називається центром гіперболи. Одна з осей, у нашому випадку горизонтальна вісь, перетинається з гіперболою в двох точках: $A(-a,0)$ і $B(a,0)$ – вершини гіперболи.

Ексцентриситетом гіперболи називають величину $e = \frac{c}{a}$, де c – половина фокусної відстані гіперболи , a – довжина дійсної півосі гіперболи, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, отже $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$. Ексцентриситет гіперболи більше одиниці, так як для гіперболи $c > a$, і характеризує "сплюснутість" кривої.

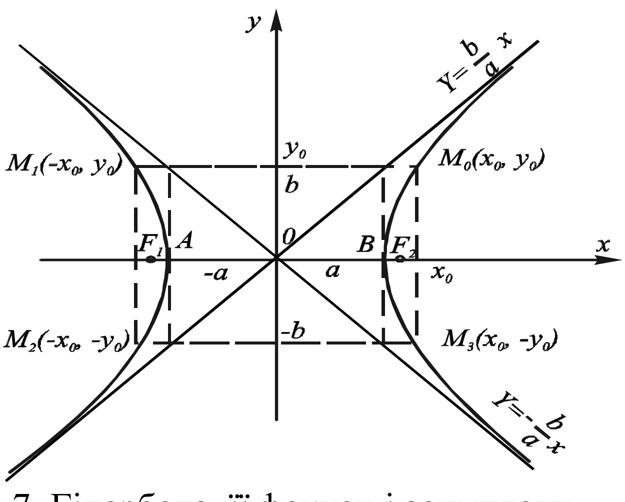


Рис. 7. Гіпербола, її фокуси і асимптоти

Гіпербола має дві вітки, які необмежено близько наближаються до прямих $y=\frac{b}{a}x$ і $y=-\frac{b}{a}x$, не перетинаючи їх, при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$. Ці прямі називаються асимптотами гіперболи (рис.7).

У випадку, якщо центр гіперболи не співпадає із початком координат, рівняння гіперболи має вигляд $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ або $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$, де x_0, y_0 – координати центра гіперболи.

Приклад. Встановити, що рівняння $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ визначає гіперболу. Знайти її центр і півосі.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати відносно x та y:

$$16(x^2-4x+4-4)-9(y^2+6y+9-9)-161=0;$$

$$16(x-2)^2-9(y+3)^2=144; \qquad \frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

Отримали канонічне рівняння гіперболи $O(2;-3)$ - центр, $a=3, b=4$ - півосі.

5.5 Парабола. Канонічне рівняння параболи

Означення. Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки *F*, яка називається фокусом, до даної прямої l, яка називається директрисою.

Для виводу канонічного рівняння параболи виберемо прямокутну декартову систему координат, як показано на рис. 8.

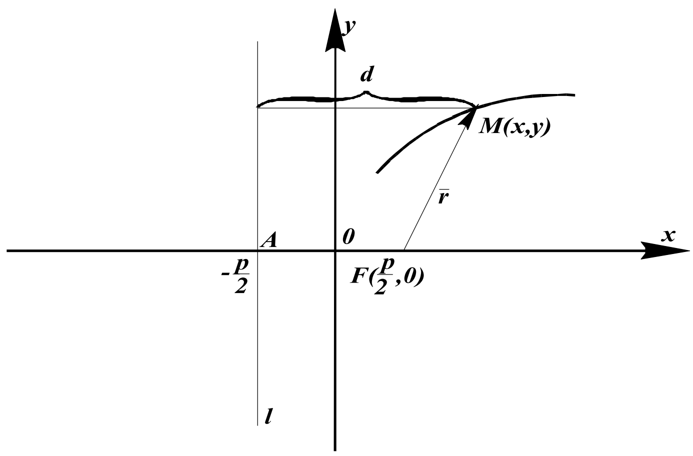


Рис. 8.Розташування прямокутної системи координат при отриманні рівняння параболи

Позначимо довжину відрізка *AF* через *p* і назвемо цю величину параметром параболи. Нехай $\bar{r}=\left(x-\frac{p}{2}, y\right)$ – фокальний радіус, що з'єднує фокус $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ з

довільною точкою параболи $M(x, y)$ і відстань від точки M до директриси дорівнює d. Тоді для точок параболи і тільки для них, відповідно до означення цього геометричного місця точок, маємо: $|\bar{r}| = d$.
Дана рівність є рівнянням параболи у векторній формі. Тоді маємо

$$d = \frac{p}{2} + x; \qquad |\bar{r}| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Точки з від'ємною абсцисою не можуть лежати на параболі, тому що для них $|\bar{r}| > d$ (рис. 10), що не відповідає означенню параболи. Тому:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x.$$

Піднесемо обидві частини до квадрату, отримаємо

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

тобто $$y^2 = 2px.$$

Отримали канонічне рівняння параболи.

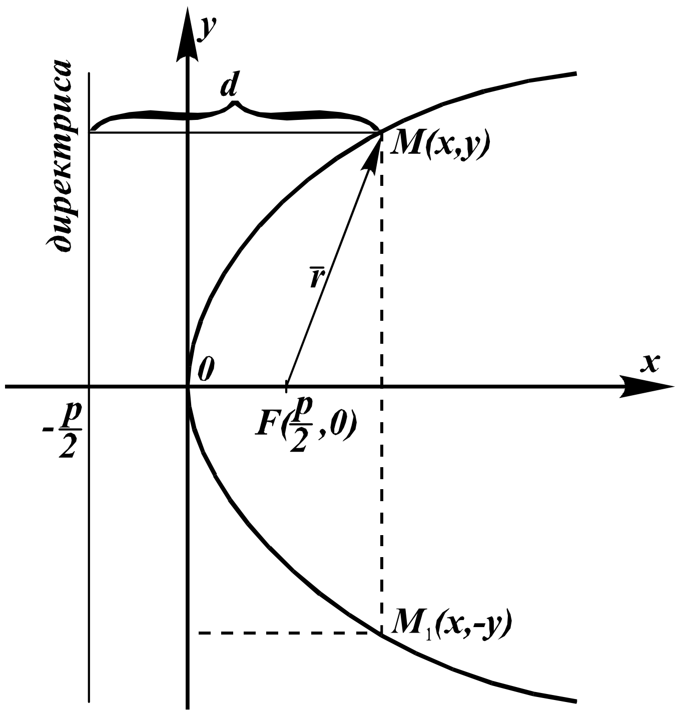


Рис. 10. Парабола, її фокус і директриса

Приклад. Дослідженням виявлено, що витрати палива під час руху судна зростають пропорційно квадрату його швидкості. Знайти аналітичну залежність між витратами палива m та швидкістю судна V, враховуючи, що при $V = 20$ км/год витрачено 10 л палива за годину, а також визначити витрати палива за годину при швидкості 40 км/год.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі шукану залежність можна записати у вигляді: $V^2 = km$, де k - деякий коефіцієнт пропорційності. Отже, витрати палива змінюються за параболічним законом: $y^2 = 2px$. Оскільки парабола проходить через точку $M(10, 20)$, то її координати задовольняють рівняння параболи: $20^2 = k \cdot 10; \quad k = 40$. Таким чином, аналітична залежність між витратами палива та швидкістю судна має вигляд: $V^2 = 40m$ або $m = \dfrac{V^2}{40}$. При швидкості 40 км/год витрати палива (л за год.) повинно бути $m = \dfrac{40^2}{40} = 40$.

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Що називається колом? Вивести рівняння кола з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$ і радіусом R.
2. Що називається еліпсом? Вивести канонічне рівняння еліпса.
3. Що називається гіперболою? Вивести канонічне рівняння гіперболи.
4. Дослідити форму гіперболи, заданої канонічним рівнянням, і побудувати її.
5. Що називається фокальним радіусом, ексцентриситетом еліпса, гіперболи?
6. Що називається параболою? Вивести канонічне рівняння параболи і дослідити її форму.

Приклад. Знайти радіус і координати центра кола:

а) $2x^2 + 2y^2 - 12x + y + 3 = 0$. б) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$.

в) $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$. г) $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$.

Відповідь: а) $R = 2, \quad O(0; -2)$. б) $R = 6, \quad O(-2; 3)$. в) $R = 3, \quad O(-3; 3)$. г) $R = \dfrac{9}{14}, \quad O(\dfrac{1}{7}; \dfrac{1}{2})$.

Приклад. Скласти рівняння кола з центром у точці $(2; 2)$, яке дотикається до прямої $3x + y - 18 = 0$.

Відповідь. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$.

Приклад. Написати рівняння діаметра кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, перпендикулярного до прямої $5x + 2y - 13 = 0$.

Відповідь. $2x - 5y + 19 = 0$.

Приклад. Знайти довжину хорди еліпса $4x^2+9y^2=36$, яка проходить через його фокус перпендикулярно до великої осі.

Відповідь. $\frac{8}{3}$.

Приклад. Знайти центр та півосі еліпса:

а) $x^2+4y^2+24y+20=0$. б) $x^2+3y^2-6y-24=0$.

в) $x^2+2y^2+4x-16y+4=0$. г) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$.

Відповідь: а) $a=4,\ b=2,\ O(0;-3)$. б) $a=3\sqrt{3},\ b=3,\ O(0;1)$.
в) $a=4\sqrt{2},\ b=4,\ O(-2;4)$. г) $a=3,\ b=\sqrt{5},\ O(3;-1)$.

Приклад. Знайти відстань від фокуса гіперболи $x^2-8y^2=8$ до її асимптоти.

Відповідь. $d=1$.

Приклад. Складти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $\left(-5/4;3/2\right)$ і має асимптоти $y=\pm 2x$.

Відповідь. $4x^2-y^2=4$.

Приклад. Знайти центр та півосі гіперболи:

а) $x^2-4y^2-18x-16y-24=0$. б) $-16x^2+9y^2+36y+160x-508=0$.

в) $x^2-9y^2+4x-5=0$. г) $9x^2-16y^2+32y+90x-367=0$.

Відповідь: а) $a=4,\ b=2,\ O(9;-2)$. б) $a=3,\ b=4,\ O(5;-2)$.
в) $a=3,\ b=1,\ O(-2;0)$. г) $a=8,\ b=6,\ O(-5;1)$.

Приклад. В параболу $x^2=\sqrt{3}\,y$ вписано рівносторонній трикутник так, що одна з вершин його збігається з вершиною параболи. Знайти сторону трикутника.

Відповідь: 6.

*Приклад***.** Скласти канонічне рівняння параболи, у якої відстань від фокуса до директриси дорівнює 12.

Відповідь: $y^2=24x$.

Приклад. Знайти вершину та рівняння директриси параболи:

а) $y^2+6y+2x+13=0$. б) $x^2-2x+5y-9=0$. в) $y^2-9x+8y+7=0$.

г) $\frac{1}{6}x^2-2x+y+7=0$. д) $\frac{1}{4}y^2+x-y=0$.

Відповідь. а) $O(-2;-3),\ x=-1{,}5$. б) $O(1;2),\ y=13/4$.
в) $O(-1;-4),\ x=-13/4$. г) $O(6;-1),\ y=\frac{1}{2}$. д) $O(1;2),\ x=2$.

ЛЕКЦІЯ 6

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Границя числової послідовності.
Поняття границі функції в точці.
Односторонні границі та нескінченно великі функції.
Властивості границь.
Нескінченно малі функції та їх властивості.

6.1 Границя числової послідовності

Якщо кожному натуральному числу n за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множина чисел $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ називається числовою послідовністю і позначається $\{x_n\}$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n, ..$ називаються членами послідовності: x_1 – перший член і т. д., x_n – n-ий, або загальний член послідовності.

Члени числової послідовності можуть бути зображеними точками на числовій осі. Досить часто використовується рекурентний спосіб задання числових послідовностей, який полягає в тому, що n-й член послідовності виражається через попередні. Так, наприклад, на рис. 1. представлена послідовність

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n+1}.$$

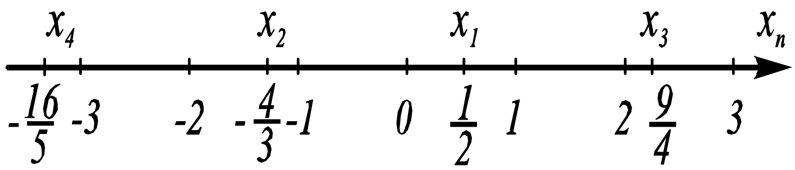


Рис. 1. Зображення числової послідовності на осі

Означення. Число A називається границею числової послідовності $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться такий номер n_0, що для всіх номерів $n > n_0$ буде справедливою нерівність

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

Числова послідовність, яка має скінчену границю, називається збіжною (до A), у противному випадку – розбіжною.

Позначення границі послідовності $\{x_n\}$: $\lim_{n \to \infty} x_n = A.$

6.2 Поняття границі функції в точці

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякій множині *X*. Припустимо, що незалежна змінна x має границю a. Розглянемо зміну функції $y = f(x)$ при $x \to a$. Точка a називається граничною, якщо в будь-якому околі цієї точки є точки із множини X (рис.2). Запис $x \to a,\ x \in X$ означає, що x прямує до граничної точки a. Це наближення може відбуватися як ліворуч, так і праворуч від точки a (рис. 2.).

Розглянемо нерівність $|x - a| < \delta$, де $\delta > 0$. Розкриваючи її, одержимо: $-\delta < x - a < \delta$; $a - \delta < x < a + \delta$. Подвійна нерівність визначає симетричний щодо точки a інтервал $(a - \delta, a + \delta)$, який називається δ- околом цієї точки. Нескінченно близьке наближення до точки a означає наявність у будь-якому її δ-околі хоча б однієї точки x, відмінної від a. Звідси маємо, що в будь-якому δ - околі точки a міститься нескінченно багато точок $x \in X$.

Граничний перехід визначає поведінку функції $y = f(x)$ при $x \to a$. Чи наближаються значення функції $y = f(x)$, $x \in X$ до деякого значення *A*, при $x \to a$? Характер такого наближення можна оцінити аналогічним способом, ввівши в розгляд ε - окіл точки *A*:

$$O_\varepsilon(A) = \{y = f(x) \mid |f(x) - A| < \varepsilon\}.$$

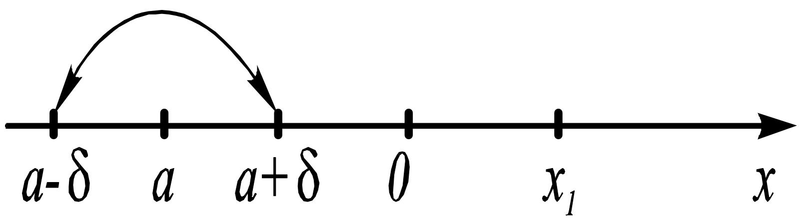


Рис. 2. Гранична точка a і її окіл

Сама функція $y = f(x)$ може бути і не визначена в точці a.

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ в точці a, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \neq a$, що задовольняють умові $0 < |x - a| < \delta$, буде виконуватися нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A.$

За величину δ можна взяти яке-небудь число, менше ε.

Геометрична інтерпретація даного означення (рис. 3): число A є границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо для довільно ε - околу точки A знайдеться δ - окіл точки a такий, що коли значення аргументу x взяти з множини $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, то відповідні значення функції $f(x)$ лежатимуть в ε - околі точки A (рис. 3).

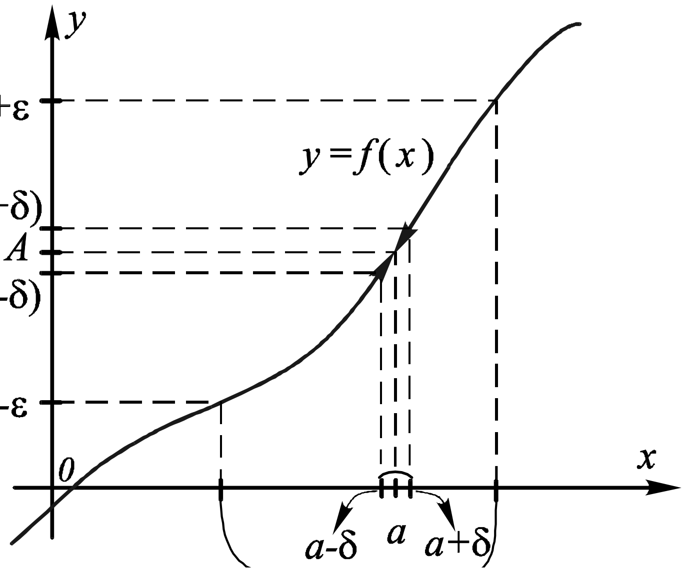


Рис.3

6.3 Односторонні границі та нескінченно великі функції

Можливий розгляд поняття границі й у тих випадках, коли аргумент приймає значення або тільки ліворуч, або тільки праворуч від граничної точки. Запис $x \to a+0$ означає, що значення x беруться праворуч від граничної точки, а при записі $x \to a-0$ передбачаються значення x, що лежать ліворуч від a.

Дамо означення односторонніх границь. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки a.

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ зліва в точці a, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що при $x \in (a-\delta; a)$, виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Означення. Число B називається границею функції $y = f(x)$ справа в точці a, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що при $x \in (a; a+\delta)$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = A, \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = B.$$

Чи можна говорити про границю функції, коли $x \to \infty$? Чи має зміст вираз $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$? Відповіді на ці питання дозволять нам розширити поняття границі функції і глибше проникнути в суть абстракції нескінченності.

Щоб відповісти на поставлені питання, необхідно ввести нові строгі означення.

Означення. Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що для $|x| > M$ буде виконана нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$

Означення. Функція $y = f(x)$ при $x \to a$ має границю рівну ∞, якщо для будь-якого числа $L > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для $x \neq a$ і задовольняючих нерівності $0 < |x - a| < \delta$, в області визначення функції буде справедлива нерівність $|f(x)| > L$.

Означення. Функція, що має нескінченну границю при $x \to a$ або при $x \to \infty$, називається нескінченно великою.

Нескінченно велика функція в околі точки a є необмеженою в цьому околі. Обернене твердження неправильне.

6.4 Властивості границь

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ має границю при $x \to a$ то вона єдина.

Доведення. Проведемо міркування методом від противного. Нехай функція $y = f(x)$ при $x \to a$ має дві границі $A \neq B$. Це означає:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)\left(0 < |x - a| < \delta_1\right) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon; \tag{1}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)\left(0 < |x - a| < \delta_2\right) \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon. \tag{2}$$

Околи δ_1 і δ_2 можуть не збігатися між собою, але в меншому з них будуть справедливі дві нерівності:

$$|f(x) - A| < \varepsilon;$$
$$|f(x) - B| < \varepsilon.$$

Оскільки міркування справедливі для кожного ε, то виберемо $\varepsilon = \dfrac{|A - B|}{2}$, для якого матимемо:

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq$$
$$\leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = |A - B|.$$

Одержали очевидне протиріччя:

$$|A - B| < |A - B|,$$

яке свідчить про те, що припущення (1) і (2) одночасно неможливі.
Наведемо декілька теорем, які приймемо без доведення.

Теорема 2. Якщо функція $y = f(x)$ має границю при $x \to a$ рівну A, то вона обмежена в деякому околі граничної точки.

Теорема 3. Якщо існує границя функції $y = f(x)$ при $x \to a$, рівна A**,** і $A < q$, то для досить близьких до граничної точки a значень аргументу x виконується нерівність $f(x) < q$.

Теорема 4. Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} q(x) = B$ і в околі точки a: $f(x) \geq q(x)$, то і $A \geq B$.

6.5 Нескінченно малі функції та їх властивості

Означення. Функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою в околі деякої граничної точки a, якщо її границя при $x \to a$, дорівнює нулю, тобто для $x \neq a$ і досить близьких до a значення функції по абсолютній величині стають меншими будь-якого додатного числа ε.

У даному випадку гранична точка скінчена, однак вона може бути і нескінченною. Та сама функція може бути нескінченно малою або нескінченно великою в різних граничних точках .

Наприклад, функція

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}},$$

нескінченно мала при $x \to \infty$. Але вона буде і нескінченно великою при $x \to 1$.

Теорема 5. Для того, щоб існувала границя $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб в околі граничної точки a була справедливою рівність $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція в околі цієї граничної точки, тобто

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha(x), \text{ де } \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Покажемо, що в околі граничної точки a

$f(x) = A + \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Дійсно,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

тоді звідси випливає, що $\alpha(x) = f(x) - A$ є нескінченно мала функція в околі граничної точки a.

Навпаки, нехай в околі граничної точки a справедливе співвідношення $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція в околі цієї граничної точки a. Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - A) < \varepsilon| \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Теорема 6. Якщо в околі граничної точки a функція $f(x)$ – нескінченно мала, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ є нескінченно великою в околі цієї точки, і навпаки, якщо функція $g(x)$ – нескінченно велика величина при $x \to a$, то $\dfrac{1}{g(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \to a$.

Доведення. Нехай $f(x)$ при $x \to a$ є нескінченно малою величиною, тоді $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, тобто функція $\dfrac{1}{f(x)}$ є нескінченно великою при $x \to a$.

Аналогічно доводиться обернене твердження.

Теорема 7. Сума скінченого числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

Важливою умовою даної теореми є скінчене число розглянутих нескінченно малих функцій. Виявляється, що якщо число доданків у сумі нескінченно малих функцій нескінченно велике, то їхня сума зовсім може і не бути нескінченно малою величиною.

Теорема 8. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Що називається числовою послідовністю?
2. Що називається границею числової послідовності?
3. Дайте означення границі функції в точці.
4. Довести, що коли змінна величина має границю, то ця границя єдина.
5. Яка величина називається нескінченно великою?
6. У чому полягає геометричний зміст границі функції в точці?
7. Що називається лівою та правою границями функції в точці?
8. Що називається границею функції при $x \to \infty$?
9. Що називається нескінченно великою функцією?
10. Які величини називаються нескінченно малими?
11. Сформулюйте і доведіть властивості нескінченно малих функцій. Наведіть приклади.

Приклад. Написати перші п'ять членів послідовності:

а) $x_n = \dfrac{1}{1+n^2}$; б) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2+1}$; в) $x_n = \dfrac{n+(-1)^n n}{n}$; г) $x_n = (-1)^n \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$

Відповідь. а) $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{17}, \dfrac{1}{26}\right\}$. б) $\left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{26}, -\dfrac{1}{50}, \dfrac{1}{82}\right\}$. в) $\{0, 2, 0, 2, 0\}$.

г) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}\right\}$.

Приклад. Написати формулу загального члена послідовності:

а) $\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{5}{6};\frac{7}{8};\ldots$. б) $\frac{2}{3};\frac{4}{9};\frac{6}{27};\frac{8}{81};\ldots$ в) $\frac{2}{3\cdot 1};\frac{3}{4\cdot 2};\frac{4}{5\cdot 3};\frac{5}{6\cdot 4};\ldots$ г) $\frac{2}{3!};\frac{8}{5!};\frac{32}{7!};\frac{128}{9!};\ldots$

Відповідь. а) $x_n = \frac{2n-1}{2n}$. б) $x_n = \frac{2n}{3^n}$. в) $x_n = \frac{n+1}{(n+2)n}$. г) $x_n = \frac{2^{2n-1}}{(2n+1)!}$.

Приклад. Довести за означенням, що: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+3} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to 1}(3x+2) = 5$.

Приклад. Дано послідовність: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{8}$; $x_3 = \frac{1}{27}$; ...; $x_n = \frac{1}{n^3}$;.... Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Яким має бути n для того, щоб абсолютне значення різниці між x_n і її границею було меншим від 10^{-3}?

Відповідь. 0; $n > 10$.

Приклад. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3}{3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8x^2+1}{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+4}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+tg\,x}{2+\cos 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x^2-x-1}{x-3}-2\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x^2+2}+\frac{2x}{x^3-1}\right)$; є) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sqrt{x}+8x^2-1}{x+\sin 5x}$.

Відповідь. а) 2. б) $-\frac{23}{5}$. в) 0. г) 1. д) $-\frac{5}{3}$. е) $\frac{11}{18}$. є) ∞.

Приклад. Знайти ліву та праву границі функцій $f(x)$ в точці x_0:

а) $f(x) = sign\,x = \begin{cases} -1, & x<0; \\ 0, & x=0; \\ 1, & x>0. \end{cases}$ $x_0 = 0$. б) $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0 = 1$.

в) $f(x) = \frac{2}{x-3}$, $x_0 = 3$. г) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$, $x_0 = 1$. д) $f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}$, $x_0 = 2$.

е) $f(x) = 2^{\frac{1}{(x-2)^2}}$, $x_0 = 2$. є) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$.

ж) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x<2 \\ x^2, & x\ge 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$.

Відповідь. а) $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = 1$. б) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 0$.

в) $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = +\infty$. г) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 1$.

д) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \infty$. е) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \infty$.

є) $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = 0$. ж) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 4$.

ЛЕКЦІЯ 7

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ ТА ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ

Основні теореми про границі.
Розкриття невизначеностей при обчисленні границь.

7.1 Основні теореми про границі

Теорема 1. (про границю суми, добутку та частки). Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то існують і границі $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)$, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$, причому справедливі співвідношення :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B,$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad (\mathrm{B}\neq 0).$$

Доведення. В околі точки a функції $f(x)$ і $g(x)$ можна представити так: $f(x)=A+\alpha(x)$; $g(x)=B+\beta(x)$, де $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі функції в околі цієї точки. Тому

$$f(x)\pm g(x)=A\pm B+\left(\alpha(x)\pm\beta(x)\right);$$

$$f(x)\cdot g(x)=(A+\alpha(x))(B+\beta(x))=$$

$$=AB+B\alpha(x)+A\beta(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)=AB+\gamma(x);$$

де
$$\gamma(x)=B\alpha(x)+A\beta(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A}{B}+\nu(x),$$

де

$$\nu(x)=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{AB+B\alpha(x)-AB-A\beta(x)}{B(B+\beta(x))}=\frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B(B+\beta(x))}.$$

З властивостей нескінченно малих функцій випливає, що функція $\alpha(x)\pm\beta(x)$, як і функції $\gamma(x)$ і $\nu(x)$, є нескінченно малими в околі точки a, що і доводить теорему.

Теорема 2. (про границю проміжної функції). Якщо в околі точки a функції $f(x)$, $h(x)$, $q(x)$ пов'язані нерівністю $f(x) \le h(x) \le q(x)$ і існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x\to a} q(x) = A$, то існує і границя функції $h(x)$ при $x \to a$, причому $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.

Доведення. Із рівностей $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} q(x) = A$ випливає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існують два околи точки a, в одному з яких виконуються нерівності $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, а в другому – нерівності $-\varepsilon < q(x) - A < \varepsilon$. З нерівностей $f(x) \le h(x) \le q(x)$ знаходимо, що $f(x) - A < h(x) - A < q(x) - A$, тому в меншому з околів виконуються нерівності $-\varepsilon < f(x) - A < h(x) - A < q(x) - A < \varepsilon$. Звідси $-\varepsilon < h(x) - A < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.

Теорема 3. (про граничний перехід у нерівностях). Якщо в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a, виконується нерівність $f(x) \ge 0$ і існує границя $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $A \ge 0$.

Доведення. Припустимо, що $A < 0$, тоді при $x \to a$ маємо $|f(x) - A| \ge |A| > 0$, тому $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - A] \ne 0$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) \ne A$. Це суперечить умові теореми. Отже, $A \ge 0$.

Теорема 4. (про границю монотонної функції). Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x < a$ або при $x > a$, то існує відповідно її ліва границя $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ або її права границя $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$.

Приклад. Знайти границю функції $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ при $x \to -3$.

Розв'язання. Задана функція є елементарною, вона визначена в граничній точці, тому знаходимо границю функції як її частинне значення в граничній точці:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3) = (-3)^3 - 5\cdot(-3)^2 + 2\cdot(-3) + 4 = -74.$$

7.2 Розкриття невизначеностей при обчисленні границь

Якщо функція є елементарною і якщо граничне значення аргументу належить області визначення, то обчислення границі функції зводиться до простої підстановки граничного значення аргументу:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такі вирази:

1) $\dfrac{\infty}{\infty}$ - відношення двох нескінченно великих величин;

2) $\infty-\infty$ - різниця двох нескінченно великих величин;

3) $0\cdot\infty$ - добуток нескінченно малої функції на нескінченно велику;

4) $\dfrac{0}{0}$ - відношення двох нескінченно малих величин;

5) якщо $f(x)\to 1,\ \beta(x)\to\infty$ при $x\to a$, то вираз f^{β} - невизначеність виду 1^{∞}.

6) якщо $\alpha_1(x)\to 0,\ \alpha_2(x)\to 0$ при $x\to a$, то вираз $\alpha_1^{\alpha_2}$ - невизначеність виду 0^0.

7) якщо $\alpha(x)\to 0,\ \beta(x)\to\infty$ при $x\to a$, то вираз β^{α} - невизначеність виду ∞^0.

Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності. Розглянемо окремі випадки.

Випадок 1. Функція є відношенням двох нескінченно малих величин $\left(\text{випадок } \dfrac{0}{0}\right)$, якщо $x\to a$ або $x\to\infty$.

Приклад. Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. Спочатку переконуємося, що границю функції неможливо знайти безпосередньою підстановкою, тобто при вказаній зміні аргументу функція є відношенням двох нескінченно малих величин; потім здійснюємо перетворення, щоб скоротити дріб на множник, який прямує до нуля.

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$. Розкладаємо чисельник і знаменник дробу на множники, як квадратні тричлени, за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені тричлена. Скоротимо дріб на $(x-5)$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{9}{16}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$. Розкладаємо чисельник і знаменник на множники, скорочуємо дріб на $1+\cos x$:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{2}{3}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$. Позбавляємось ірраціональності в чисельнику шляхом множення чисельника і знаменника на спряжений вираз $1+\sqrt{x+1}$, скорочуємо дріб на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$. Помножимо чисельник і знаменник на $(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$, скорочуємо дріб на $1-x$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}.$$

Випадок 2. Функція $f(x)$ є відношенням двох нескінченно великих величин (випадок $\dfrac{\infty}{\infty}$), якщо $x\to a$ або $x\to\infty$.

Приклад. Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання.

а) Ділимо чисельник і знаменник дробу $\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}$ на x^2 (найбільша степінь):

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x^2}}{5+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{3-0}{5+0}=\dfrac{3}{5}$, оскільки при $x\to\infty$ величини $\dfrac{1}{x^2}$ і $\dfrac{1}{x}$ є нескінченно малими.

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Цю задачу можна розв'язати тим же способом, що і попередню. Поділивши чисельник і знаменник на x, отримуємо:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Випадок 3. Функція $f(x)$ є різницею двох додатних нескінченно великих величин (випадок $\infty-\infty$), якщо $x\to a$ або $x\to\infty$. Цей випадок знаходження границі функції можна звести до випадку $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ шляхом перетворення функції до вигляду дробу.

Приклад. Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$. Здійснюємо віднімання дробів і отриманий в результаті дріб скорочуємо на $(x-2)$:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$. Позбавимось від ірраціональності в чисельнику, і розділимо чисельник і знаменник дробу на x:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\dfrac{5}{x}}}=\frac{-5}{1+1}=-\frac{5}{2}.$$

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Сформулюйте та доведіть теорему про границю суми, добутку та частки функції.
2. Сформулюйте та доведіть теорему про границю проміжної функції.
3. Сформулюйте та доведіть теорему про граничний перехід в нерівностях.
4. Сформулюйте теорему про існування границі монотонної функції.

Обчислити границі функцій.

Приклад. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{10-4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+6x-1}{x^4-2x^2+10x^5+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x-1}{3x^4-x^2+10x+5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^2+8x+5}{x^2+x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+\sqrt{x}+1}{x^3+10x^2+6}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+2x}-3x^2}{x^2+6x+5}$; є) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+8x^2}{\sqrt[3]{x^6+5}-7x^2+6x+5}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+5x}-\sqrt{4x^3+2}}{\sqrt{x^3+7x^2}-x}$.

Відповідь: а) $-\dfrac{1}{2}$; б) 0; в) $\dfrac{1}{3}$; г) 11; д) ∞; е) -2; є) $-\dfrac{4}{3}$; ж) -1.

Приклад. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^4-3x^2+x-1}{4x^3+2x^2-3x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^4}-1}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; є) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Відповідь: а) $\dfrac{6}{5}$; б) $-\dfrac{13}{5}$; в) $\dfrac{2}{3}$; г) $\dfrac{1}{12}$; д) $\dfrac{4}{5}$; е) $\dfrac{1}{8}$; є) -1; ж) $\dfrac{2}{3}$.

Приклад. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

Відповідь: а) 1; б) 0; в) 0.

ЛЕКЦІЯ 8
ПЕРША ТА ДРУГА ВАЖЛИВІ ГРАНИЦІ

Перша важлива границя.
Друга важлива границя.
Узагальнення другої важливої границі.
Еквівалентні нескінченно малі величини.

8.1 Перша важлива границя

Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, розкривши при цьому невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

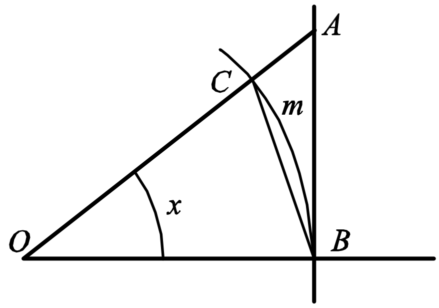


Рис. 2. Порівняння площ допоміжних фігур, використаних при доведенні першої важливої границі

Розглянемо дугу Bm одиничного кола (рис. 2), яка відповідає куту x радіан, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Побудуємо $AB\perp OB$ і хорду BC. Площа сектора OBm більша площі трикутника OBC, але менше площі трикутника OBA**.** Використовуючи цей факт, одержимо:

$$S_{\Delta\, OBC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin x,\quad S_{\text{сект.}}=\frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot x,$$

$$S_{\Delta OBA}=\frac{1}{2}OB\cdot AB,\quad \frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,\quad \sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x},\tag{1}$$

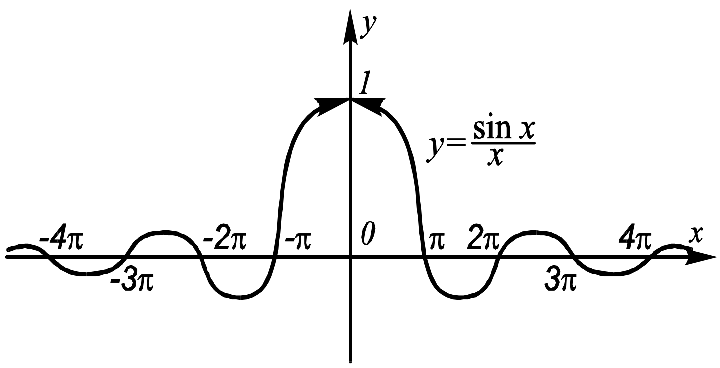


Рис. 1. Графік функції $y=\dfrac{\sin x}{x}$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad \text{або}\quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ і $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, то за теоремою про границю проміжної функції $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Нехай тепер $x < 0$. Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Оскільки $f(x) = f(-x)$, то $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Отже, довели, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Дана рівність називається першою важливою границею.

Приклад. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

Розв'язання. При заданому значенні аргументу функція є відношенням двох нескінченно малих величин. Перетворюємо функцію так, щоб використати першу важливу границю :

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1;\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha} = 1;\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = 1;\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{arctg\alpha}{\alpha} = 1..$$

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}} = 2\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = 2\cdot 1 = 2.$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$. Щоб використати першу важливу границю, зробимо заміну змінної: $1-x = t$. Тоді при $x\to 1$ буде $t\to 0$ і

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t} = \frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t} = \frac{\pi}{2}\cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$. За допомогою підстановки $\operatorname{arctg}(x+2) = y$, отримаємо $x+2 = \operatorname{tg} y$, $y\to 0$, якщо $x\to -2$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)} = \lim_{y\to 0}\frac{(\operatorname{tg} y-2)^2-4}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{(\operatorname{tg} y-4)tgy}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y - 4}{\cos y}\cdot \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = -4\cdot 1 = -4.$$

8.2 Друга важлива границя

Розглянемо числову послідовність $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Трансцендентне число $e \approx 2{,}718281$, яке є її границею, має не менше значення в описі навколишнього нас світу, ніж число π. Позначення буквою e це число отримало на честь Ейлера в знак визнання видатних математичних досягнень цього вченого.

Друга важлива границя

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

розкриває невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$, тому що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Прийоми обчислення цієї границі та доведення самого факту її існування багаті і різноманітні. Ми її приймемо без доведення.

8.3 Узагальнення другої важливої границі

Доведемо, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

де x – дійсне число, відмінне від нуля.

Розглянемо випадки.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, тобто x приймає додатні значення.

Очевидно, що всяке додатне дійсне число x може бути між двома послідовними натуральними числами: $n \le x < n+1$.

Тоді

$$n \le x < n+1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \;\Leftrightarrow\; 1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \ge \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}}.$$

Щоб застосувати теорему про границю проміжної функції, розглянемо границі:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} = \lim_{m\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m}}{1+\dfrac{1}{m}} = e,$$

де $m = n+1$.

Отже, функція $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to +\infty$ має границю, рівну e.

2. Покажемо, що і при $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ .$$

Зробимо заміну x на $-y$. Тоді при $x \to -\infty$ $y \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right) = e,$$

де $m = y-1$.

3. Представимо другу важливу границю в трохи іншій формі запису:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e, \quad \text{де} \quad t = \frac{1}{x}.$$

Покажемо, як друга важлива границя використовується для розкриття невизначеності виду $\left[1^{\infty}\right]$.

Нехай

$$\lim_{x\to a} f(x)=1; \qquad \lim_{x\to a} \varphi(x)=\infty.$$

Покажемо, що

$$\lim_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)(f(x)-1))}.$$

Дійсно:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\left[(f(x)-1)+1\right]^{\varphi(x)\frac{f(x)-1}{f(x)-1}} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left[(f(x)-1)+1\right]^{\frac{1}{f(x)-1}(f(x)-1)\varphi(x)}.$$

Розглянемо окремо

$$\lim_{x\to a}\left[(f(x)-1)+1\right]^{\frac{1}{f(x)-1}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

де $t = f(x)-1$.

Тому

$$\lim_{x\to a}\left[(f(x)-1)+1\right]^{\frac{1}{f(x)-1}(f(x)-1)\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x)(f(x)-1))},$$

що і потрібно було довести.

Приклад. Знайти границі: а) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin 2x}$.

Розв'язання. Переконаємось, що при вказаній зміні аргументу маємо функцію, основа якої прямує до одиниці, а показник – до нескінченності (випадок 1^{∞}), далі перетворюємо функцію так, щоб використати другу важливу границю.

а) Виділивши цілу частину дробу $\left(\dfrac{t-3}{t+2}\right)$, виконаємо заміну $-\dfrac{5}{t+2}=x$:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^{2t+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{5}{t+2}\right)^{2t+1} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{10}{x}-3} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{-10}\cdot\lim_{x\to 0}(1+x)^{-3} = e^{-10}\cdot 1 = e^{-10}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{\sin 2x}\frac{\sin 2x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}}=e^{2}.$

8.4 Еквівалентні нескінченно малі величини

У математичному аналізі не тільки розглядаються нескінченно малі функції, але і порівнюються степені їхньої малості. Це, зокрема, дозволяє заміняти одні нескінченно малі функції іншими, спрощуючи тим самим вивчення функціональних залежностей.

Означення. Функція $f(x)$ називається нескінченно малою більш високого порядку малості ніж $g(x)$ в околі точки a, якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \ .$$

Означення. Нескінченно малі функції $f(x)$ і $g(x)$ в околі точки a називаються нескінченно малими функціями одного порядку малості, якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda \quad (\lambda\neq 0).$$

В окремому випадку, при $\lambda=1$, нескінченно малі функції, що мають однаковий порядок малості, називаються еквівалентними і позначаються так:

$$f(x)\sim g(x).$$

Еквівалентні нескінченно малі величини мають властивості, які сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ еквівалентні при $x\to a$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha_1(x)$-$\alpha_2(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.

Теорема 2. Нехай $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ і $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to a$. Якщо існує $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, причому ці границі рівні між собою.

Теорема 3. Сума скінченого числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Найважливіші еквівалентні нескінченно малі величини: якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0,$ то

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x), \qquad \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x), \qquad tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$$

$$\mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x), \quad a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a, \quad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$$

$$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x), \quad 1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2}, \quad \sqrt{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{\alpha(x)}{2},$$

Приклад. Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\, 2x}{\sin^2\dfrac{x}{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{(\mathrm{arctg}\, 5x)^2}$.

Розв'язання. Скористаємось еквівалентністю нескінченно малих величин. $\sin x \sim x$, $\mathrm{tg}\, x \sim x$, $\mathrm{arctg}\, x \sim x$ при $x \to 0$.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\, 2x}{\sin^2\dfrac{x}{3}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)^2}{\left(\dfrac{x}{3}\right)^2} = 36$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{(\mathrm{arctg}\, 5x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5x}\cdot\dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{25}$.

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Виведіть першу важливу границю.
2. Виведіть другу важливу границю.
3. Що означає порівняти дві нескінченно малі величини? В якому випадку одна з них буде вищого порядку, ніж інша?
4. Які нескінченно малі величини називаються еквівалентними? Наведіть необхідну і достатню умову еквівалентності.
5. Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих величин.

Приклад. Обчисліть границі: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\kappa}{x}\right)^{mx}$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-5}\right)^{3x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+8}{x^2-2x-7}\right)^{x}$.

Відповідь: а) e^{km}; б) $\begin{cases}0, x\to\infty\\ \infty, x\to-\infty\end{cases}$; в) $\begin{cases}\infty, x\to\infty\\ 0, x\to-\infty\end{cases}$; г) e^6; д) 1.

Приклад. Обчисліть границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(2+x)-\ln 2}$.

Відповідь: а) $\sqrt{e}$; б) 2.

Приклад. Обчисліть границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}kx}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin 3x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\mathrm{arctg}2x}{4x-\arcsin x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\mathrm{arctg}x}{\sqrt{4+x}-2}$; е) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Відповідь: а) $\dfrac{\alpha}{\beta}$; б) κ; в) 9; г) $\dfrac{1}{9}$; д) 12; е) $\dfrac{1}{2}$; є) $\dfrac{1}{2}$.

Приклад. Обчисліть границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}^2 5x}{x\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+2x)}{\sin^2 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x^3-\ln a^3}{x-a}$;

е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{a^{x+1}-1}{\sqrt{1-\cos(x+1)}}$; є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin 4x}-1}{\operatorname{arctg}2x}$.

Відповідь: а) $\dfrac{18}{25}$; б) $\dfrac{25}{2}$; в) $+\infty$; г) $\dfrac{1}{9}$; д) $\dfrac{3}{a}$; е) $\sqrt{2}\ln a$; є) $\dfrac{2}{5}$.

ЛЕКЦІЯ 9
НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Поняття неперервної функції
Властивості неперервних на відрізку функцій
Точки розриву неперервності функції і їхня класифікація

9.1. **Поняття неперервної функції**

Розглянемо поняття границі функції у випадку, коли $y = f(x)$ визначена не тільки в околі точки x_0 але й у самій точці x_0.

Означення. Будемо говорити, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо вона має границю при $x \to x_0$, яка дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ передбачає виконання трьох умов (1):

1) функція повинна бути визначена в деякому інтервалі, що містить точку x_0 (тобто в самій точці x_0 і в деякому околі цієї точки);

2) повинні існувати і бути рівними між собою односторонні границі: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

3) односторонні границі повинні дорівнювати значенню функції $f(x)$ в точці x_0, тобто $f(x_0)$: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Приклад 1. Довести, що функція $y = 3x^3$ неперервна в точці $x_0 = 2$.

Розв'язання. Щоб довести, що функція $y = 3x^3$ неперервна в точці $x_0 = 2$, треба показати, що в цій точці виконуються три умови (1), які входять в означення неперервності функції.

Так як функція $y = 3x^3$ визначена на всій числовій осі, то вона визначена і в точці $x_0 = 2$ (перша умова виконана). Друга умова теж виконана, так як $\lim\limits_{x \to 2} 3x^3 = 24$ але і значення функції $f(2) = 24$. Тобто $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Отже, функція $y = 3x^3$ неперервна в точці $x_0 = 2$.

Аналогічно можна довести, що ця функція неперервна в будь-якій точці числової осі.

Для неперервної функції має місце важливе твердження: якщо $f(x)$ неперервна, то можна переходити від границі функції до границі під знаком функції, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Наведемо приклад розкриття невизначеності $\{1^\infty\}$ використовуючи дане твердження.

Приклад 2: Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\{1^{\infty}\}=$

$$=\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$$

Далі розглянемо інше означення неперервності.

Функція визначена в точці x_0, то можна ввести в розгляд різницю $\Delta x=x-x_0$, яку називають приростом аргументу ($\Delta x-$ дельта *x*), а різницю $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ називають приростом функції.

Так як умови $x\to x_0$ і $x-x_0\to 0$ $(\Delta x\to 0)$ однакові, то визначення неперервності можна переписати так:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Означення. Функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції.

*9.2. **Властивості неперервних на відрізку функцій***

Означення. Функція $y=f(x)$ є неперервною в інтервалі (a,b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Означення. Функція $y=f(x)$ є неперервною в відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу (a,b) і в точці $x=a$ неперервна справа (тобто $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$), а в точці $x=b$ неперервна зліва (тобто $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)$).

Наведемо ряд властивостей, що відносяться до функцій, неперервних на відрізку. Кожна з цих властивостей має важливе самостійне значення.

1) Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона набуває на ньому найбільшого і найменшого значень.

2) Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і приймає на його кінцях значення різних знаків, то в інтервалі (a,b) знайдеться хоча б одна така точка ***c***, у якій функція дорівнює нулю: $f(c)=0$.

3) Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і *m* – її найменше значення, а *M* – найбільше, то для будь-якого числа μ, яке знаходиться між *m* і *M,* знайдеться таке значення аргументу $c\in[a,b]$, що $f(c)=\mu$.

4) Якщо дві функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в області *X* і неперервні в точці $x_0\in X$, то в цій точці неперервні також функції $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$, $(g(x_0)\neq 0)$.

Зауваження. Елементарні функції неперервні в кожній внутрішній точці їх області визначення.

9.3. *Точки розриву неперервності функції і їхня класифікація*

Означення. Функція $f(x)$ називається розривною в точці x_0, якщо вона в точці x_0 не задовольняє хоча б одній із умов (1) неперервності. Такі точки називають точками розриву неперервності функції.

Введемо класифікацію точок розриву неперервності:

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, то така точка x_0 називається точкою усувного розриву.

2. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$; $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = B$, $A \neq B$, A і B – числа.

У цьому випадку говорять, що точка x_0 є точкою розриву неперервності функції 1–го роду. Величину $|B-A|$ називають стрибком функції в точці розриву неперервності першого роду.

3. Якщо, хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, то говорять, що в точці x_0 функція має розрив 2–го роду.

Наведемо приклади дослідження функцій на неперервність.

Приклад 3. Дослідити функції на неперервність і схематично побудувати графіки функцій.: а) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; б) $f(x) = \lg(x^2 + 3x)$;

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{при } x \leq 2, \\ x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Розв'язання. а). $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Елементарна функція $f(x)$ визначена, а отже і неперервна на всій числовій осі, за винятком точки $x = 0$. В точці $x = 0$ функція має розрив, оскільки вона визначена в будь-якому околі цієї точки, за виключенням самої точки.

Знайдемо односторонні границі функції в цій точці:

$$\lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{x} = \left\{ \frac{\sin(-0)}{-0} \right\} = \left\{ \frac{\sin 0}{0} \right\} = 1; \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = \left\{ \frac{\sin(+0)}{+0} \right\} = 1.$$

Отже, односторонні границі рівні в точці $x = 0$ але не дорівнюють

значенню функції в цій точці, так як функція в цій точці невизначена $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to +0} f(x) \neq f(0)$. Отже, точка $x = 0$ – точка усувного розриву функції.

Якщо покласти $f(0) = 1$, то функція $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0, \\ 1, \ x = 0. \end{cases}$ є неперервною на всій числовій вісі.

Для побудови графіка функції встановимо поведінку функції на нескінченності. Границя $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ так як функція $\sin x$ обмежена на нескінченності, а функція $\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$. Функція $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ графічно зображена на мал. 1. На графіку стрілочками показано, що точка $x=0$ не належить до області визначення функції $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

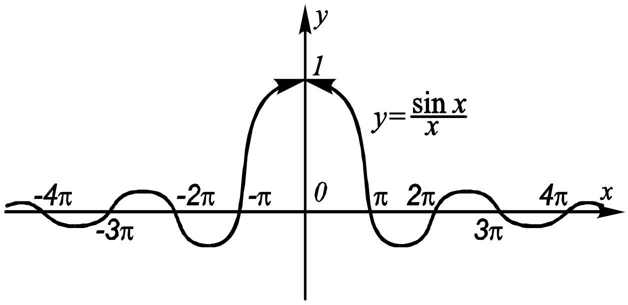


Рис. 1

б) $f(x)=\lg(x^2+3x)$. Логарифмічна функція $y=\lg u$ визначена лише для додатних значень свого аргументу u. Тому елементарна функція $f(x)=\lg(x^2+3x)$ визначена і неперервна для значень x, що задовольняють нерівності $x^2+3x>0$. Розв'язуючи цю нерівність, знаходимо область визначення і область неперервності функції: $x\in(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$.

У всіх точках відрізка $[-3;0]$ задана функція не визначена але точками її розриву є лише граничні точки $x=-3$ і $x=0$. В цих граничних точках функція не визначена але вона визначена в як завгодно близьких точках ліворуч від точки $x=-3$ і праворуч від точки $x=0$. Всі інші внутрішні точки відрізка $[-3;0]$, в яких функція також не визначена, не є точками розриву тому, що в околі цих внутрішніх точок функція не визначена.

Далі знаходимо односторонні границі функції при спрямуванні змінної x зліва $(x\to-3-0)$ і справа $(x\to+0)$ відносно точок розриву неперервності:

$$\lim_{x\to-3-0}\lg(x^2+3x)=\{\lg(+0)\}=-\infty;\ \lim_{x\to+0}\lg(x^2+3x)=-\infty.$$

Функція в точках $x=-3$ і $x=0$ має нескінченний розрив. Для побудови графіка знайдемо: $\lim\limits_{x\to+\infty}\lg(x^2+3x)=\{\lg(+\infty)\}=+\infty$;

$$\lim_{x\to-\infty}\lg(x^2+3x)=\{\lg((-\infty)^2-3\cdot\infty)\}=\{\lg(+\infty(+\infty-3))\}=\{\lg(+\infty)\}=+\infty.$$

Графік функції має вигляд (рис.2):

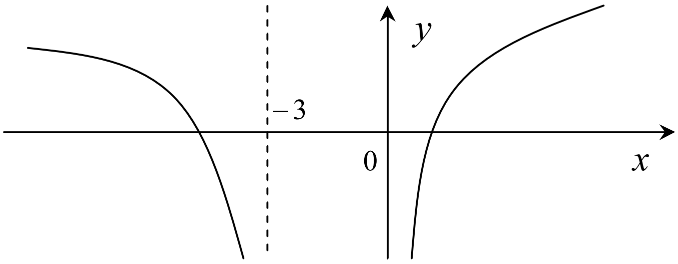


Рис. 2

в) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2 & \text{при } x\le 2,\\ x & \text{при } x>2.\end{cases}$ Функція $f(x)$ визначена на всій числовій осі; вона не є елементарною, так як задана двома різними формулами для різних інтервалів зміни аргументу x і тому може мати розрив в точці $x=2$, де змінюється її аналітичний вираз.

Дослідимо точку $x=2$. Знаходимо односторонні границі функції в точці $x=2$. $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)=\left\{-\dfrac{1}{2}\left(4-4\cdot 0+0^2\right)\right\}=-2$; $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} x=2.$

Лівостороння і правостороння границі функції скінченні але не рівні між собою. Тому, в точці $x=2$ функція має скінчений розрив. Величина $|-2-2|=4$ - стрибок функції, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2}x^2=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

Графік цієї функції має вигляд (рис. 3.):

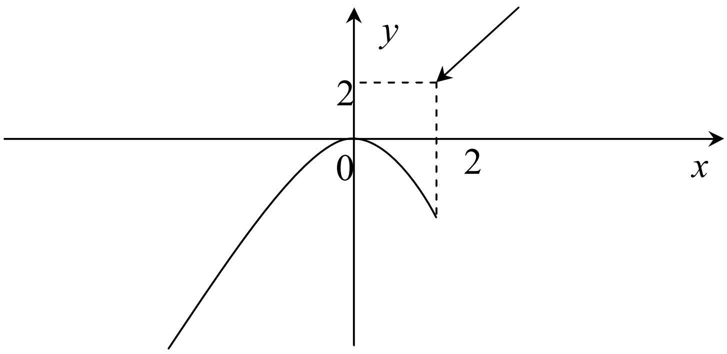


Рис. 3.

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Дати означення неперервної функції.
2. При виконанні якої умови можна переходити до границі під знаком границі?
3. Про що говорить виконання умови $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$?
4. Властивості неперервних функцій на відрізку?
5. Неперервність елементарних функцій.
6. Неперервність функції в точці передбачає виконання трьох умов. Сформулюйте ці умови.
7. Яка функція є розривною в точці?

8. Функція неперервна на відрізку, якщо вона…
9. Класифікація точок розриву неперервності.

Приклад 1. Знайти односторонні границі (зліва і справа від наведених точок) для функцій:

а) $y=\dfrac{4}{(x-2)^2}, x\to 2$; *б*) $y=2^{\frac{1}{x-2}}, x\to 2$; *в*) $y=arctg\dfrac{1}{2-x},\ x\to 2$.

Відповіді. *а*) $\lim\limits_{x\to 2+0} y=+\infty, \lim\limits_{x\to 2-0} y=+\infty$; *б*) $\lim\limits_{x\to 2-0} y=0, \lim\limits_{x\to 2+0} y=+\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to 2-0} y=\dfrac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to 2+0} y=-\dfrac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Визначити точки розриву неперервності і їх класифікувати, якщо вони є : *а*) $y=\dfrac{8}{x+4}$; *б*) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)}$; *в*) $y=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Відповіді. *а*) $x=-4$, т.р. 2-го роду; *б*) $x_1=-2, x_2=1$–т.р. 2-го роду;

в) $x_1=0, x_2=1$ – точки усувного розриву, $x_3=-1$– т.р. 2-го роду.

Приклад 3. Дослідити на неперервність функції:

а) $f(x)=2+\dfrac{1}{1-x}$; *б*) $f(x)=5^{\frac{1}{x+3}}$; *в*) $f(x)=\dfrac{2}{1-3^{3+x}}$; *г*) $f(x)=\left(5^{\frac{3x}{x-2}}-1\right)^{-1}$;

д) $f(x)=\begin{cases} 4\cos(x-\dfrac{\pi}{3}), x<\dfrac{\pi}{3} \\ 4, x\ge\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

Відповіді. *а*) x=1-т.р. 2-го роду; *б*) $x=-3$-т.р. 2-го роду; *в*) $x=-3$-т.р. 2-го роду;*г*) $x=2$-т.р. 1-го роду; $x=0$-т.р. 2-го роду ; *д*) неперервна.

ЛЕКЦІЯ 10

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Означення похідної
Геометричний зміст похідної функції
Механічний зміст похідної
Рівняння дотичної і нормалі до кривої
Зв'язок між неперервністю і диференційовністю функції
Основні правила диференціювання
Таблиця похідних

10.1. ***Означення похідної***

Розглядаючи нескінченно малі функції, ми порівнювали їх між собою шляхом знаходження границі їх відношення. Однак, необхідність такого розгляду виникає і при вивченні властивостей однієї заданої функції $y = f(x)$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $(a;b)$. Візьмемо значення аргументу $x \in (a;b)$ і надамо йому приріст Δx, тоді аргумент набуде значення $x + \Delta x$. Позначимо через $f(x)$ і $f(x+\Delta x)$– значення функції відповідно в точках x і $x + \Delta x$, а величину $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ назвемо приростом функції.

Далі розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

***Означення*:** Якщо границя відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ існує і скінченна, то вона називається похідною функції $y = f(x)$ в точці x і позначається одним із символів $y'(x)$, y'_x, $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Функція, що має похідну, називається диференційовною. Операція знаходження похідної функції називається диференціюванням цієї функції.

Користуючись означенням похідної, можна знайти похідну $y'(x)$ в довільній точці x і значення похідної в заданій точці $x = x_0$, яке позначається $y'(x_0)$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y(x) = x^2$ в точці $x = 3$.

Розв'язання. Надамо аргументу x приріст Δx, тоді функція набуде приросту

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Утворимо відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$, і знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$. Тобто, $y'(x)=2x$. Щоб знайти значення похідної в заданій точці $x=3$ необхідно в похідну $y'(x)=2x$ замість x підставити 3, отже $y'(3)=2\cdot 3=6$.

10.2. **Геометричний зміст похідної функції**

Нехай неперервна крива задана рівнянням $y=f(x)$. Позначимо через α – кут між дотичною до кривої в точці з абсцисою x і додатнім напрямком вісі *OX*, тоді $k=tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт дотичної. Геометричний зміст похідної полягає в тому, що похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою x.

10.3. **Механічний зміст похідної**

Закон руху $S=S(t)$ визначає залежність шляху *S* матеріальної точки від часу ***t*,** а величина $\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$ виражає середню швидкість точки за час Δt:

$$V_{ср.}=\frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Границя середньої швидкості при $\Delta t\to 0$ є швидкістю руху точки в даний момент часу t (або миттєвою швидкістю руху в момент часу t). Позначимо цю швидкість через V, тоді $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Цю рівність можна переписати у вигляді $V=S'(t)$, тобто швидкість прямолінійного руху матеріальної точки в момент часу t є похідною шляху $S(t)$. В цьому механічний зміст похідної.

10.4. **Рівняння дотичної і нормалі до кривої**

Нехай функція $y=f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку $[a;b]$. Проведемо до графіка функції $y=f(x)$ дотичну, у точці з абсцисою $x_0\in[a;b]$. Позначимо точку дотику через M_0, координатами якої є x_0 і $y_0=f(x_0)$, тобто $M_0(x_0;y_0)$.

Означення. Нормаллю до графіка функції в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці.

Використовуючи геометричний зміст похідної $k=f'(x)$ кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $k_{дот.}=f'(x_0)$, де $f'(x_0)$ – значення похідної функції $y=f(x)$ в точці дотику M_0. Отже, рівняння дотичної має вигляд:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі,знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k_{норм.}=-\frac{1}{k_{дот.}}=-\frac{1}{f'(x_0)}$ (якщо $f'(x_0)\neq 0$) . Тоді

$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$–рівняння нормалі до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$.

10.5. **Зв'язок між неперервністю і диференційовністю функції**

Чи буде функція мати границю в точці, у якій існує її похідна? Чи буде неперервною диференційовна функція? Ці питання виникають відразу ж, тому що і поняття похідної, і поняття неперервності мають загальну першооснову – поняття границі.

Приймемо без доведення таке твердження:

Якщо функція $y=f(x)$ диференційовна в деякій точці, то вона неперервна в цій точці.

Обернене твердження неправильне: для неперервної функції може і не існувати похідної.

10.6. **Основні правила диференціювання**

Наведемо правила, які використовуються при обчисленні похідних:

1) Якщо $y=f(x)=c$, де c – стала величина, то $y'=c'=0$.

2) Якщо $y=u(x)\pm v(x)$, то похідна алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій: $y'=(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$.

Дану властивість можна узагальнити на випадок трьох і більшої кількості функцій.

3) Похідна добутку двох функцій дорівнює добутку похідної першої з них на другу функцію плюс добуток першої функції на похідну другої функції; тобто , якщо $y=u\cdot v$, то $y'=(u\cdot v)'=u'\,v+u\,v'$.

4) Похідна дробу дорівнює дробу, чисельник якого є різницю між добутком похідної чисельника на знаменник і похідної знаменника на чисельник , а знаменник є квадратом знаменника заданого дробу, тобто , якщо

$$y=\frac{u}{v},\ \text{то}\ y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\,v'}{v^2}.$$

5) Якщо $y=f(x)$ і $x=\varphi(y)$ – дві взаємно обернені функції, то правило диференціювання оберненої функції записують так: $f'(x)=1/\varphi'(y)$ або $y'_x=1/x'_y$. Знаючи похідну оберненої функції знаходиться похідна заданої (прямої) функції.

6) Якщо функція $u=\varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y=f(u)$ має похідну y'_u в точці $u=\varphi(x)$, то складена функція $y=f(\varphi(x))$ має похідну y'_x в точці x, яка обчислюється за формулою $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Дана формула читається так: похідна y'_x складеної функції $y=f(\varphi(x))$ по змінній x дорівнює добутку похідної y'_u функції $y=f(u)$ по проміжному аргументу u і похідної u'_x проміжного аргументу $u=\varphi(x)$ по змінній x.

Зауваження. Правило справедливо і для декількох проміжних аргументів. Нехай $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\phi(x)$, то $y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$.

Знання правил диференціювання і похідних елементарних функцій дозволяє виконувати операцію знаходження похідної в конкретних випадках. На практиці частіше необхідно обчислювати похідні від складених функцій, тому в наведених формулах замість незалежного аргументу x, будемо розглядати залежний аргумент u або v залежних від x, тобто $u = u(x), v = v(x)$.Наведемо відповідні формули у вигляді таблиці.

10.7. **Таблиця похідних**

Правила диференціювання

1. $(c)' = 0$;
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, зокрема, $(c \cdot v)' = c \cdot v'$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, зокрема, $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}$, $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{1}{c}u'$;
5. Якщо $y = f(u), u = \varphi(x)$, то $y'(\varphi(x)) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$ або $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.
6. Якщо $y = f(x), x = \varphi(y)$, то $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$ або $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

Формули диференціювання основних елементарних функцій

1. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, *зокрема,* $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$, *якщо* $y = f(x) = x$, *то* $x' = 1$*;*

2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, зокрема, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, зокрема, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;
4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;.
5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
6. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
8. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
9. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
11. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

Наведемо приклади знаходження похідних функцій:

Використовуючи алгебраїчні перетворення, правила диференціювання наведені функції зведемо до табличних і застосовуючи відповідні формули диференціювання знайдемо похідні.

Приклад 2. Знайти похідну від функції: $y = 2x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$.

Розв'язання. $$y' = \left(2x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = (2x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 2(x)' + \left(x^{-1}\right)' + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 2 + (-1)x^{-2} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Приклад 3. Знайти похідні від функцій: а) $y = \frac{x^2 \cos x}{3}$; *б*) $y = e^x(\sin x - \cos x)$.

Розв'язання.

а) $y' = \left(\frac{x^2 \cos x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^2 \cos x\right)' = \left[(u\,v)' = u'v + u\,v'\right] = \frac{1}{3}\left(2x\cos x - x^2 \sin x\right).$;

б) $y' = (e^x(\sin x - \cos x))' = \left(e^x\right)'(\sin x - \cos x) + e^x(\sin x - \cos x)' =$
$= e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = e^x \sin x + e^x \sin x = 2e^x \sin x$.

Приклад **4.** Знайти похідні функцій: а) $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$; б) $y = \sin^3 \frac{x}{4}$; *в*) $y = 2^{\sin x + 4}$.

Розв'язання. а) $y' = \left(\ln\left(x^2 + 1\right)\right)' = \frac{1}{x^2 + 1}\left(x^2 + 1\right)' = \frac{2x}{x^2 + 1}$;

б) $y' = \left(\sin^3 \frac{x}{4}\right)' = 3\sin^2 \frac{x}{4}\left(\sin \frac{x}{4}\right)' = 3\sin^2 \frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\left(\frac{x}{4}\right)' = \frac{3}{4}\sin^2 \frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}$;

в) $y' = \left(2^{\sin x + 4}\right)' = 2^{\sin x + 4} \ln 2\,(\sin x + 4)' = 2^{\sin x + 4} \ln 2 \cdot \cos x$.

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Пояснити поняття приросту функції.
2. Дати означення похідної функції в точці.
3. Яка функція називається диференційованою?
4. Дотична до кривої? Дати означення і записати її рівняння.
5. Геометричний зміст похідної?
6. Механічний зміст похідної?
7. Поняття нормалі до кривої? Записати її рівняння.
8. Суть зв'язку між неперервністю і диференційованістю?
9. Записати основні правила диференціювання функції.
10. Обернена функція й її похідна?
11. Складена функція і її похідна?

Приклад 1. За означенням похідної, тобто знаходженням границі $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ знайти похідні функцій:

а) $y=2x^2-x$; б) $y=\frac{2}{x}$; *в*) $y=\sqrt[4]{x}$; *г*) $y=\sin 3x$; *д*) $y=\sqrt{4x+1}$.

Відповіді: *а*) $y'=4x-1$; б) $y'=-\frac{2}{x^2}$; *в*) $y'=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; *г*) $y'=3\cos 3x$; *д*) $y'=\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$.

Приклад 2. Знайти похідні функцій:

а) $y=3x^2+x-\frac{x^4}{4}$; б) $y=x-2\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}$; *в*) $y=\frac{3x}{4+x}$; *г*) $y=x^2\cdot\sin x$.

Відповіді:а) $y'=6x+1-x^3$; б) $y'=1-\frac{4}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}$; *в*) $y'=\frac{12}{(4+x)^2}$; *г*) $y'=2x\sin x+x^2\cos x$.

Приклад 3. Знайти похідні функцій і обчислити їх значення в точці:

а) $y(x)=x\sin x+\cos x$, $y'(\pi)=?$; *б*) $y(x)=(x^2-2)\cdot tgx$, $y'(0)=?$.

Відповіді: а) $y'(\pi)=-\pi$; *б*), $y'(0)=-2$.

Приклад 4. Знайти похідні функцій:

а) $y=(2+3x)^6$; *б*) $y=\cos(4x-2)$; *в*) $y=tg\sqrt{x+1}$; *г*) $y=\sin 2x\cos\frac{x}{2}$; *д*) $y=2\cos^2\frac{x}{2}$; *е*) $y=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$.

Відповіді:а) $y'=18(2+3x)^5$; *б*) $y'=-4\sin(4x-2)$; *в*) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}\cos^2\sqrt{x+1}}$; *г*) $y'=2\cos 2x\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x\sin\frac{x}{2}$; *д*) $y'=-\sin x$; *е*) $y'=\frac{1+\sin^2 x}{2\cos^3 x}$.

Приклад 5. Знайти похідні функцій:

а) $y=\arccos\sqrt{x}$; *б*) $y=arctg\frac{1}{x}$; *в*) $y=arctg\frac{2x}{1-x^2}$; *г*) $y=xarctgx-\ln\sqrt{1-x^2}$.

Відповіді:а) $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$; *б*) $y=-\frac{1}{x^2+1}$; *в*) $y'=\frac{2}{1+x^2}$; *г*) $y'=arctgx+\frac{2x}{1-x^4}$.

Приклад 6. Знайти похідні функцій:

а) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$; *б*) $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; *в*) $y=x^4(8\ln^2 x-4\ln x+1)$.

Відповіді:а) $y'=-\sin 4x$; *б*) $y'=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$; *в*) $y'=32x^3\ln^2 x$.

ЛЕКЦІЯ 11

ДИФЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Диференціювання функцій, заданих неявно
Логарифмічне диференціювання
Похідні параметрично заданих функцій
Похідні вищих порядків
Диференціал функції
Застосування диференціала до наближених обчислень

11.1 **Диференціювання функцій, заданих неявно**

Якщо функціональна залежність між y і x задана формулою, розв'язаної відносно y, тобто має вигляд $y = f(x)$, то відповідна функція називається явною. Наприклад, $y = x^2 + x - 1$, $y = \sin x$ і так далі.

Якщо формула не розв'язана відносно y, тобто має вигляд $F(x, y) = 0$, то функція називається неявною. Наприклад, $y - x^2 - x + 1 = 0$, $\ln y + y^2 = \sin x$ і т.д.

Правило. Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності, потім одержане рівняння розв\`язати відносно y' (y' виразиться через x і y, тобто $y' = \varphi(x, y)$).

Зауваження. При цьому необхідно вважати y функцією аргументу x, тобто $y'(x)$ пишемо, а $x' = 1$.

Приклад 1. Знайти похідні y' функцій $y = f(x)$, що задані неявно рівняннями: а) $x^2 + y^2 = 9$, б) $x^3 + \ln y = x^2 e^y$.

Розв\`язання. Диференціюємо обидві частини рівняння по x, враховуючи, що y – функція від x:

$$\text{а)}\left(x^2 + y^2\right)' = (0)', 2x + 2y \cdot y' = 0, y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y};$$

$$\text{б)}\left(x^3 + \ln y\right)' = \left(x^2 e^y\right)', \left(x^3\right)' + (\ln y)' = \left(x^2 \cdot e^y\right)', 3x^2 + \frac{y'}{y} = 2xe^y - x^2 e^y y',$$

$$y'\left(\frac{1}{y} - x^2 e^y\right) = 2xe^y - 3x^2, y' = \frac{\left(2xe^y - 3x^2\right)y}{1 - x^2 y e^y}.$$

11.2. **Логарифмічне диференціювання**

Знання формул диференціювання основних елементарних функцій не завжди дозволяє успішно знаходити похідні більш складних функцій. Наприклад, для показникові – степеневої функції

$$y = f(x)^{\varphi(x)}, \qquad f(x) > 0 \qquad (1)$$

не застосовна жодна з отриманих формул. Однак існує прийом, що дає можливість перебороти наявні труднощі.

Прологарифмуємо обидві частини рівності (1): $\ln y(x) = \varphi(x) \ln f(x)$.

Візьмемо похідну від обох частин, не забуваючи, що y є функція від x:

$$\frac{y'(x)}{y(x)}=\varphi'(x)\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)};\ y'(x)=y(x)\left(\varphi'(x)\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\right).$$

У підсумку одержимо: $y'(x)=\left(f(x)^{\varphi(x)}\right)'=f(x)^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln f(x)+\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}\right).$

Даний метод успішно знаходить застосування і тоді, коли функція являє собою добуток великого числа співмножників або є дробом, чисельник і знаменник якого складаються з ряду співмножників.

Приклад 2. Знайти y', якщо: $y=x^{\cos 3x}$.

Розв`язання. Прологарифмуємо обидві частини рівняння, що задає функцію:

$$\ln y=\ln x^{\cos 3x},\ \ln y=\cos 3x\ln x.$$

Диференціюємо обидві частини рівняння: $\frac{y'}{y}=-3\sin 3x\cdot\ln x+\cos 3x\cdot\frac{1}{x}$, звідки

$$y'=y\left(-3\sin 3x\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cos 3x\right).$$

Підставляючи в цей вираз y, маємо: $y'=x^{\cos 3x}\left(-3\sin 3x\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cos 3x\right).$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y(x)=\frac{x}{(2x)^x\sin\left(\sqrt{3}x\right)}$.

Розв`язання. Логарифмуємо наявну рівність і використовуємо властивості логарифмів: $\ln y(x)=\ln\frac{x}{(2x)^x\sin\left(\sqrt{3}x\right)}$, $\ln y(x)=\ln x-x(\ln 2+\ln x)-\ln\sin\left(\sqrt{3}x\right).$

Потім виконуємо диференціювання: $\frac{y'(x)}{y(x)}=\frac{1}{x}-\ln 2-\ln x-x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}x\right)}{\sin\left(\sqrt{3}x\right)}.$

Остаточно одержуємо: $y'(x)=\frac{x}{(2x)^x\sin\left(\sqrt{3}x\right)}\left(\frac{1}{x}-\ln 2-\ln x-1-\sqrt{3}ctg\left(\sqrt{3}x\right)\right).$

11.3. **Диференціювання функції, заданої параметрично**

Нехай функція $y=f(x)$ задана системою рівнянь $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$ Будемо припускати, що функції $x=\varphi(t)$ і $y=\psi(t)$ диференційовані, причому $\varphi'(t)\neq 0$. Функція $x=\varphi(t)$ має обернену $t=\varphi^{-1}(x)$, тоді маємо складену функцію $y=\psi(t)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right).$ Диференціюючи y по x за формулою $y'_x=y'_t\cdot t'_x,\left(y'(x)=\psi'(t)\cdot\left(\varphi^{-1}(x)\right)'\right)$ і користуючись формулою похідної оберненої функції: $t'_x=\frac{1}{x'_t}$, одержимо $y'_x=y'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}$.

Отже, $$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ або } y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Отримана формула дає змогу знаходити похідну y'_x від функції заданої параметрично, не знаходячи безпосередньо залежність y від x.

Приклад 4. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t. \end{cases}$.

Розв`язання. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(3\sin t)'_t}{(2\cos t)'_t} = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2} ctgt$, $y'_x = -\frac{3}{2} ctgt$.

11.4. **Похідні вищих порядків**

Операція диференціювання може бути повторена, якщо похідна функції знову є диференційовною функцією. Друга похідна для функції $y = f(x)$ розглядається як похідна від її першої похідної: $(y'(x))'$ і позначається так:

$$y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x).$$

Процес диференціювання може продовжуватися і далі, якщо в результаті диференціювання маємо функції, що мають похідні. Похідні $y'', \dots, y^{(n)}, \dots$ називають похідними вищих порядків, а їх знаходження – послідовним диференціюванням функції.

Приклад 5. Знайти похідні y', y'' і y''' функції $y = \cos e^x$.

Розв`язання. $y' = (\cos e^x)' = -e^x \sin e^x$; $y'' = (-e^x \sin e^x)' = -e^x \sin e^x - e^{2x} \cos e^x$;

$$y''' = -e^x \sin e^x - e^{2x} \cos e^x - 2e^{2x} \cos e^x + e^{3x} \sin e^x =$$
$$= -e^x (\sin e^x + e^x \cos e^x + 2e^x \cos e^x - e^{2x} \sin e^x) =$$
$$= -e^x (\sin e^x + 3e^x \cos e^x - e^{2x} \sin e^x).$$

Якщо функція задана параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$, то для знаходження похідної другого порядку розглянемо $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y'_x = F(t), \end{cases}$ де $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = F(t)$.

Застосовуючи правило диференціювання функції, заданої параметрично, знаходимо

$$y''_{xx} = \frac{F'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Похідну другого порядку іще позначають символом $\frac{d^2 y}{dx^2}$, який читається так: друга похідна від функції y по x два рази.

Приклад *6. Знайти* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *якщо* $\begin{cases} x = 1 + e^t \\ y = t + e^{-t}. \end{cases}$

Розв`язання. Знаходимо спочатку $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(t + e^{-t}\right)'_t}{\left(1 + e^t\right)'_t} = \frac{1 - e^{-t}}{e^t} = e^{-t} - e^{-2t}$.

Далі за формулою $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$ знаходимо $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)'_t}{e^t} = \frac{-e^{-t} + 2e^{-2t}}{e^t}$.

11.5. **Диференціал функції**

Нехай задана функція $y = f(x)$. Приріст функції в точці x_0 викликаний прирістом Δx аргументу , обчислюється по формулі:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

За означенням похідної і враховуючи зв’язок між функцією, її границею і нескінченно малою функцією маємо: Так як $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$.

Отже,
$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \qquad (2)$$

Приріст функції складається з двох нескінченно малих доданків. Доданок $f'(x_0)\Delta x$ завжди лінійний відносно Δx.

Означення. Лінійну відносно приросту аргументу частину приросту функції називають диференціалом функції і позначають: $dy = f'(x_0)\Delta x$.

У цьому записі прийнято вважати $\Delta x = dx$. Дійсно, якщо задана функція $y = x$, то $dy = dx$.

Але, з іншого боку, по визначенню диференціала, $dy = f'(x_0)\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$,

Тобто маємо $dy = dx$ і $dy = \Delta x$, $\Delta x = dx$.

Отже,
$$dy = f'(x_0)dx.$$

Приклад 7. Знайти диференціал функції $y = arctgx$.

Розв`язання. $dy = (arctgx)'\,dx = \frac{dx}{1 + x^2}$.

11.6. **Застосування диференціала до наближених обчислень**

Функція $y = f(x)$ диференційовна, а тому і неперервна, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Отже Δy– нескінченно мала величина при $\Delta x \to 0$. Диференціал dy є також нескінченно малою величиною при $\Delta x \to 0$, так як $\lim\limits_{\Delta x \to 0} dy = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x)dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x)\Delta x = 0,$ тому, що добуток обмеженої функції на нескінченно малу при $\Delta x \to 0$, є функція нескінченно мала.

Більш того, ці дві нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$ еквівалентні:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)}=1;\ \ f'(x)\neq 0.$$

Еквівалентність Δy і dy дає можливість при малих значеннях зміни аргументу приблизно вважати $\Delta y\approx dy$ або

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x.$$

Що може дати ця формула? Нехай у деякій точці x_0 порівняно просто обчислюються значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$. Тоді в іншій точці $x_1=x_0+\Delta x$, що відстоїть недалеко від x_0, можливе представлення:

$$f(x_1)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0).$$

Тут залишається відкритим питання про точність одержуваного результату. Ця обставина знижує цінність даної формули наближеного обчислення але в основному вона корисна і широко застосовується на практиці.

Приклад 8. Обчислити $\sin 31°$.

Розв`язання. $f(x_1)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0), x_0=30°,\ \ x_1=31°,$

$$\Delta x=x_1-x_0=31°-30°=1°=\frac{\pi}{180}=0{,}017,\ f'(x)=(\sin x)'=\cos x,$$

$$f'(x_0)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}856,$$

$$f(x_1)=\sin 31°=\sin 30°+\cos 30°\cdot 1°\approx 0{,}5+0{,}856\cdot 0{,}017=0{,}5150.$$

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Явний і неявний запис функції?
2. Правило обчислення похідних неявно заданих функцій?
3. В чому полягає суть логарифмічного диференціювання?
4. Параметричне задання функції?
5. Формула похідної параметрично заданої функції?
6. Наведіть означення диференціалу і його суть.

Приклад 1. Обчислити похідну функції задану неявно:

а) $x^3+x^2y+y^2=8$; *б*) $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$; *в*) $x+y=e^{x-y}$

Відповідь: а) $y'=-\dfrac{3x^2+2xy}{x^2+2y}$; *б*) $y'=\dfrac{e^y\sin x+e^{-x}\sin y}{e^y\cos x+e^{-x}\cos y}$; *в*) $y'=\dfrac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$.

Приклад 2. Знайти похідну функції логарифмічним диференціюванням:

а) $y=(\cos)^{\sin 2x}$; *б*) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$; *в*) $y=(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$; *г*) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}$.

Відповідь:а) $y'=2(\cos)^{\sin 2x}\left(\cos 2x\ln\cos x-\sin^2 x\right)$;

б) $y'=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$;*в*) $y'=\dfrac{2x^2-3x-1}{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^3}}$;

г) $y'=\sqrt[3]{\dfrac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}\dfrac{x^3-3x^2-x-1}{x(x-1)(x^2+1)}$.

Приклад 3. Знайти похідну y'_x функції $y=f(x)$, що задана параметрично:

а) $\begin{cases} x=3t+t^2 \\ y=4t-t^2 \end{cases}$; *б*) $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$; *в*) $\begin{cases} x=\sin^3 t \\ y=\cos^3 t \end{cases}$; *г*) $\begin{cases} x=t+\ln\sin t \\ y=t+\ln\cos t \end{cases}$.

Відповідь: а) $y'_x=\dfrac{4-2t}{3+2t}$;*б*) $y'_x=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$;*в*) $y'_x=-ctgt$;*г*) $y'_x=\dfrac{1-tgt}{1+ctgt}$.

Приклад 4. Знайти похідну другого порядку y'' функції $y=f(x)$:

а) $y=\dfrac{x}{x+1}$; *б*) $y=x\cos x$; *в*) $y=x^2\ln x$; *г*) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; *д*) $y=\cos^2 2x$.

Відповідь: *а*) $y''=-\dfrac{2}{(x+1)^3}$; *б*) $y''=-2\sin x-x\cos x$;*в*) $y''=2\ln x+3$;

г) $y''=\dfrac{2-3x^2}{x^3(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; *д*) $y''=-8\cos 4x$.

Приклад 5. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} функції $y=f(x)$, що задана параметрично:

а) $\begin{cases} x=3t-t^2 \\ y=4t-t^3 \end{cases}$; *б*) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$; *в*) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\ln t \end{cases}$; *г*) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=1-\cos t \end{cases}$.

Відповідь: а) $y''_{xx}=\dfrac{6t^2-18t+8}{(3-2t)^3}$; *б*) $y''_{xx}=-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$;*в*) $y''_{xx}=\dfrac{-2}{t}$;

г) $y''_{xx}=-\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$.

Приклад 6 . Для заданих функцій $y=f(x)$знайти їх диференціал:

а) $y=(a+bx)^m$; *б*) $y=e^{-x}(2-2x-x^2)$; *в*) $y=\dfrac{x^n}{n^2}(1-n\ln x)$.

Відповідь: а) $dy=bm(a+bx)^{m-1}dx$; *б*) $dy=x^2e^{-x}dx$; *в*) $dy=-x^{n-1}\ln x dx$.

Приклад 7 . Для заданої функції $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{5-x^2}\right), x_0=0{,}96$знайти :

а) її диференціал; *б*) наближене значення функції в точці x_0.

Відповідь: а)$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}\right)dx$; *б*) 1,49.

Приклад 8. Обчислити: *а*) $\sqrt[4]{17}$; *б*) $\sin 29°$; *в*) $arctg0{,}98$.

Відповідь: : *а*) $\sqrt[4]{17}\approx 2{,}031$; *б*) $\sin 29°\approx 0{,}4848$; *в*) $arctg0{,}98\approx 0{,}7754$.

ЛЕКЦІЯ 12

ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Теореми Ферма, Ролля, Коші, Лагранжа.
Правило Бернуллі – Лопіталя.

12.1. **Теореми про диференційовані функції**

Зв'язок між властивостями функції і її похідною був предметом глибокого вивчення із самого зародження математичного аналізу. Розглянуті теореми дозволяють не тільки одержати оцінки, важливі для наступного побудови математичного аналізу, але й обґрунтувати різні методи наближених обчислень.

Теорема Ферма. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і набуває свого найбільшого (чи найменшого) значення у внутрішній точці c цього відрізка ($a < c < b$). Якщо в точці c існує похідна функції $f'(x)$, то вона дорівнює нулю: $f'(c) = 0$.

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ в точці c досягає свого найбільшого значення, тобто $f(x) \le f(c)$ для всіх $x \in [a,b]$.

Похідна функції $y = f(x)$ у точці c дорівнює $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.

Так як $c-$ внутрішня точка інтервалу (a,b), то Δx може бути додатнім і від'ємним.

Нехай $\Delta x > 0$. Тоді згідно з умовою $f(x) \le f(c)$ маємо $f(c + \Delta x) - f(c) \le 0$.

Тому для $\Delta x > 0$ $f_+(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0$.

Тепер нехай $\Delta x < 0$, $f(c + \Delta x) - f(c) \le 0$. Отже $f_-(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0$.

За умовою теореми похідна в точці c існує, тому $f_-(c) = f_+(c)$. Це можливо лише тоді, коли $f_-(c) = f_+(c) = f(c) = 0$, тобто $f'(c) = 0$, що й треба було довести.

Геометричний зміст теореми полягає в тому, що якщо функція $y = f(x)$ у точці досягає найбільшого (найменшого) свого значення, то дотична, проведена до графіка функції в цій точці, паралельна осі *OX*.

Теорема Ролля. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційована на інтервалі (a,b) і на кінцях відрізку приймає однакові значення $f(a) = f(b)$, то знайдеться хоча б одна така точка $c \in (a,b)$, в якій $f'(c) = 0$.

Доведення теореми провести самостійно.

Геометрична інтерпретація теореми Ролля полягає в тому, що існує на кривій принаймні одна точка з абсцисою $c \in (a,b)$, у якій дотична до кривої $y = f(x)$ паралельна осі OX (мал. 1.).

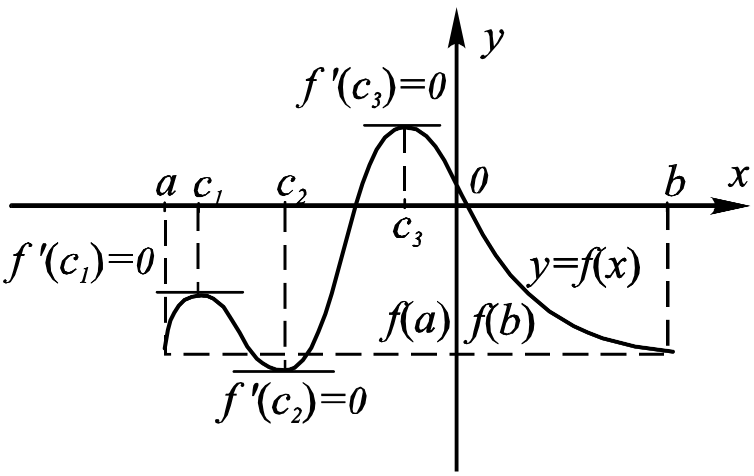


Рис.1

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ і диференційована в інтервалі (a,b), причому $\varphi'(x) \neq 0$, то знайдеться принаймні одна така точка $c \in (a,b)$, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доведення. Очевидно, що різниця $\varphi(b)-\varphi(a) \neq 0$, тому що в противному випадку, знайшлася б така точка c, що $\varphi'(c) = 0$, чого не може бути за умовою теореми. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}(\varphi(x)-\varphi(a)).$$

Ця функція є лінійною комбінацією функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$ і диференційованих в інтервалі (a,b), і на кінцях інтервалу приймає однакові значення $F(b) = F(a) = 0$.

Отже, $F(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля. Це означає, що знайдеться принаймні одна така точка $x = c \in (a;b)$, в якій $F'(c) = 0$.

Знайдемо $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$ і $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)$.

Отже, $0 = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)$, або $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Що і було потрібно довести.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційована в інтервалі (a,b), то знайдеться принаймні одна така точка $c \in (a,b)$, така, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Доведення. Теорему Лагранжа можна розглядати як частинний випадок теореми Коші. Дійсно, нехай $\varphi(x)=x$, тоді $\varphi(b)-\varphi(a)=b-a, \varphi'(x)=1, \varphi'(c)=1$.

Підставимо ці значення в формулу $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$,отримаємо

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Останню формулу можна записати так: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ – і називається формулою Лагранжа, або формулою скінченних приростів.

12.2. **Розкриття невизначеностей за правилом Бернуллі–Лопіталя**

Швейцарський математик И. Бернуллі першим знайшов зв'язок між границею відношення двох функцій і границею відношення їхніх похідних цих функцій. Названий зв’язок сформульований у вигляді простих формул його сучасником **–** французьким математиком Лопіталем.

Теорема 1(розкриття невизначеності $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a,b]$, диференційовані на інтервалі (a,b), причому $g'(x)\neq 0$. Нехай також $f(x_0)=0,\ g(x_0)=0$. Тоді, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому має місце рівність $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Рівність читається так: границя відношення функцій дорівнює границі відношення похідних від цих функцій.

Доведення. За умовою теореми функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в інтервалі (a,b), значить і неперервні. Тому в інтервалі (a,b) на відрізку $[x_0,x]$ для функцій $f(x)$ і $g(x)$ справедлива теорема Коші: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$,

де $c\in(x_0,x)$. Враховуючи, що $f(x_0)=g(x_0)=0$, отримуємо $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

При $x\to x_0$ і $c\to x_0$, тому, враховуючи, що $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ за умовою теореми існує, одержимо: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, що і було потрібно довести.

Зауваження 1. Якщо $x\to\infty$, то правило Лопіталя зберігає силу.

Зауваження 2. У випадку, коли границя похідних знову є невизначеністю, правило Бернуллі – Лопіталя можна застосовувати багаторазово, якщо при цьому функції $f(x)$ і $g(x)$ мають відповідні похідні, що задовольняють умовам даної теореми.

Зауваження 3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує, то це зовсім не означає, що і $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ також не існує. Просто в цьому випадку правило Бернуллі – Лопіталя не дає змогу знайти границю.

Теорема 2. (розкриття невизначеності $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і диференційовані для всіх x в околі точки x_0, причому $g'(x_0)\neq 0$. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$. Тоді, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, і має місце рівність $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доведення цієї теореми опускаємо. Усі три зауваження попередньої теореми зберігають силу в умовах теореми 2.

***Приклад* 1.** Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1-\ln x}{e^x-e}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник дробу $\dfrac{x^2-1-\ln x}{e^x-e}$ прямують до нуля при $x\to 1$, маємо невизначеність вигляду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1-\ln x}{e^x-e}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\dfrac{1}{x}}{e^x}=\dfrac{3}{e}$.

***Приклад* 2.** Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Розглянуті теореми дозволяють розкривати невизначеності $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Інші невизначеності: $\{0\cdot\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$, $\{\infty-\infty\}$, $\{1^\infty\}$ – можуть бути зведені до $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ шляхом алгебраїчних перетворень.

Дійсно, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\{0\cdot\infty\}$, то добуток функцій представимо у вигляді частки: $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ або $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для невизначеностей: $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$, $\{1^\infty\}$.–необхідні перетворення: $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$, що приведе нас до вже розглянутої невизначеності $\{0\cdot\infty\}$.

Тобто, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)=\lambda$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^{\lambda}$.

При невизначеності $\{\infty-\infty\}$, зв'язаної з обчисленням границі $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$, необхідні наступні перетворення:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$ що дозволяють одержати невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, для розкриття якої застосовується правило Бернуллі – Лопіталя.

Розглянемо приклади. Загальні рекомендації такі: треба вибрати таке перетворення, щоб після диференціювання, вирази, що стоятимуть в чисельнику і знаменнику, спрощувались, а не ускладнювались.

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg2x$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot ctg2x=\{0\cdot\infty\}$. Перетворимо функцію $x\cdot ctg2x$ до дробу, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля чи до нескінченності, потім застосуємо відповідно правило Бернуллі –Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot ctg2x=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos^2 2x=\frac{1}{2}.$$

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}\,x)^x$.

Розв'язання. Очевидно, що дана границя являє собою невизначеність типу $\{\infty^0\}$. Для застосуванню правила зробимо перетворення:

$$\lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}\,x)^x=\{\infty^0\}=\lim_{x\to 0} e^{x\ln ctgx},$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln\mathrm{ctg}\,x=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\mathrm{ctg}\,x}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}==\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\mathrm{ctg}\,x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin 2x}=$$

$$=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x^2)'}{(\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2\cos 2x}=\left\{\frac{0}{2\cos 0}\right\}=\left\{\frac{0}{2}\right\}=0.$$

Тому $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}\,x)^x=e^0=1$.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2\cos(x-2)}{2x^2+3\cos(2x-3)}$.

Розв'язання. Ми маємо невизначеність типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2\cos(x-2)}{2x^2+3\cos(2x-3)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2\sin(x-2)}{4x-6\sin(2x-3)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+2\cos(x-2)}{4-12\cos(2x-3)}.$$

Далі правило Лопіталя не вдається застосувати, тому що границя отриманого співвідношення при $x\to\infty$ не існує. Разом з тим, інший спосіб розкриття невизначеності досить просто приводить до результату:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2\cos(x-2)}{2x^2+3\cos(2x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2\cos(x-2)}{x^2}}{2+\dfrac{3\cos(2x-3)}{x^2}}=\frac{3}{2}.$$

Запитання до самоконтролю і приклади

1.Сформулюйте і доведіть теорему Ферма.
2. Сформулюйте і доведіть теорему Ролля.
3. Сформулюйте і доведіть теорему Коші.
4.Сформулюйте і доведіть теорему Лагранжа.
5. У чому суть правила Лопіталя ? Навести приклади.
6. Як розкриваються невизначеності $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. Навести приклади.

Приклад 1. Знайти границю функції за правилом Бернуллі – Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-5x^2+4}{x^3-6x+5}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\sin^2 x}$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}}{\frac{1}{x}}$.

Відповідь. 1) $\dfrac{7}{3}$; 2) 0,25; 3) 1/18; 4) –5/3; 5) 0; 6) 0; 7) 0.

Приклад 2.

1) $\lim\limits_{x\to1}(x)^{\frac{1}{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}(x)^{\frac{2}{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)tg\dfrac{x}{2}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Відповідь. 1) e ; 2) 1 ;3) 0 ; 4) –2 ; 5) ∞ ; 6) –1 .

ЛЕКЦІЯ 13

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Ознаки монотонності функції
Екстремум функції
Дослідження функції за допомогою другої похідної
Знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної на відрізку функції

13.1. Ознаки монотонності функції

Означення. Функція $y = f(x)$ – зростає на (a,b)(позначається $\uparrow$) (мал. 1, а), якщо при любих $x_1, x_2 \in (a,b)$ $(x_1 > x_2)$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$; $f(x)$–спадає на (a,b)(позначається $\downarrow$) (мал. 1, б)), якщо при любих $x_1, x_2 \in (a,b)$ $(x_1 > x_2)$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

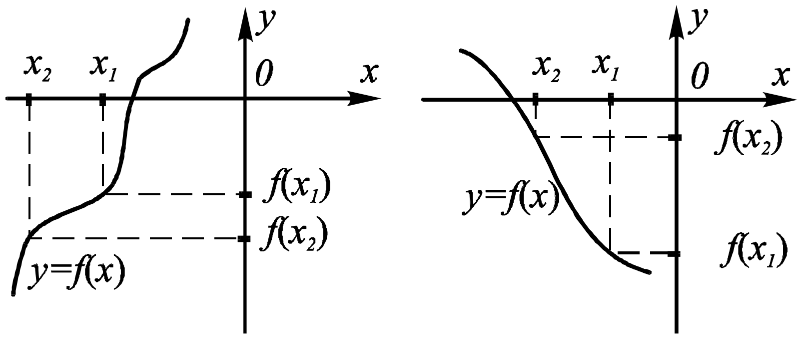


Рис. 1.

Зростання і спадання (монотонність) характеризується знаком її першої похідної. Справедливі такі твердження.

Теорема 1. (необхідна умова). Якщо диференційовна на відрізку $[a,b]$ функція $y = f(x)$ зростає, то її похідна на цьому відрізку більша нуля, тобто $f'(x) \geq 0$.

Доведення. Якщо $y = f(x)$ зростає на $[a,b]$, то $f(x+\Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$, $f(x+\Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$, тому відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

завжди більше нуля, так як чисельник і знаменник одного знаку. Тоді

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

що і було потрібно довести.

Аналогічно може бути сформульована і доведена теорема для спадної функції.

Теорема 2.(достатні умови строгої монотонності функції)
Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційовна в інтервалі

(a,b), причому $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) всюди, крім, можливо, скінченного числа точок, в яких $f'(x)=0$ на (a,b), то вона зростає (спадає) на відрізку $[a,b]$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $f'(x)>0$. Функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Лагранжа, тому для будь-яких $x_1<x_2$ із відрізка $[a,b]$ одержуємо:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),\ \ c\in(x_1,x_2).$$

За умовою теореми, $f'(c)>0$, отже, $f(x_2)-f(x_1)>0$, а виходить, $f(x)$ – зростаюча функція, що і було потрібно довести. Аналогічно і для $f'(x)<0$.

Геометричний теореми полягає в тому, що якщо похідна більша нуля, то дотична до графіка функції утворює гострий кут з додатнім напрямком осі OX і функція при цьому зростає, а для графіка спадної функції цей кут тупий і функція спадає (мал. 2).

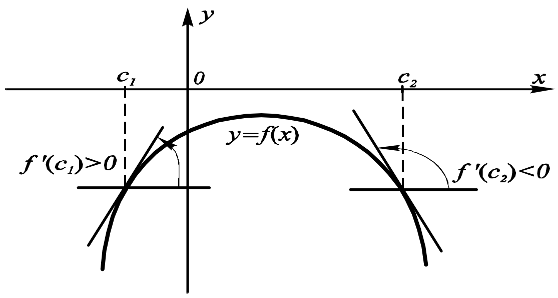


Рис. 2.

13.2. **Екстремум функції**

Означення. Функція $y=f(x)$ має в точці локальний максимум (мінімум) в точці *c,* якщо існує такий окіл цієї точки, що для усіх $x\neq c$ з цього околу виконується нерівність

$$f(x)<f(c)\left(f(x)>f(c)\right).$$

Точки локального максимуму (max) (мал. 3, а) і локального мінімуму (min) (мал. 3, б) називають точками локального екстремуму. Іноді слово “локальний” опускають і просто говорять про екстремум функції. Разом з тим, екстремум – властивість локальна, що характеризує поведінку функції в точці шляхом порівняння її значень зі значеннями в точках області визначення, прилеглих до даної. Точка екстремуму повинна бути тільки внутрішньою точкою проміжку і *f(x)* у ній повинна бути обов'язково визначена.

Теорема 3 (необхідна умова існування екстремуму). Якщо функція $y=f(x)$ має екстремум у деякій точці c і в цій точці існує похідна $f'(c)$, то вона дорівнює нулю: $f'(c)=0$.

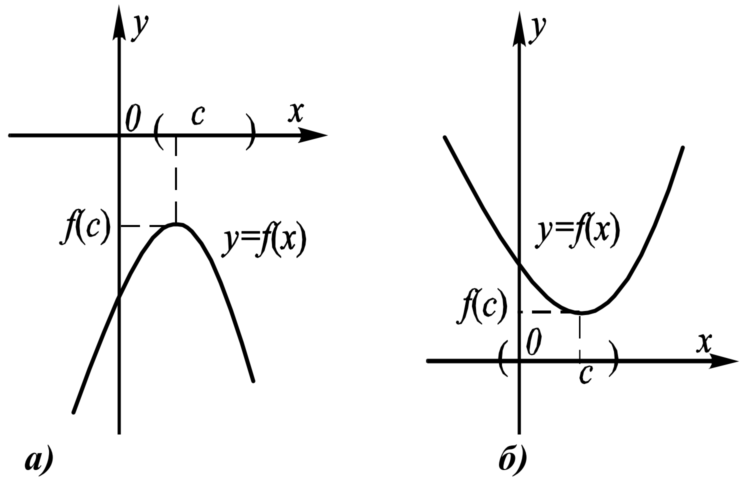


Рис. 3.

Доведення. Нехай функція $f(x)$в точці c має максимум, тоді незалежно від знака досить малих Δx буде мати місце нерівність

$$f(c+\Delta x)-f(c)<0$$

За означенням похідної маємо: $f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$.

Але $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}<0$ для $\Delta x>0$ і $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}>0$ для $\Delta x<0$.

Знаходимо границю цих відношень для $\Delta x\to 0$:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\geq 0$,якщо $\Delta x<0$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\leq 0$, $\Delta x<0$. Останні дві нерівності $f'(c)\geq 0$ і $f'(c)\leq 0$ одночасно мають місце тільки тоді, коли $f'(c)=0$.

Аналогічно доводиться теорема для випадку, коли в точці c функція досягає мінімуму.

Підкреслимо, що дана теорема є усього лише необхідною умовою, але не достатньою. Це значить, що якщо в деякій точці $f'(c)=0,$то питання про існування екстремуму залишається відкритим.

Якщо ж $f'(c)\neq 0,$то цього вже досить, щоб стверджувати, що в точці c екстремуму немає.

Розв'язуючи рівняння $f'(x)=0$, ми знаходимо тільки точки, в яких можливий екстремум. На мал. 3(а) в точці c $f'(c)=0$ і екстремум існує, а в точці c (мал. 3(б)) $f'(c)=0$, але екстремум відсутній. Тобто, необхідно провести додаткові дослідження для встановлення його існування чи відсутності.

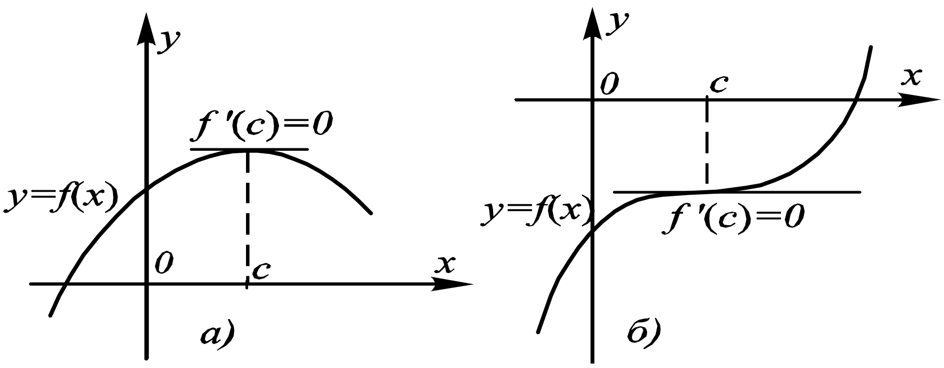


Рис. 3.

Означення. Точки, у яких похідна функції перетворюється в нуль або в нескінченність або не існує, називаються критичними.

Іншими словами: критичні точки називають точками підозрілими на екстремум.

Теорема 4 (достатня умова екстремуму). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в деякому інтервалі, що містить критичну точку c; диференційована в усіх точках цього проміжку, за винятком, можливо, самої точки c, і при переході з ліва на право через критичну точку похідна $f'(x)$ змінює знак із плюса (мінуса) на мінус (плюс), то в цій точці c функція $f(x)$ має максимум (мінімум). Якщо знак похідної $f'(x)$ не змінюється, то точка c не є точкою екстремуму.

Доведення провести самостійно.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Розв'язання.

1) Знайдемо область визначення функції: $x + 1 \neq 0$, $x \neq -1$. Отже: $D(f) = \{\ x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)\ \}$.

2) Шукаємо похідну функцію: $f'(x)$. $y' = \left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)' = \dfrac{(x^2)'(x+1) - (x+1)'x^2}{(x+1)^2} =$

$$= \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

3) Знаходимо критичні точки: а) прирівнюємо похідну до нуля і знаходимо корені рівняння $y' = 0$, $\dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0$, $x^2 + 2x = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

б) знаходимо значення x, для яких $f'(x)$ не існує: $(x+1)^2 = 0$, $x \neq -1$.

Отже, критичні точки: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ і $x_3 = 0$.

4) Досліджуємо знак похідної зліва і справа від критичної точки, обчислюючи значення похідної в деяких точках із кожного з інтервалів, на які критичні точки розбивають область визначення: $y'(-3)=\frac{3}{4}$; $y'(-1{,}5)=-3$; $y'(1)=\frac{3}{4}$.

5) Заповнюємо таблицю.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	Не існує	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	-4 max	$\downarrow$	Не існує	$\downarrow$	0 min	$\uparrow$

Отже, функція на інтервалах $(-\infty;-2)$, $(0;+\infty)$ монотонно зростає, на $(-2;-1)$, $(-1;0)$ монотонно спадає; в точці $x=-2$ функція має максимум, $y_{\max}(-2)=\left.\frac{x^2}{x+1}\right|_{x=-2}=-4$; в точці $x=0$ функція має мінімум, $y_{\min}(0)=\left.\frac{x^2}{x+1}\right|_{x=0}=0$.

13.3. **Дослідження функції за допомогою другої похідної**

Друга похідна функції, якщо вона існує, може бути використана для дослідження на екстремум.

Теорема. Якщо для функції $y=f(x)$ в точці $x=c$ похідна $f'(c)=0$, а в її околі $f''(x)$ неперервна, причому $f''(c)<0$ $(f''(c)>0)$, то ця точка є точкою її максимуму (мінімуму).

Приймемо теорему без доведення.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $y=2x^3-3x^2-12x+1$.

Розв'язання. Обчислимо першу похідну: $y'=6x^2-6x-12=6\left(x^2-x-2\right)$.

Знаходимо критичні точки. Для цього розв'язуємо рівняння $x^2-x-2=0$. Критичними точками є $x_1=-1$, $x_2=2$.

Знаходимо другу похідну : $y''=12x-6$.

Обчислюємо значення другої похідної в критичних точках:

$y''(-1)=12\cdot(-1)-6=-18<0$, $y''(2)=12\cdot 2-6=18>0$,

За теоремою $x=-1$ – точка максимуму, точка $x=2$ – точка мінімуму функції.

Знаходимо значення в точках мінімуму і максимуму відповідно, маємо:

$$y_{\max}=y(-1)=2\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)+1=8,$$

$$y_{\min}=y(2)=2\cdot(2)^3-3\cdot(2)^2-12\cdot 2+1=-19.$$

13.4. **Знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної на відрізку функції**

Для знаходження найбільшого і найменшого значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ треба із значень функції на кінцях відрізка та в критичних точках, які належать цьому відрізку, вибрати найбільше і найменше.

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на відрізку $x \in [-2;1]$.

Розв'язання.

Знаходимо критичні точки функції: $y'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$;

$y'(x) = 0$ при $x_1 = 0 \in [-2;1]$ і при $x_2 = -1 \in [-2;1]$.

Знаходимо $y(0) = 1, y(-1) = 0, y(-2) = 17, y(1) = 8$.

Отже $y_{найб} = 17$ в точці x=–2, $y_{найм} = 0$ в точці x=–1.

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Зростання і спадання функції. Означення.

2. Необхідна умова монотонності функції.

2. Достатні умови зростання і падання функції.

4. Означення максимуму і мінімуму функції.

5. Критичні точки.

6. Необхідна і достатні умови існування екстремуму.

7. Знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної на відрізку функції.

Приклад 1. Визначити інтервали монотонності функції $y = \ln(1 - x^2)$.

Відповідь. На інтервалі $(-1;0)$ функція зростає; на $(0;1)$– спадає.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$; б) $y = \dfrac{x^4}{3} + 2$; в) $y = (x+1)^2(x-2)$; г) $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$.

Відповідь. а) $y_{\max} = y(-1) = 8$, $y_{\min} = y(2) = -19$; б) $y_{\min} = y(0) = 2$; в) $y_{\max} = 0$, $y_{\min} = -4$; г) $y_{\max} = \sqrt[3]{4}$ в точці $x_1 = -2$.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 1$ на відрізку $x \in [-2;1]$.

Відповідь. $y_{найб} = y(-2) = 13$, $y_{найм} = y(1) = -5$.

ЛЕКЦІЯ 14

ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ПЕРШОГО І ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Означення функції кількох змінних, область її визначення
Частинні похідні першого порядку
Повний приріст та повний диференціал
Частинні похідні вищих порядків

14.1. Означення функції кількох змінних, область її визначення

Означення. Змінна u називається функцією n незалежних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, якщо кожній сукупності значень цих змінних відповідає певне значення u. Функціональну залежність позначають так: $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і називають аналітичним способом задання функції. Незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ рівноправні і їх ще називають аргументами.

Функцію двох змінних позначають так: $z = f(x, y)$, а функцію трьох змінних – $u = f(x, y, z)$.

Якщо вважати, що дійсні числа x, y, z є координатами точки M 3-х вимірного простору, то функціональну залежність можна записати ще й так: $u = f(M)$.

Означення. Областю визначення функції $u = f(x, y, z)$ називається множина усіх значень аргументів x, y, z, при яких функція u приймає певні дійсні значення. Область визначення позначають $D(f)$.

Множину значень u позначають $E(f)$ або E. Значення функції в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ позначають $z = f(x_0, y_0, z_0)$ або $z = f(M_0)$, або $z = z|_{M_0}$.

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

Розв`язання. Задана функція z є функцією двох змінних x та y. Вона приймає

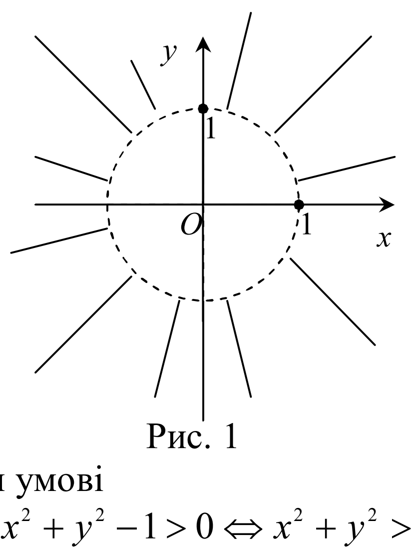


Рис. 1

дійсні значення тільки при умові

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1.$$

Отже, з останньої нерівності випливає, що областю визначення функції є частина площини OXY, що лежить поза колом з центром у початку координат і радіусом $R=1$. Записують це так: $D(f)=\{(x;y)\mid x^2+y^2>1\}$ (мал. 1).

14.2. **Частинні похідні першого порядку**

Розглянемо функцію двох змінних $z=f(x,y)$. Якщо в цій функції зафіксувати аргумент y, а змінній x надати приріст Δx, то функція одержить частинний приріст в точці $M(x,y)$ за змінною x. Цей приріст позначають

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y).$$

Означення. Якщо існує границя відношення частинного приросту функції z в точці M за змінною x до приросту аргументу Δx, при $\Delta x\to 0$, то її називають частинною похідною першого порядку функції $z=f(x,y)$ в точці M за змінною x і позначають так:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ z'_x\ ,\ f'_x(x,y).$$

За означенням маємо $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$.

Аналогічно: $\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$– частинний приріст функції z на змінною y; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=f'_y(x,y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$ – частинна похідна функції z за змінною y.

При знаходженні частинної похідної за змінною x аргумент y вважають сталою величиною; знаходженні частинної похідної за змінною y аргумент x вважають сталою величиною Тому при знаходженні частинних похідних можна використовувати таблицю похідних і правила диференціювання функції однієї змінної.

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції

$$z=x^2-3xy-4y^2-x+2y+1.$$

Розв'язання. Припускаючи, що y стала й обчислюючи похідну від функції z по x, знаходимо частинну похідну по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=2x-3y-1.$$

Припускаючи, що x стала й обчислюючи похідну від функції z по y, знаходимо частинну похідну по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=-3x-8y+2.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції $z=\dfrac{y}{x+y}$ і обчислити їх у точці $M_0(-4;3)$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)=\frac{y_x'(x+y)-y(x+y)_x'}{(x+y)^2}=-\frac{y}{(x+y)^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_x'(x,y)=\frac{y_y'(x+y)-y(x+y)_y'}{(x+y)^2}=\frac{x}{(x+y)^2}.$$

Обчислимо значення цих частинних похідних в точці $M_0(-4;3)$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}=f_x'(-4;3)=-\frac{3}{(-4+3)^2}=-3;\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}=f_y'(-4;3)=\frac{-4}{(-4+3)^2}=-4.$$

14.3. **Повний приріст та повний диференціал**

Якщо функція $z=f(x,y)$ має в точці $M(x,y)$ неперервні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то її повний приріст $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)$ в точці $M(x,y)$ можна подати у вигляді:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta x$$

де α,β - нескінченно малі при $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$. В цьому випадку функція $z=f(x,y)$ називається диференційованою у точці $M(x,y)$.

Сума перших двох доданків утворює вираз, лінійний відносно Δx і Δy, який є головною лінійною частиною повного приросту Δz і називається повним диференціалом функції $f(x,y)$: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Цю рівність можна записати у вигляді: $\Delta z=dz+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$, тут величина $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ – нескінченно мала вищого порядку ніж dz. Звідси випливає наближена рівність $\Delta z\approx dz$. Для незалежних змінних x і y $dx=\Delta x;\quad dy=\Delta y$.

Приклад 4 . Знайти повний диференціал і повний приріст функції $z = xy$ в точці $(2;3)$ при $\Delta x=0{,}1;\quad \Delta y=0{,}2$.

Розв'язання. $\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=ydx+xdy=y\Delta x+x\Delta y.$$

Маємо $\Delta z=3\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}72$, $dz=3\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2=0{,}7$.

За допомогою повного диференціала функції кількох змінних можна знаходити наближене значення функції.

Дійсно, так як $dy\approx\Delta y$, то $f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+df(x,y)$.

14.4. **Частинні похідні вищих порядків**

Частинні похідні першого порядку від функції кількох змінних залежать від тих самих змінних, що й сама функція. Тому можна говорити про існування частинних похідних по кожній змінній від частинних похідних першого порядку**.**

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку називаються частинними похідними другого порядку. У випадку функції $z=f(x,y)$ маємо:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ або це позначають z''_{xx}; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ або z''_{xy};

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ або z''_{yx}; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ або z''_{yy}.

Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ називаються мішаними частинними похідними другого порядку.

Частинні похідні від частинних похідних другого порядку називаються частинними похідними третього порядку. Вони позначаються:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=z'''_{xxx}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=z'''_{xxy}$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=z'''_{yyx}$;

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=z'''_{xyx}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=z'''_{xyy}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=z'''_{yyy}$;

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=z'''_{yxx}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}=z'''_{yxy}$.

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні четвертого, п’ятого і інші похідні вищих похідних.

Частинні похідні вищих порядків, які відрізняються одна від одної тільки послідовністю диференціювання, рівні, якщо вони неперервні.

Наприклад:

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ (теорема Шварца); $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$.

Отже, функція двох змінних $z=f(x,y)$ має три різні частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

чотири різні похідні третього порядку $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

Аналогічно будуються інші частинні похідні вищих порядків.

Приклад 5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=(x+2y)\cos(x+y)$

Розв`язання. Маємо:

$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(x+y)-(x+2y)\sin(x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2\cos(x+y)-(x+2y)\sin(x+y)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x+y) - \sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y) = -2\sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y) - 2\sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y) = -3\sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\sin(x+y) - 2\sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y) = -4\sin(x+y) - (x+2y)\cos(x+y).$$

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Що таке область визначення функції двох змінних?
2. Що таке множина значень функції?
3. Графічне зображення функції двох змінних.
4. Що таке границя функції двох змінних?
5. Неперервність функції двох змінних.
6. Частинні похідні першого порядку від функції двох змінних.
8. Частинні похідні вищих порядків.
9. Застосування повного диференціала функції багатьох змінних для обчислення значень функцій.

Приклад 1. Знайти частинні похідні z'_x, z'_y функцій: 1) $z = \left(5x^3y^2 + 1\right)^3$;

2) $z = \ln\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$.

Відповідь: 1) $z'_x = 45x^2y^2\left(5x^3y^2+1\right)^2$; $z'_y = 30x^3y\,\left(5x^3y^2+1\right)^2$;

2) $z'_x = \dfrac{y}{x^2-y^2}$; $z'_y = \dfrac{x}{x^2-y^2}$.

Приклад 2. Знайти частинні похідні z'_x, z'_y функції $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

Відповідь: $z'_x = -\dfrac{1}{1+x^2}, z'_y = \dfrac{1}{1+y^2}$.

Приклад 3. Знайти частинні похідні z'_x, z'_y функції $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$.

Відповідь: $z'_x = -\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}, z'_y = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}$.

Приклад 4. $z = \arcsin(x-y)$, де $x = 3t,\quad y = 4t^3$. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$.

Відповідь: $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-\left(3t-4t^3\right)^2}}$.

Приклад 5. Знайти повний диференціал функції $z = \ln\,\operatorname{tg}xy$.

Відповідь: $dz = \dfrac{2}{\sin 2xy}\left(ydx + xdy\right)$.

Приклад 6. $u = \ln\left(x^3 + 2y^3 - z^3\right)$. Знайти du.

Відповідь: $du = \dfrac{3x^2dx + 6y^2dy - 3z^2dz}{x^3 + 2y^3 - z^3}$.

Приклад 7. Знайти частинні похідні другого порядку: 1) $z = x^3 - 2x^2y + 3y^2$; 2) $z = \dfrac{x^2}{2y-3}$.

Відповідь: 1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 4y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$;

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2}{2y-3}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\dfrac{4x}{(2y-3)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{8x^2}{(2y-3)^2}$.

ЛЕКЦІЯ 15

ЕЛЕМЕНТИ ТОРІЇ ПОЛЯ

Скалярне поле
Похідна за напрямком
Градієнт функції

15.1 **Скалярне поле**

Будемо називати функцією точки величину , значення якої залежить від положення точки, до якої вона відноситься. Область, в якому існує залежність величини від розміщення точки, будемо називати полем цієї величини. Прикладом такого поля може бути температура повітря, значення якої змінюється від точки до точки простору.

Означення. Скалярним полем називається плоска або просторова область , кожній точці M якої, ставиться у відповідність значення деякої скалярної фізичної величини $U = U(M)$. Скалярна величина (від латинського *scala* – шкала) – це величина, яка виражає результат порівняння цієї величини з деякою одиницею виміру. Прикладами скалярних величин можуть бути маса, густина, робота, сила струму, температура.

Введення поля скалярної величини U рівносильне заданню скалярної(числової) функції $U(M)$.

Функція $U(M)$, яка визначає плоске скалярне поле, як функція точки $M(x, y)$, залежить від двох змінних x і y , тобто $U = U(x, y)$, а функція, яка визначає просторове скалярне поле, як функція точки $M(x, y, z)$, залежать від трьох змінних, тобто $U = U(x, y, z)$.

Означення. Лінією рівня плоского скалярного поля називається множина точок площини, в яких функція $U = U(x, y)$ набуває рівних значень, тобто $U(x, y) = C$. Надаючи константі c різні значення отримаємо множину ліній рівня функції $U = U(x, y)$: $U(x, y) = C_1$; $U(x, y) = C_2$;… $U(x, y) = C_n$;…

Означення. Поверхнею рівня просторового скалярного поля називається множина точок простору, в яких функція $U = U(x, y, z)$ набуває рівних значень, і визначається рівнянням $U(x, y, z) = C$.

Через кожну точку проходить тільки одна поверхність (лінія) рівня; вони заповнюють усю область і не перетинаються між собою.

15.2. **Похідна за напрямком**

Для характеристики швидкості зміни скалярного поля $U = U(M)$ в заданому напрямку введемо поняття похідної за напрямком.

Візьмемо в просторі, де задано поле $U = U(x, y, z)$, точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і нехай функція U визначена в деякому околі цієї точки і задамо вектор $\overline{a} \neq 0$.

Вектор $\overline{a}$ утворює з осями прямокутної системи координат OX, OY, OZ відповідно кути α, β, γ, які повністю визначають напрям вектора.

Косинуси кутів α, β і γ називаються напрямними косинусами вектора. Напрямні косинуси вектора є координатами одиничного вектора $\vec{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, напрям якого збігається з напрямком вектора $\vec{a}$, Сума квадратів напрямних косинусів дорівнює одиниці: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Вектор $\vec{a}_0$ називають напрямним вектором вектора $\vec{a}$

Знайдемо швидкість зміни функції U при переході точки M_0 до точки $M(x, y, z)$ в напрямку вектора $\vec{a}$. Приріст функції U при цьому переході визначається так: $\Delta U = U(M) - U(M_0)$ або $\Delta U = U(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - U(x_0, y_0, z_0)$. Тоді $\left|\overrightarrow{M_0 M}\right| = \sqrt{(x_M - x_{M_0})^2 + (y_M - y_{M_0})^2 + (z_M - z_{M_0})^2}$, $\Delta a = \left|\overrightarrow{M_0 M}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$,

де $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$.

Означення. Похідною функції $U = U(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ за напрямком вектора $\vec{a}$ називається границя

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{U(M) - U(M_0)}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta a}.$$

Похідна за напрямком $\overline{a}$ характеризує швидкість зміни поля по цьому напрямку. Якщо $\frac{\partial U}{\partial a} > 0$, то функція U зростає в точці M_0 в напрямку $\overline{a}$, якщо $\frac{\partial U}{\partial a} < 0$, то функція U спадає в точці M_0 в напрямку $\overline{a}$.

Величина $\left|\frac{\partial U}{\partial a}\right|$ представляє собою миттєву швидкість зміни функції U напрямку $\vec{a}$ в точці M_0. В цьому фізичний зміст похідної за напрямком.

Нехай функція $U = U(x, y, z)$ диференційована в точці M_0. Тоді повний приріст функції в цій точці обчислюється за формулою $\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y + \xi_3 \Delta z$, де ξ_1, ξ_2 і ξ_3 – нескінченно малі функції при $\Delta U \to 0$.

Так як $\Delta x = \Delta a \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta a \cos\beta$, $\Delta z = \Delta a \cos\gamma$, то $\frac{\Delta U}{\Delta a} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma + \xi_1 \cos\alpha + \xi_2 \cos\beta + \xi_3 \cos\gamma$.

Якщо перейдемо до границі при $\Delta a \to 0$ в останньому виразі , то отримаємо формулу для обчислення похідної функції в точці M_0 за напрямком вектора $\vec{a}$:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma .$$

Якщо задано плоске поле $z = z(x, y)$, то маємо $\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$.

Приклад 1. Знайти значення похідної функції $U = x^2 - y^2 + z^3$ в точці $M_0(1;1;0)$ в напрямку вектора $\overrightarrow{M_0M}$, де $M(3;2;1)$.

Розв'язання. Знайдемо значення частинних похідних в точці M_0:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial U}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial U}{\partial z} = 3z^2,\ \frac{\partial U(M_0)}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} = -2, \frac{\partial U(M_0)}{\partial z} = 0.$$

Далі знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_0M} = (a_x; a_y; a_z)$ та його напрямні косинуси $\overrightarrow{M_0M} = \vec{a} = (a_x; a_y; a_z) = ((3-1);(2-1);(1-0)) = (2;1;0)$;

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}};\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = = \frac{1}{\sqrt{5}};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0.$$

Отже,

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial a} = \frac{\partial U(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U(M_0)}{\partial z}\cos\gamma = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + (-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 0 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Так як $\frac{\partial U(M_0)}{\partial a} > 0$, то задана функція U зростає в точці M_0 в напрямку вектора $\overrightarrow{M_0M}$.

15.3. **Градієнт скалярного поля**

Права частина формули $\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$ є скалярний добуток одиничного вектора $\vec{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ і деякого вектора $\vec{v} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$.

Означення. Градієнтом функції $U = U(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається вектор з початком в точці M_0, який має своїми координатами частинні похідні функції U:

$$gradU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \text{ або } gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}.$$

Тепер формулу для $\frac{\partial U}{\partial a}$ можна записати у вигляді $\frac{\partial U}{\partial a} = \vec{a}_0 \cdot gradU$ або $\frac{\partial U}{\partial a} = |gradU| \cos\varphi$, де $\varphi -$ кут між вектором $gradU$ і напрямком вектора $\vec{a}$.

Якщо $\cos\varphi = 1$, то $\varphi = 0$, тобто напрям вектора $gradU$ збігається з напрямом вектора $\vec{a}$ і величина $\frac{\partial U}{\partial a}$ набуває найбільшого значення, так як $|\cos\varphi| \le 1$.

Отже, градієнт функції вказує напрям найшвидшого зростання функції. Найбільша швидкість функції U в точці M_0 обчислюється за формулою:

$$|gradU| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

В цьому фізичний зміст градієнта.

Якщо розглядається область на площині, то для скалярної функції $z = f(x, y)$ вектор градієнт має вигляд: $gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}$.

Приклад 2 . Визначити градієнт функції $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ в точці $M_0(2; 4)$.

Розв'язання. Знайдемо значення частинних похідних в точці *M*:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3}y, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = \frac{8}{3}.$$

Маємо: $grad\, z = 2\bar{i} + \frac{8}{3}\bar{j}$.

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Означення скалярного поля ?
2. Поняття лінії рівня ?
3. Поняття поверхні рівня ?
4. Напрямні косинуси вектора ?
5. Фізичний зміст похідної за напрямком ?
6. Означення градієнта ?
7. Фізичний зміст вектора градієнта ?

Приклад 1. Побудувати лінії рівня плоских скалярних полів: 1) $u = x + y$; 2) $u = x^2 + y^2$; 3) $u = \frac{y}{x^2}$ надаючи значення $u = 1,2,3,4$.

Приклад 2. Знайти похідну функції $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точці $A(3;4)$ по напрямку бісектриси першого координатного кута.

Відповідь: $\dfrac{\partial u(A)}{\partial a} = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

Приклад 3. Знайти $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial a}$ і $gradz(M_0)$, якщо:

1) $z = x^3 + 2xy + y^2, M_0(-1;1), \overline{a} = (5;12)$;

2) $z = arctg(xy^2), M_0(2;2), \overline{a} = (6;8)$.

Відповідь: 1) $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial a} = \dfrac{25}{13}$, $gradz(M_0) = 5\overline{i} + 0\overline{j}$; 2) $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial a} = \dfrac{44}{325}$, $gradz(M_0) = \dfrac{4}{65}\overline{i} + \dfrac{8}{65}\overline{j}$.

ЛЕКЦІЯ 16
ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ
НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ В ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ

Екстремум функції кількох змінних
Найбільше та найменше значення функції в замкненій області

16.1. **Екстремум функції двох змінних**

Нехай функція $f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0,y_0)$.

Означення. Функція $z=f(x,y)$ має локальний максимум в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо виконується нерівність $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ для всіх точок (x,y), близьких до точки (x_0,y_0) і відмінних від неї. Аналогічно, функція $z=f(x,y)$ має локальний мінімум в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо $f(x_0,y_0)<f(x,y)$.

Максимуми і мінімуми функції називаються її екстремумами, а точки, в яких досягаються екстремуми точками екстремуму.

Теорема (Необхідні умови існування екстремуму).

Якщо функція $z=f(x,y)$ має екстремум в точці $M_0(x_0,y_0)$, то всі частинні похідні першого порядку цієї функції дорівнюють нулю або не існують в цій точці.

Доведення. Нехай точка $M_0(x_0,y_0)$ – точка екстремуму функції $z=f(x,y)$.

Тоді функція $f(x,y_0)$ буде функцією однієї змінної x. Ця функція має екстремум у точці $x=x_0$, тому її похідна $f'_x(x_0,y_0)$ дорівнює нулю або не існує. Аналогічно, розглянувши функцію $f(x_0,y)$ дістанемо, що $f'_y(x_0,y_0)$ дорівнює нулю або не існує.

Означення. Точки, в яких частинні похідні першого порядку функції $z=f(x,y)$ дорівнюють нулю або не існують, називають критичними точками або точками, підозрілими на екстремум.

Теорема (достатні умови існування екстремуму).

Нехай функція $z=f(x,y)$ в деякому околі критичної точки M_0 має неперервні частинні похідні першого та другого порядків і

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}=A, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}=B, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}=C.$$

Тоді, якщо $\Delta=AC-B^2>0$ і $A<0$, то точка M_0 є точкою максимуму функції $z=f(x,y)$; якщо $\Delta=AC-B^2>0$ і $A>0$, то точка M_0 є точкою мінімуму функції $z=f(x,y)$; якщо $\Delta=AC-B^2<0$, то в точці M_0 екстремуму немає;

якщо $\Delta = AC - B^2 = 0$, то в точці M_0 може існувати екстремум, а може і не існувати; треба досліджувати знак Δz в околі точки M_0.
Дану теорему приймемо без доведення.

Алгоритм дослідження функції $z = f(x, y)$ на екстремум:

1. Знайти частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
2. Знайти критичні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ або точки, в яких частинні похідні не існують.
3. Для кожної критичної точки знайти значення $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

та $\Delta = AC - B^2$ і зробити висновки на підставі теореми про достатні умови існування екстремуму.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні функції і складемо систему рівнянь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Знайдемо критичні точки.

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0, \end{cases} \qquad x\left(x^3 - 1\right) = 0,$$

Звідки $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Відповідні значення y: $y_1 = 0$; $y_2 = 1$. Отже, точки $M_1(0;\ 0)$ і $M_2(1;1)$ – критичні.
Обчислимо частинні похідні другого порядку для даної функції

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

1. Розглянемо точку $M_1(0;\ 0)$:

$$A_1 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_1} = 0, \qquad B_1 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_1} = -3, \qquad C_1 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_1} = 0,$$

$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^{\ 2} = -9 < 0$, отже, в точці $M_1(0;0)$ екстремуму немає.

2. $M_2(1;\ 1)$:

$$A_2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_2} = 6, \qquad B_2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_2} = -3, \qquad C_2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_2} = 6,$$

$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^{\ 2} = 27 > 0$, $A_2 = 6 > 0$, отже, в точці $M_2(1;\ 1)$ дана функція має мінімум, причому $z_{\min} = -1$.

16.2. **Найбільше та найменше значення функції в замкненій області**

Нехай задана неперервна функція $u = f(M)$ в деякій обмеженій замкненій області D. Відомо, що така функція в цій області досягає найбільшого та найменшого значень. Ці значення досягаються або в точках, що лежать всередині області D (в точках екстремуму), або в точках, що належать її границі. Тому для того, щоб знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в обмеженій замкненій області D, треба:

1. Знайти критичні точки, які лежать всередині області D, і обчислити значення функції в цих точках.
2. Знайти найбільше та найменше значення функції на границі області.
3. Серед усіх знайдених значень функції вибрати найбільше число, яке буде найбільшим значенням функції та найменше число – найменше значення функції в заданій області.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy - x^2 - y^2 + x$ в замкненій області, що обмежена сторонами трикутника з вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$.

Розв'язання. Знайдемо координати критичних точок заданої функції всередині трикутника ABC (рис. 1). Для цього знайдемо похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y - 2x + 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - 2y$ і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0; \\ x - 2y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1; \\ x - 2y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y = 1; \\ x = 2y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3}; \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Критична точка $E\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ не є внутрішньою точкою заданої області, тому в подальшому не розглядається.

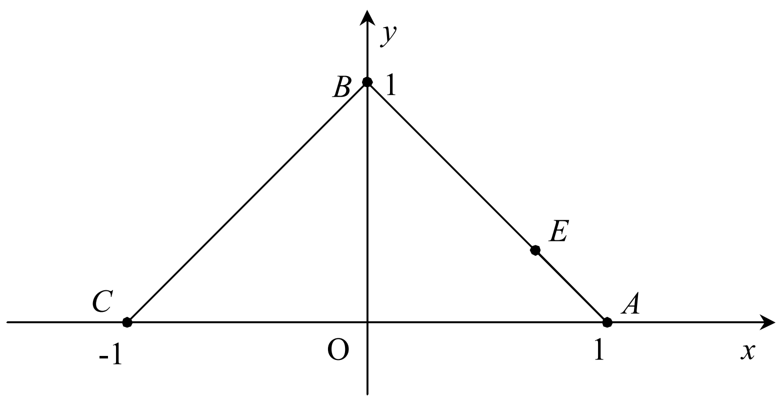


Рис. 1.

Тепер дослідимо поведінку функції на кожній стороні трикутника:

1) сторона CA має рівняння: $y=0$, $x\in[-1;1]$. Підставимо $y=0$ в функцію $z(x,y)$, маємо $z(x)=-x^2+x$. Дослідимо функцію однієї змінної $z(x)=-x^2+x$ на найбільше та найменше значення на відрізку $[-1;1]$: $z'=-2x+1$. Із рівності $z'=0$ знаходимо: $-2x+1=0$, звідси $x=\frac{1}{2}$.

Отже,

$$z\left(\frac{1}{2},0\right)=z\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

а на кінцях відрізку маємо

$$z(-1,0)=z(-1)=-(-1)^2+(-1)=-2;\quad z(1,0)=z(1)=-(1)^2+1=0;$$

2) знайдемо рівняння сторони AB як рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки A і B: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$, $\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{1-0}$..

Отже, сторона AB має рівняння $y=1-x$, $x\in[0;1]$. Тоді функція z набуває вигляду: $z=x(1-x)-x^2-(1-x)^2+x,\ \ x\in[0;1]$.

Після елементарних перетворень маємо: $z=-3x^2+4x-1$.

Знайдемо її найбільше та найменше значення на відрізку $[0;1]$: $z'=-6x+4$. З рівності $z'=0$ знаходимо: $-6x+4=0$ і $x=\frac{2}{3}$.

Отже,

$$z\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=z\left(\frac{2}{3}\right)=-3\left(\frac{2}{3}\right)^2+4\cdot\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3},$$

кінцях відрізку маємо:

$$z(0,1)=z(0)=-1,\ z(1,0)=z(1)=-3\cdot1^2+4\cdot1-1=0.$$

3) сторона BC має рівняння: $\frac{x-x_C}{x_B-x_C}=\frac{y-y_C}{y_B-y_C}$, $\frac{x+1}{0+1}=\frac{y-0}{1-0}$, $y=1+x$, $x\in[-1;0]$, і функція z приймає вигляд: $z=x(1+x)-x^2-(1+x)^2+x=-x^2-1$.

Знайдемо найбільше та найменше значення функції $z=-x^2-1$ на відрізку $[-1;0]$. Для цього $z'=-2x$; з рівності $z'=0$ знаходимо $x=0$. Ця точка є кінцем відрізку, тобто всередині нього критичних точок немає. На кінцях відрізку маємо такі значення функції:

$$z(-1,0)=z(-1)=-(-1)^2-1=-2,\quad z(0,1)=z(0)=-1.$$

З усіх знайдених значень функції виберемо найбільше та найменше значення:

$$z_{\max}=z\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3};\quad z_{\min}=z(-1,0)=-2.$$

Найбільше та найменше значення функція досягає на границі області D.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - y^2 + 2a^2$, в крузі $x^2 + y^2 \le a^2$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки функції z, які лежать всередині круга, і обчислимо її значення в цих точках: $z'_x = (x^2 - y^2 + 2a^2)'_x = 2x$, $z'_y = (x^2 - y^2 + 2a^2)'_y = -2y$.

Знайдемо розв'язок системи $\begin{cases} z'_x = 2x = 0, \\ z'_y = -2y = 0. \end{cases}$ Точка $O(0,0)$ є критичною точкою, яка лежить всередині кола. Обчислимо значення функції в цій точці: $z(0,0) = 2a^2$.

Знайдемо найбільше і найменше значення функції на границі області, тобто на колі $x^2 + y^2 = a^2$.

Для цього необхідно: визначити змінну y через x, тобто $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, і підставимо цей вираз в функцію z, перетворюємо її в функцію однієї змінної: $z(x) = x^2 - \left(\pm\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 + 2a^2 = 2x^2 + a^2$, де $x \in [-a, a]$. Ділі знайдемо найбільше і найменше значення функції $z(x) = 2x^2 + a^2$ на відрізку $[-a, a]$:

$z' = (2x^2 + a^2)' = 4x$, $4x = 0$, $x = 0$. Точка $x = 0$ – критична точка $x = 0 \in [-a, a]$. Отже, $z(0) = a^2$.

Обчислимо значення $z(x)$ на кінцях даного відрізку: $z(-a) = z(a) = 3a^2$.

Порівнюючи значення функції z в внутрішній критичній точці $x = 0$ і на кінцях відрізка $x = -a$ і $x = a$ робимо висновок: найбільше значення функції z в заданій області досягається в точках $A_1(-a,0)$ і $A_2(a,0)$ і дорівнює $z_{\max} = 3a^2$, найменше значення $z_{\min} = a^2$ в точках $A_3(0,-a)$ і $A_4(0,a)$.

Запитання до самоконтролю і приклади.

1) Що таке точка локального мінімуму функції двох змінних?
2) Що таке точка локального максимуму функції двох змінних?
3) Що таке необхідні існування екстремуму умови функції двох змінних?
4) Які точки називаються критичними?
5) Що таке достатні умови екстремуму функції двох змінних?
6) Поняття критичної точки функції двох змінних?
7) Різниця між екстремумом і найбільшим та найменшим значенням?
8) Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення функції двох змінних в замкненій області.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію:
а) $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 8y + 1$; *б*) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;
в) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 2z$.

Відповідь: а) $z_{\min}(-4;1) \quad -2$; *б*) $z_{\max}(2;-2) = 8$; *в*) $z_{\min}(3;3) = 0$.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в замкнутій області , обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = 4$.

Відповідь. $z_{\max} = 32$ точках $A(-2,4)$ і $B(2,4)$, $z_{\min} = 0$ точці $O(0,0)$.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в квадраті $0 \le x \le 4$ $0 \le y \le 4$.

Відповідь. $z_{\max} = 91$ точках $A(0,4)$ і $B(4,0)$, $z_{\min} = 0$ точці $C(3,3)$.

Приклад 4. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 3xy$ в крузі $x^2 + y^2 \le 2$.

Відповідь. $z_{\max} = 3$ точках $A(-1,-1)$ і $B(1,1)$, $z_{\min} = -3$ точках $C(1,-1)$ і $D(-1,1)$.

ЛЕКЦІЯ 17

ПЕРВІСНА. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Поняття первісної.

Невизначений інтеграл та його властивості.

Таблиця основних інтегралів.

Безпосереднє інтегрування.

17.1 Поняття первісної

Основною задачею диференціального числення є знаходження для заданої функції $f(x)$ її похідної $f'(x)$. Одне з можливих фізичних трактувань цієї задачі − визначення швидкості руху за функцією, яка задає пройдений шлях за час руху. Існує і обернена задача, а саме, визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функцією часу. Остання задача є знаходженням функції $f(x)$ за відомою її похідною $f'(x)$. Розв'язується ця задача за допомогою невизначеного інтеграла.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на проміжку $\langle a, b\rangle$, якщо $F(x)$ диференційована на $\langle a, b\rangle$ і

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Приклад. Розглянемо функцію $f(x) = x^2$. Первісною цієї функції є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Дійсно, $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$. Очевидно, первісними будуть також функції $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$. І взагалі, $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, де C – довільна стала, оскільки $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

Отже, задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно.

Теорема 1. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку $\langle a, b\rangle$, то $F(x) + C$, де $C = const$, також є первісною.

Доведення. Нехай $F(x)$- первісна функцій $f(x)$, а $\Phi(x)$ - деяка інша первісна для цієї ж функції $f(x)$, тобто $\Phi'(x) = f(x)$ і $F'(x) = f(x)$. Розглянемо різницю даних функцій. Маємо $[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Це означає, що $\Phi(x) - F(x) = C$. Отже $\Phi(x) = F(x) + C$. Теорему доведено.

З теореми випливає, що множина функцій $F(x)+C$, де $F(x)$ - одна з первісних функції $f(x)$, а C – довільна стала, визначає всю сукупність первісних заданої функції.

17.2 Невизначений інтеграл та його властивості

Означення. Вираз $F(x)+C$ називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$ на проміжку $\langle a, b\rangle$ і позначається символом $\int f(x)dx$, тобто

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \qquad (2)$$

Таким чином, символом $\int f(x)dx$ позначається множина всіх первісних функції $f(x)$*;* знак $\int$ називається інтегралом; $f(x)dx$ - підінтегральний вираз; $f(x)$ - підінтегральна функція; x - змінна інтегрування.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла функції називають інтегруванням цієї функції.

Властивості невизначеного інтеграла.

1) Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (3)$$

Дійсно, $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x)$.

2) Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої, тобто

$$\int dF(x) = F(x)+C. \qquad (4)$$

Дійсно, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$.

3) Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу тобто

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \qquad (5)$$

Дійсно, $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$.

4) Сталий множник c можна виносити за знак інтеграла

$$\int c\cdot f(x)dx = c\int f(x)dx. \qquad (6)$$

5) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій

$$\int\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$$

6) Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ - довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = F(u)+C \quad . \qquad (7)$$

Цю властивість можна довести, використовуючи інваріантність форми першого диференціала і властивість 2. Дійсно, $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$. Отже $\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$. Властивість 6 називається інваріантністю формули інтегрування. Вона означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною функцією від неї.

Зауваження. Властивість 5 справедлива для довільного скінченого числа доданків.

Зауваження. Правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням.

Приклади.

1) $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$. Перевірка: $\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right)' = \sin 2x$.

2) $\int e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}} + C$. Перевірка: $\left(3e^{\frac{x}{3}} + C\right)' = e^{\frac{x}{3}}$.

3) $\int \left[\sin x + e^x - 2^x\right] dx = \int \sin x dx + \int e^x dx - \int 2^x dx = -\cos x + C_1 + e^x + C_2 -$

$$-\frac{1}{\ln 2}e^x + C_3 = -\cos x + e^x - \frac{1}{\ln 2}e^x + C,$$

де $C=C_1+C_2+C_3$.

При кожному інтегруванні утворюються проміжні довільні сталі C_1, C_2, C_3, але в підсумку записують лише одну загальну сталу $C=C_1+C_2+C_3$. Тому надалі стала C означатиме суму всіх проміжних сталих.

4) $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$, де $u = \varphi(x)$ - довільна функція, що має неперервну похідну.

17.3 Таблиця основних інтегралів

Нехай $u = u(x)$ - довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну, тоді на цьому проміжку справедливі наступні формули.

Таблиця основних інтегралів.

1. $\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha + 1}u^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

Зокрема а) $\int du = u + C$; б) $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$; в) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.

2. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C,$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1,$ 3$'$. $\int e^u du = e^u + C,$

4. $\int \sin u du = -\cos u + C,$

5. $\int \cos u du = \sin u + C,$

6. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \mathrm{tg} u + C,$

7. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\mathrm{ctg} u + C,$

8. $\int \mathrm{tg} u du = -\ln|\cos u| + C,$

9. $\int \mathrm{ctg} u du = \ln|\sin u| + C,$

10. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C,$

11. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right| + C,$

12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C,$ 12$'$. $\int \frac{du}{1 + u^2} = \mathrm{arctg} u + C,$

13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C,$ 13$'$. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C,$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C,$ 14$'$. $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C,$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm A}\right| + C.$

При знаходженні невизначених інтегралів корисно мати на увазі наступне правило, яке випливає з властивості 6.

Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, тобто $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C, \quad k, b - \mathrm{Const}.$$

Дійсно, продиференціюємо ліву і праву частину останньої рівності, отримаємо:

$$\left(\int f(kx + b)dx\right)' = \left(\frac{1}{k}F(kx + b) + C\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b) + C' =$$

$$= \frac{1}{k}F'(kx + b) \cdot k + 0 = f(kx + b).$$

17.4 Безпосереднє інтегрування

Даний метод полягає в розкладанні підінтегральної функції на суму функцій і в почленному інтегруванні. Розглянемо приклади, як застосовується даний метод.

Приклад.

Розв'язання.

$$\int (1-\sqrt{x})^2\,dx = \int (1-2\sqrt{x}+x)dx = \int dx - \int 2\sqrt{x}dx + \int xdx = \int dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int xdx =$$

$$= x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C = x - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C.$$

Приклад.

Розв'язання.

$$\int \frac{x^4-6x^3-8x^2+8x-7}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^4}{x^2}-\frac{6x^3}{x^2}-\frac{8x^2}{x^2}+\frac{8x}{x^2}-\frac{7}{x^2}\right)dx =$$

$$= \int\left(x^2-6x-8+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}\right)dx =$$

$$= \int x^2dx - 6\int xdx - 8\int dx + 8\int\frac{dx}{x} - 7\int x^{-2}dx = \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} - 8x + 8\ln|x| - 7\frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 3x^2 - 8x + 8\ln|x| + \frac{7}{x} + C.$$

Приклад.

Розв'язання.

$$\int tg^2dx = \int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int\frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = tgx - x + C$$

Приклад.

Розв'язання.

$$\int \sin^2 xdx = \int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\cos 2xdx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int\cos 2xd(2x) =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Приклад.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx + \int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx =$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x} + \int\frac{dx}{\cos^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Зауваження. Відзначимо ряд перетворень диференціала, які будуть корисні для подальшого. Треба пам'ятати, що якщо $\varphi(x)$ - деяка диференційовна функція, то $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$. Тому можна записати:

1) $dx = d(x+b)$, 2) $dx = \frac{1}{a}d(ax), \quad a \neq 0$

3) $dx = \frac{1}{a}d(ax+b), \quad a \neq 0$ 4) $x \cdot dx = \frac{1}{2}d(x^2)$,

5) $\sin x \cdot dx = -d(\cos x)$, 6) $\cos x \cdot dx = d(\sin x)$.

Використаємо ці перетворення диференціалів і знайдемо деякі невизначені інтеграли.

Приклади.

1) $$\int \frac{dx}{3x+8} = \left| \begin{matrix} d(3x+8) = (3x+8)'dx = \\ = 3dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+8)}{3x+8} = \frac{1}{3}\ln|3x+8| + C.$$

2) $$\int \sqrt{x-2}\,dx = \int (x-2)^{\frac{1}{2}} d(x-2) = \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} + C.$$

3) $$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \left| d(x^2+1) = (x^2+1)'dx = 2xdx \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C.$$

4) $$\int tg\,x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Зауваження. Якщо операція диференціювання елементарних функцій знову приводить до елементарних функцій, то операція інтегрування може привести до не елементарних функцій, тобто до функцій, які не виражаються через скінченне число арифметичних операцій, або суперпозиції елементарних функцій. Наступні інтеграли не інтегруються в елементарних функціях:

$\int e^{-x^2} dx$ - інтеграл Пуассона, $\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ - інтеграли Френеля,

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - інтегральний логарифм, $\int \frac{\cos x}{x}dx$ - інтегральний косинус,

$\int \frac{\sin x}{x}dx$ - інтегральний синус.

Вказані інтеграли, хоча і існують, але не є елементарними функціями. Існують інші способи їх обчислення.

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Що називається первісною даної функції?
2. Сформулювати і довести теорему про загальний вигляд первісної даної функції.

3. Означення невизначеного інтегралу.
4. Сформулювати і довести основні властивості невизначеного інтеграла.
5. У чому суть інваріантності формули інтегрування?
6. Написати таблицю інтегралів.

Приклади. Обчислити безпосереднім інтегруванням:

1. $\int (2x^3 - x + 3)dx$. 2. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$. 3. $\int \frac{1}{a^2x^2 - b^2} dx$. 4. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

5. $\int \left(x^2 + 3x + 5\right)^{10} (2x+3)dx$. 6. $\int e^{4\cos x} \sin x\, dx$. 7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$. 8. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

9. $\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx$. 10. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}^2 x}$. 11. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^{2x}-3}}$. 12. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{x}}$. 13. $\int \frac{x^3\, dx}{2x^8 - 9}$.

14. $\int \frac{2^{\,arctg\, 2x} dx}{1 + 4x^2}$. 15. $\int \frac{\sqrt{1 + ctg\, 2x}\, dx}{\sin^2 2x}$. 16. $\int \frac{x\, dx}{12 + 3x^4}$. 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$.

Відповіді. 1. $\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 3x + C$. 2. $\frac{x^2}{2} + \frac{12}{7} x\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C$.

3. $\frac{1}{2ab} \ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right| + C$. 4. $2\sin\sqrt{x} + C$. 5. $\frac{1}{11}(x^2+3x+5)^{11} + C$. 6. $-\frac{1}{4}e^{4\cos x} + C$.

7. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$. 8. $\frac{\arcsin^2 x}{2} + C$. 9. $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$. 10. $-\frac{1}{arctg\, x} + C$.

11. $\ln\left|e^x + \sqrt{e^{2x}+3}\right| + C$. 12. $2e^{\sqrt{x}} + C$. 13. $\frac{1}{24\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}x^4 - 3}{\sqrt{2}x^4 + 3}\right| + C$.

14. $\frac{1}{2\ln 2} 2^{arctg\, 2x} + C$. 15. $-\frac{1}{3}\left(1 + ctg\, 2x\right)^{3/2} + C$. 16. $\frac{1}{12} arctg \frac{x^2}{2} + C$.

17. $-\ln\left|\arccos x\right| + C$.

ЛЕКЦІЯ 18

ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Метод підстановки (заміни змінної).

Інтегрування частинами.

Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен.

Операція інтегрування значно складніша, ніж операція диференціювання. В диференціальному численні таблиця похідних і правила диференціювання дають можливість знайти похідну довільної диференційовної функції. В інтегральному численні таких простих і універсальних правил не існує. Наприклад, відсутнє загальне правило інтегрування добутку двох функцій, навіть якщо первісна кожної з них відома. Теж саме стосується частки двох функцій і складеної функції.

Розглянемо основні методи інтегрування

18.1 Метод підстановки (заміни змінної)

Суть цього методу полягає у введені нової змінної інтегрування.

Теорема 1. Нехай $F(x)$ первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a, b\rangle$, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ , \qquad (1)$$

і нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена і диференційовна на проміжку $\langle \alpha, \beta\rangle$, причому множина значень цієї функції є проміжок $\langle a, b\rangle$. Тоді справедлива формула

$$\int f(\varphi(t))\cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C \qquad (2)$$

Доведення. Для того, щоб довести цю формулу, треба показати, що похідні від лівої і правої частин рівні між собою. Розглянемо похідну по t від лівої частини (2):

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)' = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Розглянемо похідну по t від правої частини (2):

$$\left(F(\varphi(t))\right)' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

(випливає з правила диференціювання складеної функції і умови теореми). Отже, похідні по t від лівої і правої частини рівні між собою. Доведена теорема застосовується, як правило, одним із таких двох способів.

Перший спосіб. Інтеграл записують у вигляді

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix}\varphi(x) = u \\ \varphi'(x)dx = du\end{vmatrix} = \int g(u)du = G(u) + C = G(\varphi(x)) + C .$$

При цьому $\varphi(x)$ вибирається таким чином, що функція $g(u)$ була більш зручніша для інтегрування, ніж функція $f(x)$. Функція $G(u)$ є первісна функції $g(u)$. В цьому методі застосовано підстановку

$$u=\varphi(x) \qquad (3)$$

і йдеться про введення функції під знак диференціала: $\varphi'(x)dx=d\big(\varphi(x)\big)=du$.

Після знаходження невизначеного інтеграла методом підстановки потрібно перейти до старого аргументу x. Розглянемо приклади.

Приклади.

1) $\int e^{x^2}xdx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2=\left|\begin{array}{l} u=x^2 \\ du=d(x^2)=(x^2)'dx=2xdx \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int e^u du=$

$=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{ч^2}+C.$

2) $\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx=\left|\begin{array}{l} u=2\ln x+3 \\ du=d(2\ln x+3)=(2\ln x+3)'\cdot dx=2\dfrac{dx}{x} \end{array}\right|=\int u^3\frac{1}{2}du=$

$=\frac{1}{8}u^4+C=\frac{1}{8}\big(2\ln x+3\big)^4+C$.

3) $\int\sin^3 x\cos x dx=\left|\begin{array}{l} u=\sin x \\ du=d(\sin x)=(\sin x)'dx=\cos x dx \end{array}\right|=\int\sin^3 xd(\sin x)==$

$=\int u^3du=\frac{u^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$

Другий спосіб. Інтеграл $\int f(x)dx$ зображують у вигляді

$$\int f(x)dx=\int f\big(\psi(t)\big)\cdot\psi'(t)dt, \qquad (4)$$

де функція $x=\psi(t)$ має обернену функцію $t=\psi^{-1}(x)$ і для функції $g(t)=f\big(\psi(t)\big)\cdot\psi'(t)$ відома первісна $G(t)$, тоді

$$\int f(x)dx=\left|\begin{array}{l} x=\psi(t) \\ dx=\psi'(t)dt \end{array}\right|=\int f(\psi(t))\psi'(t)dt=\int g(t)dt=G(t)+C=G(\psi^{-1}(x))+C$$

При використанні цієї формули застосовується підстановка

$$x=\psi(t) \qquad (5)$$

і йдеться мова про виведення функції з-під знака диференціала $dx=d\big(\psi(t)\big)=\psi'(t)dt$.

Після знаходження невизначеного інтеграла методом підстановки необхідно від змінної t перейти до змінної x. Розглянемо приклад.

Приклад. Нехай треба обчислити інтеграл $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx, \quad a>0$. Якщо покласти $x=a\sin t$, то $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t$ і $dx=a\cos tdt$. Отже, $I=\int a\cos t\cdot a\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$. Але $t=\arcsin\frac{x}{a}$, тому

$$I=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\sin t\cdot\cos t+C=\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Таким чином, $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$.

18.2 Інтегрування частинами

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ - функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді на основі формули диференціала добутку маємо

$$d(u\cdot v)=udv+vdu, \quad \text{або} \quad udv=d(u\cdot v)-vdu.$$

Проінтегруємо обидві частини останньої рівності і отримаємо:

$$\int udv=\int d(u\cdot v)-\int vdu, \text{ або } \int udv=uv-\int vdu. \qquad (6)$$

Це і є формула інтегрування частинами.

Виведена формула показує, що обчислення інтеграла $\int udv$ зводиться до обчислення інтеграла $\int vdu$, який може бути більш простішим ніж заданий, або навіть табличним. Отримана формула використовується в тих випадках, коли підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна представити у вигляді udv. При цьому треба мати на увазі, що до функції $u(x)$ слід відносити множники, які спрощуються при диференціюванні. Як правило, підінтегральний вираз, який складає добуток udv, можна розбити на множники u та dv кількома способами. Необхідно представити підінтегральну функцію через u і dv так, щоб інтеграл $\int vdu$ був простішим, ніж інтеграл $\int udv$.

Розглянемо основні типи інтегралів, які зручно знаходити методом інтегрування частинами.

1) Якщо підінтегральний вираз є добутком показникової, або тригонометричної функції на многочлен, то в якості функції u необхідно взяти многочлен, а за dv вираз, що залишився. Це інтеграли виду:

$\int P(x)\cdot a^{kx}dx;\quad \int P(x)\sin kxdx;\quad \int P(x)\cos kxdx$, де *P(x)* - многочлен, а k - дійсне число;

2) якщо підінтегральний вираз містить добуток логарифмічної або оберненої тригонометричної функції на многочлен, тобто інтеграли мають вид

$$\int P(x)\log_a xdx;\quad \int P(x)\arcsin xdx;\quad \int P(x)\arccos xdx;\quad \int P(x)arctgxdx,$$

то в якості функції u слід брати логарифмічну функцію, або обернену тригонометричну функцію, а за dv вираз $P(x)dx$, де $P(x)$- многочлен, тобто $dv = P(x)dx$;

3) іноді формулу інтегрування частинами доводиться застосовувати кілька разів. Щоб знайти інтеграли виду

$$\int P(x)a^{kx}dx,\ \int P(x)\sin kxdx,\ \int P(x)\cos kxdx,$$

де $P(x)$- многочлен, необхідно застосовувати формулу інтегрування частинами стільки разів, яка степінь многочлена. При цьому в якості функції $u(x)$ кожен раз беруть степеневу функцію;

4) в деяких випадках повторне застосування формули інтегрування частинами приводить до лінійних рівнянь відносно шуканого інтеграла. Розв'язання цього рівняння дає нам шуканий інтеграл. До таких інтегралів відносяться

$\int e^{mx}\sin nxdx,\ \int e^{mx}\cos nxdx,\ \int \sin(\ln x)dx,\ \int \cos(\ln x)dx$, де m, n- дійсні числа.

Зауваження. Зазначимо, що під час знаходження функції v за диференціалом dv, вважають, що стала $C = 0$, оскільки на кінцевий результат ця стала не впливає. Дійсно, підставимо $v + C$ в формулу інтегрування частинами, маємо

$$\int ud(v+C) = u(v+C) - \int (v+C)du \Rightarrow \int udv = uv + Cu - \int vdu - Cu \Rightarrow$$
$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Приклади.

1) $\int (2x+1)\sin xdx = \begin{vmatrix} u = 2x+1; & du = 2dx \\ dv = \sin dx; & v = \int \sin xdx = -\cos x \end{vmatrix} =$

$= -(2x+1)\cos x - \int (-\cos x)2dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$;

3) $\int \arcsin xdx = \begin{vmatrix} u = \arcsin x; & du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx; & v = \int dx = x \end{vmatrix} =$

$$= x \cdot \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$$

4)

$$I = \int e^x \sin 2x dx = \left| \begin{matrix} e^x = u; & du = e^x dx \\ \sin 2x dx = dv; & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx =$$

$\left|\textit{повторно застосуємо формулу інтегрування частинами}\right| =$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^x; & du = e^x dx \\ dv = \cos 2x dx; & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x$$

Маємо $\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x dx$, або $I = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} I$.

Отримали рівняння, з якого визначаємо шуканий інтеграл

$$I: I + \frac{1}{4} I = \frac{1}{4}(\sin 2x - 2\cos 2x) \cdot e^x, \quad \frac{5}{4} I = \frac{1}{4}(\sin 2x - 2\cos 2x) e^x$$

Остаточно, $\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) e^x + C$

18.3 Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

Розглянемо інтеграли виду $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$; $I_2 = \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$; $I_3 = \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$.

Інтеграли I_1, I_2, I_3 зводяться до табличних виділенням повного квадрата в квадратному тричлені $ax^2 + bx + c$.Інтеграл I_1 зводиться до табличних інтегралів $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$ або $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm A}\right| + C$.

Якщо вираз $Mx + N$ не співпадає з похідною квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то чисельник необхідно перетворити таким чином, щоб з нього можна було відокремити похідну підкореневого виразу знаменника. Після цього інтеграл I_2 можна представити у вигляді суми двох інтегралів, один з яких береться безпосередньо за формулою $\int u^{\alpha}du=\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C,\ \ \alpha\neq-1$, а інший є інтеграл виду I_1.

Приклад. Знайти інтеграл.

$$I=\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{3x\cdot 2-6+6}{\sqrt{9+6x-3x^2}}\,dx-5\int\frac{dx}{\sqrt{3\cdot(3-(x^2-2x+1-1))}}=$$

$$=-\sqrt{9+6x-6x^2}+(3-5)\int\frac{dx}{\sqrt{3(4-(x-1)^2)}}=-\sqrt{9+6x-6x^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}+C$$

Крім того інтеграли $I_1,\ I_2,\ I_3$ можна звести до табличних, зробивши заміну змінних $x=t-\frac{b}{2a};\ dx=dt.$

Приклад. $\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}$.

Зробимо заміну змінних $x=t-\frac{-6}{2\cdot(-3)}=t+1;\ dx=dt,$ тоді

$$I=\int\frac{[3(t+1)-5]}{\sqrt{3(4-t^2)}}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}}dt=\frac{-3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{-2tdt}{\sqrt{4-t^2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{3}}\int(4-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(4-t^2)-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arcsin\frac{t}{2}=-\frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{(4-t^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{t}{2}+C=$$

$$=-\sqrt{3(4-t^2)}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{t}{2}+C=-\sqrt{9+6x-3x^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}+C$$

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Суть інтегрування методом підстановки. Навести приклади.
2. У чому полягає метод інтегрування частинами. Навести приклади.
3. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен. Навести приклади.

Приклади. Знайти наступні інтеграли.

1. $\int\frac{1}{(1+x^2)arctg\,x}dx;$ 2. $\int\frac{e^x}{5+4e^x}dx;$ 3. $\int\frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx,$ 4. $\int x\,arctg\,xdx,$

5. $\int \sin(\ln x)dx$, 6. $\int (x^2+2x+3)\cos x dx$, 7. $\int e^{2x}\cos x dx$, 8. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$,

9. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx$, 10. $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}dx$, 11. $\int \frac{x+3}{\sqrt{-4x^2+4x+3}}dx$,

12. $\int x^2 \ln x\, dx$, 13. $\int \arcsin x\, dx$.

Відповіді. 1) $\ln|arctg\, x|+C$; 2) $\frac{1}{4}\ln(5+4e^x)+C$; 3) $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$,

4) $\frac{x^2+1}{2}arctg\, x-\frac{x}{2}+C$, 5) $\frac{x}{2}(\sin(\ln|x|)-\cos(\ln|x|))+C$,

6) $(x+1)^2\sin x+2(x+1)\cos x+C$, 7) $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$,

8) $\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C$, 9) $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$,

10) $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln|2x^2-x+1|+C$, 11) $-\frac{1}{4}\sqrt{-4x^2+4x+3}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$,

12) $\frac{x^3}{3}\left(\ln|x|-\frac{1}{3}\right)+C$, 13) $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

ЛЕКЦІЯ 19
ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Поняття про комплексні числа.

Раціональні функції та прості дроби.

Розклад правильного раціонального дробу на прості дроби.

Інтегрування простих дробів.

Інтегрування раціональних функцій.

19.1 Поняття про комплексні числа

Означення. Комплексним числом називається вираз $z = a + bi$, де a та b − дійсні числа, а символ i − уявна одиниця, яка визначається умовою $i^2 = -1$ ($\sqrt{-1} = i$).

При цьому число a називається дійсною частиною комплексного числа z і позначається $a = \operatorname{Re} z$, а b − уявною частиною z, $b = \operatorname{Im} z$.

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називаються рівними ($z_1 = z_2$) тоді і лише тоді, коли рівні їх дійсні та уявні частини: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Два комплексних числа $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються спряженими.

Комплексне число $z = a + bi$ дорівнює нулю ($z = a + bi = 0$) тоді і лише тоді, коли $a = b = 0$.

19.2 Раціональні функції та прості дроби

Означення. Многочленом (поліномом) або цілою раціональною функцією називається функція вигляду

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{1}$$

де n- натуральне число, яке називається степенем многочлена; $a_0, a_1, \ldots, a_n$- коефіцієнти многочлена (дійсні або комплексні числа); x- незалежна змінна (може бути як дійсною, так і комплексною).

Далі розглядатимемо лише многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Означення. Коренем многочлена $P_n(x)$ називається таке числове значення змінної $x = x_1$ (дійсне або комплексне), при якому многочлен дорівнює нулю, тобто таке, що $P_n(x_1) \equiv 0$.

Означення. Вираз $P_n(x) = a_0(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$, де $x_1, \ldots, x_n$- корені многочлена називається розкладом многочлена на лінійні множники, тобто на множники виду $x - x_i$.

Наведемо приклад розкладу многочлена на множники:

$$x^3 + x^2 + 9x + 9 = (x^3 + x^2) + (9x + 9) = x^2 \cdot (x+1) + 9\cdot(x+1) = (x+1)\cdot(x^2+9);$$

Будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на множники − лінійні та квадратні тричлени (з комплексними коренями) з дійсними коефіцієнтами. Нехай $P_n(x)$ має m дійсних коренів і s пар комплексних спряжених коренів, тоді многочлен $P_n(x)$ можна представити у вигляді:

$$P_n(x) = a_0\left(x - x_1\right)^{k_1} \cdot \left(x - x_2\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(x - x_m\right)^{k_m} \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s},$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_m$- дійсні корені многочлена; $k_i \ \left(i = 1, \ldots, m\right)$- відповідні кратності дійсних коренів; $l_j \ \left(j = 1, 2, \ldots, s\right)$- відповідні кратності комплексно-спряжених коренів; $k_1 + k_2 + \ldots + k_m + 2 \cdot \left(l_1 + l_2 + \ldots + l_s\right) = n$; a_0, p_j, q_j- дійсні числа, причому $D_j = p_j^2 - 4q_j < 0$.

Зауваження. Якщо два многочлени тотожньо рівні, то рівні їх степені і коефіцієнти при однакових степенях x.

Означення. Відношення двох многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ називається раціональною функцією, або раціональним дробом

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad \left(Q_m(x) \neq 0\right). \tag{2}$$

Означення. Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь полінома $P_n(x)$ в чисельнику менше степеня полінома $Q_m(x)$ в знаменнику, тобто $m > n$, в іншому випадку, коли $n \geq m$, раціональний дріб називається неправильним.

Якщо дріб неправильний, то виконавши операцію ділення, можна виділити раціональну частину $W_k(x)$, і тоді отримаємо

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = W_k(x) + \frac{R_p(x)}{Q_m(x)}, \tag{3}$$

де $W_k(x), R_p(x)$- многочлени k-го і p-го степеня, причому $p < m$, тобто дріб $\dfrac{R_p(x)}{Q_m(x)}$- правильний.

Приклад. $P_n(x) = P_5(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 1$, $Q_m(x) = Q_3(x) = x^3 - 2x + 1$.

Після ділення маємо

$$\frac{P_5(x)}{Q_3(x)} = \frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = \left(x^2 + 3\right) - \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x + 1}.$$

Простими дробами називаються правильні раціональні дроби видів:

1) $\dfrac{A}{x - a}$; 2) $\dfrac{A}{(x - a)^n}, (n \neq 1)$; 3) $\dfrac{Mx + N}{x^2 + px + q}$; 4) $\dfrac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^n}$, $\quad (n \geq 2)$,

де A, a, M, N, p, q - дійсні числа, а тричлен $x^2 + px + q$ - не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

19.3 Розклад правильного раціонального дробу на прості дроби

Теорема 1. Якщо знаменник правильного раціонального дробу $\frac{R_p(x)}{Q_m(x)}$ розкладено на множники:

$$Q_m(x) = a_0(x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\delta} \cdot (x^2 + px + q)^{\mu} \cdot \ldots \cdot (x^2 + lx + s)^{\nu},$$

то цей дріб можна подати у вигляді суми таких простих дробів:

$$\frac{R_p(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots +$$
$$+ \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\delta}{(x-b)^\delta} +$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_\mu x + N_\mu}{(x^2 + px + q)^\mu} + \ldots + \qquad (5)$$
$$+ \frac{L_1 x + S_1}{x^2 + lx + s} + \frac{L_2 x + S_2}{(x^2 + lx + s)^2} + \ldots + \frac{L_\nu x + S_\nu}{(x^2 + lx + s)^\nu}.$$

Вираз (5) називається розкладом правильного раціонального дробу на прості дроби.

Числа $A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots, B_1, \ldots, B_\beta, M_1, N_1, \ldots, M_\mu, N_\mu, \ldots, L_1, S_1, \ldots, L_\nu, S_\nu$ - деякі невизначені дійсні числа, для знаходження яких можна скористатися методом невизначених коефіцієнтів. При застосуванні цього метода необхідно виконати такі дії:

• множимо обидві частини рівності (5) на $Q_m(x)$. Дістанемо два тотожньо рівні многочлени - відомий многочлен $R_p(x)$ і многочлен з невідомими коефіцієнтами $A_1, \ldots, S_\nu$,

• порівняємо їх коефіцієнти при однакових степенях x і отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $A_1, \ldots, S_\nu$,

• розв'язуємо цю систему і знаходимо невідомі $A_1, \ldots, S_\nu$.

Крім методу порівняння коефіцієнтів, користуються також методом окремих значень аргументу.

При застосуванні методу окремих значень аргументу необхідно виконати такі дії:

• множимо обидві частини рівності (5) на $Q_m(x)$ і отримаємо два тотожньо рівні многочлени: відомий многочлен $R_p(x)$ і многочлен з невідомими коефіцієнтами $A_1, \ldots, S_\gamma$,

• надаємо змінній конкретні значення стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої і визначимо шукані коефіцієнти.

Система рівнянь значно спрощується, коли змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_m(x)$.

Іноді зручно скористатись комбінованим методом, тобто деякі з невідомих коефіцієнтів визначити, надаючи x значення дійсних коренів знаменника, а інші – визначити методом порівняння.

Приклад. Виразити дріб $\dfrac{x^2+1}{x^2\cdot(x+1)}$ через прості дроби.

*Розв'язання***.** Маємо $\dfrac{x^2+1}{x^2\cdot(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}$, або

$$(x^2+1)\equiv A\cdot x(x-1)+B(x-1)+Cx^2=(A+C)\cdot x^2+(B-A)\cdot x-B.$$

Якщо, $x=0$, то $1=-B\Rightarrow B=-1$. Якщо, $x=1$, то $2=C\Rightarrow C=2$.

Порівнюємо коефіцієнти при x^2, дістанемо: $1=A+C\Rightarrow A=-1$, бо $C=2$.

Отже, $\dfrac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x-1}$.

19.4 Інтегрування простих дробів

Інтегрування простих дробів не складає великих труднощів, тому проведемо їх інтегрування без додаткових пояснень. Розглянемо ці інтеграли.

1) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\cdot\int\frac{d\cdot(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln\cdot|x-a|+C.$

2) $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=A\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C.$

3) $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=$

$$=\left|\begin{matrix}t=x+\dfrac{p}{2}\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\cdot dt=M\int\frac{t\cdot dt}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}+.$$

$$+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\cdot\int\frac{dt}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=I_1+I_2.$$

Перший інтеграл I_1 обчислюється так

$$I_1 = \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{M}{2}\cdot \ln\left|t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right| + C = \frac{M}{2}\cdot \ln\left|x^2 + px + q\right| + C.$$

Другий інтеграл I_2 є табличним. Оскільки $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ (за умови), то $q - \frac{p^2}{4} > 0$ і за таблицею основних інтегралів маємо:

$$I_2 = \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{\left(N - M\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}} arctg \frac{t}{\sqrt{\frac{4q - p^2}{4}}} + C =$$

$$= \frac{2\left(N - M\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{4q - p^2}} arctg \frac{2t}{\sqrt{4q - p^2}} + C = \frac{2\left(N - M\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{4q - p^2}} arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

Отже, остаточно маємо

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2 + px + q\right) + \frac{2\left(N - M\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{4q - p^2}} arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C\,.$$

4) Інтеграл виду $\int \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^n} dx$ ($p^2 - 4q < 0$, $n \geq 2$) підстановкою $t = x + \frac{p}{2}$ зводиться до двох інтегралів. Перший з них обчислюється безпосередньо, а другий за рекурентною формулою.

Нехай $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{a^2} I_{n-1}, \quad (n > 1)$.

19.5 Інтегрування раціональних функцій

Нехай треба знайти інтеграл $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$. Цей інтеграл можна подати як суму інтеграла від многочлена і правильного раціонального дробу

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \int W_k(x)dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_m(x)} dx\,.$$

Інтеграл від многочлена $W_k(x)$ знаходять безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться за допомогою формули (5) до інтегралів від елементарних дробів.

Отже, встановлено, що інтегрування довільної раціональної функції зводиться до інтегрування многочлена і скінченного числа простих дробів.

Таким чином, будь-яка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{x^5+2}{x^3-1}dx$.

Під знаком інтеграла маємо неправильний дріб, тому спочатку виділимо його цілу частину, виконавши ділення $\left(x^5+2\right):\left(x^3-1\right)$.

Отримаємо: $\frac{x^5+2}{x^3-1}=x^2+\frac{x^2+2}{x^3-1}$.

Розклавши правильний дріб на елементарні, маємо

$$\frac{x^2+2}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$x^2+2\equiv A\left(x^2+x+1\right)+\left(Bx+C\right)\cdot\left(x-1\right)\equiv\left(A+B\right)\cdot x^2+\left(A-B+C\right)\cdot x+\left(A-C\right).$$

Скористаємось комбінованим методом знаходження коефіцієнтів $A, B,$ і C.

Якщо $x=1$, то $3=3A\Rightarrow A=1$.

$x^2:\quad A+B=1\Rightarrow$ звідки $B=0$.

$x^0:\quad A-C=2\Rightarrow C=-1$.

Далі дістанемо

$$\int\frac{x^5+2}{x^3-1}dx=\int\left(x^2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Запитання для самоконтролю та приклади

1. Нехай $J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n\in N$, $n>1$. Вивести рекурентну формулу для обчислення цього інтегралу. Записати в явному вигляді значення J_1, J_2, J_3.
2. Що називається комплексним числом?
3. Який раціональний дріб називається правильним?
4. Які раціональні дроби називаються елементарними?
5. Записати розклад правильного раціонального дробу на елементарні дроби.

6. Як інтегруються елементарні дроби?
7. В чому полягає метод інтегрування раціонального дробу?

Приклади. Обчислити наступні інтеграли

1) $\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx$, 2) $\int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx$, 3) $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x)^2}$,

4) $\int \frac{(x^2 + 1)dx}{x(x+1)(x-1)}$, 5) $\int \frac{(2x^2 - 1)dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}$, 6) $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$, 7) $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$,

8) $\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)} dx$, 9) $\int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx$, 10) $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$,

11) $\int \frac{dx}{x(x^2 + 2)}$, 12) $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$, 13) $\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1} dx$.

Відповіді: 1) $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x^2 - x + 1\right| + C$.

2) $\frac{x^2}{2} - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{127}{32}\ln|x-2| + \frac{31}{16(x+2)} + \frac{129}{32}\ln|x+2| + C$.

3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{x-1}{2x(x-2)} + C$. 4) $\ln\frac{x^2 - 1}{x} + C$.

5) $-\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{17}{3}\ln|x-3| + C$. 6) $x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$.

7) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$. 8) $-\frac{4}{3(x-1)} + \frac{20}{9}\ln|x-1| + \frac{7}{9}\ln|x+2| + C$.

9) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(x+1)^2} + C$. 10) $\ln\left|\frac{x^4}{(x-1)^3}\right| - \frac{9}{x-1} + C$. 11) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2 + 2} + C$.

12) $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2 - 2x + 4} + \frac{\sqrt{3}}{12} arctg\, \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$. 13) $x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - arctg\, x + C$.

ЛЕКЦІЯ 20

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Інтегрування ірраціональних функцій.
Інтегрування диференціальних біномів.
Інтегрування тригонометричних виразів.

20.1 Інтегрування ірраціональних функцій

Якщо підінтегральна функція є ірраціональною, то в багатьох випадках можна підібрати таку підстановку, яка дозволяє підінтегральний вираз звести до раціонального вигляду відносно нової змінної.

Нехай $R(u,v,...,s)$ - раціональна функція від змінних $u,v,...,s$, тобто така функція, в якій над зазначеними змінними виконується скінчена кількість чотирьох арифметичних дій: додавання, віднімання, множення і ділення. Наприклад, раціональною відносно змінних u і v є функція:

$$R(u,v)=\frac{3u^2+2v-1}{u^2-3v^2}.$$

Якщо змінні u та v, в свою чергу, є функціями від x: $u=u(x)$ і $v=v(x)$, то функція $R(u(x),v(x))$ є раціональною відносно функцій $u(x)$ і $v(x)$. В цьому сенсі функція $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{6\sqrt[3]{x-1}}{x^2+5}$ є раціональною функцією від $\sqrt[3]{x-1}$, $\sqrt{x}$, x, і її можна записати $f(x)=R(\sqrt[3]{x-1},\sqrt{x},x)=R\left((x-1)^{1/3},x^{1/2},x\right)$.

Розглянемо тепер інтеграли від деяких ірраціональних функцій і покажемо, що в ряді випадків вони зводяться до інтегралів від раціональних функцій (раціоналізуються).

1. Інтеграли виду $\int R\left(x,x^{\frac{m}{n}},...,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$.

Розглянемо інтеграл $\int R\left(x,x^{\frac{m}{n}},...,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, де R - раціональна функція своїх аргументів. Нехай k - спільний знаменник дробів $\dfrac{m}{n},...,\dfrac{r}{s}$. Застосовуємо підстановку $x=t^k$, при цьому $dx=k\cdot t^{k-1}dt$.

Тоді кожну дробову степінь x можна буде виразити через цілий степінь t, і підінтегральна функція стане раціональною функцією від t.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція має вид $R\left(x,\sqrt[3]{x^2},\sqrt[6]{x},\sqrt[3]{x}\right)=R\left(x,x^{\frac{2}{3}},x^{\frac{1}{6}},x^{\frac{1}{3}}\right)$. Оскільки спільний знаменник для чисел $1,\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}$ є 6, то застосовуємо підстановку $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$. Тоді, зробивши заміну, отримаємо

$$\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx=\int\frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}6t^5dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{(1+t^2)}dt=6\int\frac{t^3(t^2+1)}{1+t^2}dt+6\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

2.

$$=6\cdot\frac{t^4}{4}+6arctg\,t+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6arctg\sqrt[6]{x}+C.$$

Інтеграли виду $\int R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$.

Даний інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k - спільний знаменник дробів $\dfrac{m}{n},\ldots,\dfrac{r}{s}$.

Дійсно, що якщо $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k$, то $ax+b=t^kcx+t^kd$. Знаходимо вираз для x: $x=\dfrac{b-t^kd}{ct^k-a}$. Далі знаходимо $dx=\dfrac{-kt^{k-1}d(ct^k-a)-(b-t^kd)kt^{k-1}c}{(ct^k-a)^2}dt=$

$$=\frac{kt^{k-1}(ad-dct^k-bc+t^kdc)kt^{k-1}c}{(ct^k-a)^2}dt=\frac{kt^{k-1}(ad-bc)}{(ct^k-a)^2}dt.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\displaystyle\int\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

Розв'язання. Покладемо $\dfrac{x+1}{x-1}=t^3$, тоді $x=\dfrac{t^3+1}{t-1} \Rightarrow dx=\dfrac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}$.

Виражаємо підінтегральний вираз через нову змінну t. Маємо

$$\int\frac{1}{\left(\dfrac{t^3+1}{t^3-1}-1\right)^2}\cdot t\cdot\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}=\int\frac{(t^3-1)^2\cdot t\cdot(-6t^2)dt}{(t^3+1-t^3+1)(t^3-1)^2}=-\frac{3}{2}\int t^3dt=$$

$$=-\frac{3}{8}t^4+C=-\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}+C.$$

3. Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Такий інтеграл зводиться до інтегралу від раціональної функції нової змінної t за допомогою підстановок Ейлера.

Перша підстановка Ейлера: якщо $a>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$.

Друга підстановка Ейлера: якщо $c>0$ то $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$.

Третя підстановка Ейлера: якщо тричлен має різні дійсні корені λ і μ, тобто $ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$.

З іншого боку дані інтеграли за допомогою підстановки $x=t-\dfrac{b}{2a}$; $x+\dfrac{b}{2a}$; $dx=dt$ зводяться до одного з таких інтегралів:

а) $\int R\left(t,\sqrt{m^2-t^2}\right)dt$; б) $\int R\left(t,\sqrt{m^2+t^2}\right)dt$; в) $\int R\left(t,\sqrt{t^2-m^2}\right)dt$.

Дійсно, перетворимо квадратний тричлен

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}=a\left[x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm m\right].$$

Якщо $a>0$, маємо $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(t,\sqrt{t^2\pm m^2}\right)dt$.

Якщо $a<0$, маємо $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(t,\sqrt{m^2-t^2}\right)dt,\quad m\in R$.

Для знаходження інтегралів видів а); б); в) використовують тригонометричні підстановки , які зводять задані інтеграли до інтегралів виду $R(\sin z,\cos z)$.

Для інтеграла $\int R\left(t,\sqrt{m^2-t^2}\right)dt$ застосовують підстановку $t=m\sin z$; для інтеграла $\int R\left(t,\sqrt{t^2-m^2}\right)dt$ застосовують підстановку $t=\dfrac{m}{\sin z}$; для інтеграла $\int R\left(t,\sqrt{m^2+t^2}\right)dt$ застосовують підстановку $t=m\,tg\,z$.

Приклад.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\begin{vmatrix}x=\sin z\\ dx=\cos zdz\end{vmatrix}=\int\frac{\cos zdz}{\cos^3 z}=tgz+C=\frac{\sin z}{\cos z}+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

20.2 Інтегрування диференціальних біномів

Означення. Вираз виду $x^m(a+bx^n)^p$, де m,n,p - сталі раціональні числа, a і b - довільні сталі числа, називається диференціальним біномом.

Теорема 1. Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:

1) p - ціле число (додатне, від’ємне або нуль) і виконано підстановку $x=t^s$, де s - найменший спільний знаменник дробів m і n;

2) $\frac{m+1}{n}$ - ціле число (додатне, від'ємне або нуль) і виконано підстановку $a+bx^n=t^r$, де r - знаменник дробу p.

3) $\frac{m+1}{n}+p$ - ціле число (додатне, від'ємне або нуль) і виконано підстановку $ax^{-n}+b=t^r$, де r - знаменник дробу p.

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається.

Приклад. Знайти інтеграл

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\left|\begin{array}{l} m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{3}\\ \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\in N\end{array}\right|=\left|\begin{array}{l}\textit{Підстановка}\\ 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3\\ x=(t^3-1)^4\\ dx=4(t^3-1)^3\cdot 3t^2dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{t}{(t^3-1)^2}\cdot 12t^2(t^3-1)^3dt=12\int t^3(t^3-1)dt=12\frac{t^7}{7}-12\frac{t^4}{4}+C=$$

$$\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C.$$

20.3 Інтегрування тригонометричних виразів

Розглянемо деякі типи інтегралів від тригонометричних функцій, до яких належать інтеграли від раціональних функцій відносно функцій $\sin x;\ \cos x;\ tg\,x;\ ctg\,x;\ \sec x;\ \operatorname{cosec} x$.

Розглянемо інтеграли виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$, де R - раціональна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$. Ці інтеграли завжди раціоналізуються універсальною підстановкою $tg\frac{x}{2}=t$. Дійсно,

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=2\,arctgt;\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким чином, універсальна тригонометрична підстановка має вигляд:

$$tg\frac{x}{2}=t; \quad x=2arctgt$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}; \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Тому, $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt$, де $R_1(t)$ - раціональна функція від t.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sin x+1}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sin x+1}=\left|\begin{array}{l} t=tg\frac{x}{2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}; \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t}{1+t^2}+1\right)}=$$

$$2\int\frac{dt}{(1+t)^2}=2\left(-\frac{1}{1+t}\right)+C=-\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+C.$$

Ця підстановка часто приводить до раціональних дробів з великими степенями, і в багатьох випадках користуються іншими підстановками. Наведемо деякі з них.

Інтеграли виду $\int R(\sin x)\cdot\cos xdx$ раціоналізуються підстановкою $\sin x=t$. Тоді $x=\arcsin t$, $dx=d(\arcsin t)=(\arcsin t)'dt=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Інтеграли виду $\int R(\cos x)\cdot\sin xdx$ раціоналізуються підстановкою $\cos x=t$. Тоді $x=\arccos t$, $dx=d(\arccos t)=(\arccos t)'dt=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Інтеграли виду $\int R(tg\,x)dx$ раціоналізуються підстановкою $tg\,x=t$. Тоді $x=arctg\,t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$, $\int R(tg\,x)dx=\int R(t)\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt$, де $R_1(t)$ - раціональна функція від t.

Для інтегралів виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$ застосовують такі підстановки:

а) якщо $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тобто функція $R(\sin x,\cos x)$ - непарна відносно $\sin x$, то даний інтеграл раціоналізується підстановкою $\cos x=t$;

б) якщо $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тобто функція $R(\sin x,\cos x)$ - непарна відносно $\cos x$, то даний інтеграл раціоналізується підстановкою $\sin x=t$;

в) Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тобто функція $R(\sin x, \cos x)$ парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно, то даний інтеграл раціоналізується підстановкою $tg\, x = t$.

Інтеграли виду $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ знаходяться в залежності від чисел m і n за допомогою таких підстановок:

а) якщо n - ціле додатне число, то даний інтеграл раціоналізується підстановкою $\sin x = t$;

б) якщо m - ціле додатне, непарне число, то підстановка $\cos x = t$ раціоналізує даний інтеграл;

в) якщо m і n - цілі додатні парні числа, то даний інтеграл знаходиться за допомогою формул пониження степеня:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

г) якщо m і n - цілі парні числа, але хоча б одне з них від'ємне, то даний інтеграл раціоналізується підстановкою $tg\, x = t$.

Інтеграли виду $\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx$, обчислюються за допомогою формул

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right].$$

Приклад. Знайти інтеграли.

1) $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$. Оскільки підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, то використаємо підстановку $\cos x = t$.

$$I = \int \frac{\sin x(1+\sin^2 x)}{\cos 2x} = \int \frac{(1+1-\cos^2 x)\sin x dx}{2\cos^2 x - 1} = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} =$$

$$= -\int \frac{2-t^2}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-1+1-4}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\cdot t)}{(\sqrt{2}\cdot t)^2 - 1} = \frac{1}{2}\cdot t - \frac{3}{2\sqrt{2}\cdot 2}\cdot \ln \cdot \left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C.$$

1. Навести приклади інтегрування ірраціональних функцій.
2. Як раціоналізується інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$?
3. Чому підстановка $t = tg\dfrac{x}{2}$ називається універсальною?
4. Як обчислюється інтеграл $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.
5. Як обчислюється інтеграл $\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$?

Приклади. Обчислити інтеграли.

1) $\int \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; 2) $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; 3) $\int \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$; 4) $\int \dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$;

5) $\int \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}dx$; 6) $\int \dfrac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$; 7) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^{4/3} x}dx$; 8) $\int \sin^4 x dx$;

9) $\int ctg^5 x dx$; 10) $\int \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$; 11) $\int \cos 2x \cdot \sin 4x dx$; 12) $\int \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

Відповіді. 1) $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C$. 2) $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.

3) $\sqrt{x^2-4} - 2\arccos\dfrac{2}{x} + C$. 4) $\dfrac{2}{27}\sqrt[4]{x^9} - \dfrac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}} + C$.

5) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right| - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$. 6) $-\dfrac{1}{tg\dfrac{x}{2}+2} + C$.

7) $3(\cos x)^{-\frac{1}{3}} + \dfrac{3}{5}(\cos x)^{\frac{5}{3}} + C$. 8) $\dfrac{3x}{8} - \dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{\sin 4x}{32} + C$.

9) $-\dfrac{ctg^4 x}{4} + \dfrac{ctg^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C$. 10) $\sqrt{2}arctg\left(\dfrac{tg\, x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

11) $-\dfrac{\cos 6x}{12} - \dfrac{\cos 2x}{4} + C$. 12) $-2arctg\dfrac{\sqrt{1-x-x^2}+x+1}{x} + C$.

ЛЕКЦІЯ 21

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Задача про площу криволінійної трапеції

Означення визначеного інтеграла.

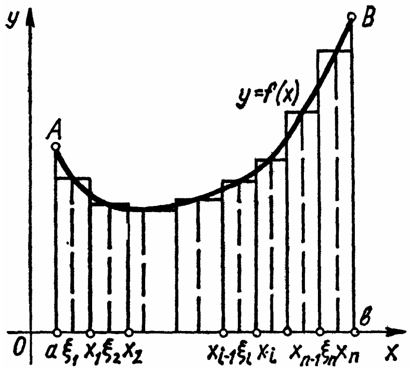
Властивості визначеного інтеграла.

Інтеграл із змінною верхньою межею.

Формула Ньютона-Лейбніца.

21.1 **Задача про площу криволінійної трапеції**

Нехай на відрізку $[a,b]$ (мал. 1) задано неперервну функцію $y = f(x) \geq 0$ ($a < b$). Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на частини точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ так, щоб справджувались нерівності $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Точки поділу розбивають відрізок $[a,b]$ на n малих відрізків $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$. Проведемо через точки поділу прямі, паралельні осі OY, які розбивають криволінійну трапецію $aABb$ на n малих криволінійних трапецій. Площа всієї криволінійної трапеції дорівнює сумі площ усіх n малих криволінійних трапецій. Тому, якщо позначити через S площу всієї криволінійної трапеції, а через ΔS_i – площу малої i–ї криволінійної трапеції з основою $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}$, то $S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + ... + \Delta S_n$.



Щоб обчислити площі малих трапецій, у кожному з малих відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ вибираємо довільну точку ξ_i $(x_{i-1} < \xi_i < x_i)$ і обчислюємо в цій точці ординату кривої $f(\xi_i)$. Потім малу криволінійну трапецію з основою $[x_{i-1}, x_i]$ замінюємо прямокутником з тією самою основою і висотою, що дорівнює $f(\xi_i)$. Площа прямокутника дорівнює $f(\xi_i)\Delta x_i$. Беручи площу цього прямокутника за наближене значення площі малої криволінійної трапеції, знайдемо $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Тоді $$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Причому ця наближена рівність буде тим точніше, чим менша довжина відрізка Δx_i. Тому виберемо $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$, і нехай $\lambda \to 0$. У $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ перейдемо до границі для $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$ і дістанемо точне значення площі криволінійної трапеції: $S = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ i}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

21.2 **Означення визначеного інтеграла**

Означення. Суми вигляду $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S_n$ називаються інтегральними сумами функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Розглянемо будь-які розбиття відрізка $[a,b]$ на частинні відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, позначимо $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. Нехай $\lambda \to 0$, очевидно, що в такому випадку число відрізків n буде прямувати до нескінченності, тобто $n \to 0$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i при прямуванні до нуля довжини найбільшого з частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, то ця границя називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Отже, $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ i}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, $\int\limits_a^b$ – знак визначеного інтеграла, число a називається нижньою межею інтегрування, число b – верхньою межею, $f(x)$– підінтегральною функцією, $f(x)dx$– підінтегральним виразом, x– змінною інтегрування, $[a,b]$- відрізком інтегрування.

Функція $f(x)$, яка має визначений інтеграл на відрізку $[a,b]$, називається інтегровною на цьому відрізку.

Виходячи із того, що $S = \lim\limits_{\substack{\lambda_i \to 0 \\ i}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ – площа криволінійної трапеції і , що $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ i}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ – означення визначеного інтегралу можна сказати, що площа S криволінійної трапеції, обмеженої прямими $y = 0, x = a, x = b$ і графіком функції $y = f(x) \ge 0$ дорівнює визначеному інтегралу від цієї функції,

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx .$$

В цьому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла.

Фізичний зміст визначеного інтеграла в наступному : якщо S – шлях, який пройшла точка за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$ зі швидкістю $V(t)$, то

$$S = \int\limits_a^b V(t)dt .$$

21.3 **Властивості визначеного інтеграла**

Нехай функція інтегрована на відрізку $[a,b]$, тоді справедливо:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ за означенням інтеграла.

2. При перестановці меж інтегрування інтеграл змінює знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ і $c \in (a,b)$ (мал.2), то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

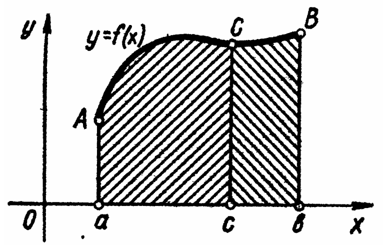


Рис.2

3) Сталий множник k можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

4) Визначений інтеграл від алгебраїчної суми інтегровних функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Ця властивість має місце для довільного скінченного числа доданків.

5) Якщо на відрізку $[a,b]$ $(a < b)$, $f(x) \geq 0$ то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Ця властивість називається збереженням знака підінтегральної функції визначеним інтегралом.

6) Якщо на відрізку $[a,b]$ $(a < b)$ функції $f(x)$ і $g(x)$задовольняють умові $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

7) Визначений інтеграл залежить тільки від вигляду функції $f(x)$ і від меж інтегрування, але не залежить від змінної інтегрування, яку можна позначити будь-якою буквою, тобто можна записати

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

8) Якщо m і M відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і $a \leq b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Якщо $f(x) \ge 0$, то цю властивість легко проілюструвати графічно (мал. 3).

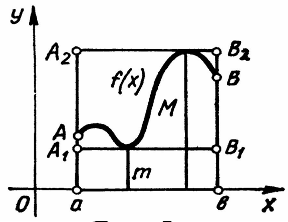


Рис.3

З геометричної точки зору властивість 8 має таке тлумачення: площа криволінійної трапеції $aABb$ не менша площі прямокутника aA_1B_1b і не більша площі прямокутника aA_2B_2b.

21.4 **Інтеграл із змінною верхньою межею**

Нехай у визначеному інтегралі $\int_a^x f(x)dx$ нижня межа зафіксована, тобто не змінюється і дорівнює a, а верхня межа змінюється. Тоді при змінюванні x буде змінюватися значення інтеграла, тобто інтеграл є функція верхньої межі. Позначимо цю функцію через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Це і є інтеграл із змінною верхньою межею.

З геометричної точки зору при $f(x) \ge 0$ функція $\Phi(x)$ дорівнює площі заштрихованої криволінійної трапеції (рис.4). Видно, що коли змінюється x і змінюється $\Phi(x)$.

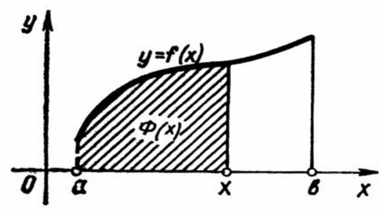


Рис. 4

$\Phi(x)$ має такі властивості:

1) Якщо функція неперервна в точці $x = x_0$, то в цій точці функція $\Phi(x)$ має похідну, яка дорівнює $f(x_0)$, тобто $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

2) Якщо допустити, що функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$. Дана властивість формулюється так: похідна від інтегралу із змінною верхньою межею інтегрування дорівнює значенню

підінтегральної функції в верхній межі інтегрування. Інакше кажучи, для довільної неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ завжди існує первісна, а саме $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$.

Властивість 2 розкриває зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами. Крім того, вона дає змогу встановити простий спосіб обчислення визначених інтегралів. Цей спосіб базується на наступній формулі Ньютона-Лейбніца.

21.5. **Формула Ньютона–Лейбніца**

Теорема. Якщо $F(x)$ будь-яка первісна для неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$, то справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Це є формула Ньютона-Лейбніца. Ця формула є основою інтегрального числення. Вона дає простий спосіб для обчислення визначеного інтеграла від неперервної на від неперервної функції.

Доведення. Нехай $F(x)$ – будь–яка первісна функція для функції для $f(x)$. З другого боку $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ теж є первісною $f(x)$ (властивість 2.). Але дві будь-які первісні даної функції відрізняються на сталий доданок C. Отже, можна записати

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) = F(x)+C.$$

Покладемо $x=a$. Тоді $\int\limits_a^a f(t)dt = F(a)+C$, або $0=F(a)+C$, $C=-F(a)$.

Отже, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$. Покладемо в цьому виразі $x=b$ і отримаємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Різницю $F(b)-F(a)$ часто умовно позначають так: $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$. Тоді формулу Ньютона-Лейбніца записують у вигляді

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Вираз $\Big|_a^b$ називається знаком подвійної підстановки.

Таким чином, визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює приросту первісної на відрізку $[a,b]$. Оскільки в правій частині рівності можна брати будь-яку первісну, то все одно яку брати довільну сталу при невизначеному інтегралі. Тому її покладають нулю і взагалі не пишуть.

Приклади. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{\pi/2}(2x-\cos x)dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi/2}(2x-\cos x)dx=(x^2-\sin x)\Big|_0^{\pi/2}=\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\sin\frac{\pi}{2})-(0^2-\sin 0\right)=\frac{\pi}{4}^2-1.$$

Запитання до самоконтролю і приклади.

1) Наближене знаходження площі криволінійної трапеції

2) Поняття інтегральної суми?

3) Що називається визначеним інтегралом?

4) В чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?

5) Властивості визначеного інтегралу.

6) Записати і довести формулу Ньютона-Лейбніца.

Приклади. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^1 e^x dx$. 2) $\int_0^1\sqrt{1+x}dx$. 3) $\int_0^{2a}\frac{3}{2b-x}dx,(a>0,b>0)$. 4) $\int_0^{\pi}\cos^5 x\sin 2x dx$.

5) $\int_0^e\frac{1+\ln x}{x}dx$. 6) $\int_0^{\pi/2}3^{\sin x}\cos x dx$. 7) $\int_0^e\frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$. 8) $\int_0^1\frac{\sqrt{3+\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 9) $\int_0^{\ln 3}(e^x+1)^5e^x dx$. 10) $\int_0^1\frac{\left(x+arctgx\right)dx}{x^2+1}$.

Відповіді: 1) $e-1$ 2) $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. 3) $2\ln\left|\frac{b}{b-a}\right|$ 4) $\frac{2}{7}$. 5) $\frac{3}{2}$. 6) $\frac{2}{\ln 3}$. 7) $\frac{\pi}{4}$.

8) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{\left(3+\frac{\pi}{2}\right)^3}-\sqrt{27}\right)$. 9) 672. 10) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi^2}{32}$.

ЛЕКЦІЯ 22

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Заміна змінної інтегрування у визначеному інтегралі
Інтегрування частинами у визначеному інтегралі
Інтегрування парних і непарних функцій на симетричному проміжку

22.1. **Заміна змінної інтегрування у визначеному інтегралі**

Теорема . Нехай виконуються умови:
1) $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$;
2) функція $x=\varphi(t)$ та її похідна $x'=\varphi'(t)$ неперервні для всіх $t\in[\alpha,\beta]$;
3) $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$ всіх $t\in[\alpha,\beta]$.
Тоді має місце формула: $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Ця формула називається формулою заміни змінної (або підстановки) у визначеному інтегралі.

Доведення. Якщо $F(x)$- первісна функції $f(x)$, то можемо написати наступні рівності:
$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C.$$

За формулою Ньютона – Лейбніца маємо:
$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$
$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

Праві частини останніх двох рівностей рівні між собою, тому рівні і ліві частини, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Теорему доведено.

Зауваження. При обчисленні невизначеного інтеграла при заміні змінної $x=\varphi(t)$ у первісній функції необхідно було повернутися від змінної t до змінної x, а при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити межі інтегрування.

Зауваження. Нижня межа α і верхня межа β знаходяться з рівнянь $\varphi(\alpha)=a$ і $\varphi(\beta)=b$.

Зауваження. Якщо заміна змінної в визначеному інтегралі виконується за формулою $t=\psi(x)$, то нові межі α і β можна визначити безпосередньо за формулами: $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Розв'язання. Покладемо $x = \sin t$. Нові межі інтегрування знайдемо з рівнянь $\sin\alpha = 0$ і $\sin\beta = \frac{1}{2}$. Маємо, $\alpha = 0$ і $\beta = \frac{\pi}{6}$. При зміні t від 0 до $\frac{\pi}{6}$, змінна $x = \sin t$ пройде весь інтервал інтегрування від $\left[0, \frac{1}{2}\right], \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$.

Таким чином:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/6} \sin^2 t \cdot \cos t\, dt = \int_0^{\pi/6} \sin^2 t\, d(\sin t) = \left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{\pi/6} = \frac{1}{24}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_4^9 \frac{xdx}{\sqrt{x} - 1}$.

Розв'язання.

$$\int_4^9 \frac{xdx}{\sqrt{x} - 1} = \left| \text{ заміна } \sqrt{x} = t, \text{ тоді } x = t^2,\ dx = 2tdt, \text{ нові межі } \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ t & 2 & 3 \end{array} \right| =$$

$$= \int_2^3 \frac{t^2\, 2tdt}{t - 1} = 2\int_2^3 \frac{t^3 dt}{t - 1} = 2\int_2^3 \frac{(t^3 - 1) + 1}{t - 1} dt = 2\int_2^3 \frac{(t - 1)(t^2 + t + 1) + 1}{t - 1} dt =$$

$$2\int_2^3 (t^2 + t + 1) dt +$$

$$+ 2\int_2^3 \frac{d(t - 1)}{t - 1} = 2\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t - 1|\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(9 + \frac{9}{2} + 3 + \ln 2 - \frac{8}{3} - 2 - 2 - \ln 1\right) =$$

$$= \frac{59}{3} + 2\ln 2.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Розв'язання. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} = \left| \ tg\frac{x}{2} = t, \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, dx = \frac{2dt}{1 + t^2}, \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi/2 \\ t & 0 & 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{\frac{2 + 2t^2 + 1 - t^2}{1 + t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 3} = \left.\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\right|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Тут використано універсальну тригонометричну підстановку.

22.2. **Інтегрування частинами у визначеному інтегралі**

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні функції на відрізку $[a, b]$. Розглянемо диференціал їхнього добутку

$$d(u(x) \cdot v(x)) = (u(x) \cdot v(x))' dx = (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x))dx =$$
$$= u(x)' \cdot v(x)dx + u(x) \cdot v'(x)dx = v(x)du(x) + u(x)dv(x),$$

$$\text{тобто } d(u(x)\cdot v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x).$$

Проінтегруємо цю рівність в межах від a до b, знаходимо:
$$\int_a^b d(u(x)\cdot v(x)) = \int_a^b v(x)du(x) + \int_a^b u(x)dv(x), (u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b = \int_a^b v(x)du(x) + \int_a^b u(x)dv(x).$$

Звідки і отримуємо формулу інтегрування частинами в визначеному інтегралі:
$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Приклад 4. Обчислити $\int_0^{\pi/2} x\sin 4x dx$.

Розв'язання.
$$\int_0^{\pi/2} x\sin 4xdx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, v = \sin 4xdx, \\ v = \int \sin 4xdx = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{array} \right| = -\frac{1}{4}x\cos 4x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos 4xdx =$$
$$= -\frac{\pi}{24}\cos\frac{4\pi}{6} + \frac{1}{4}\cdot 0\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{24}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{16}\sin\frac{2\pi}{3} =$$
$$= -\frac{\pi}{24}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Приклад 5. Обчислити $\int_1^2 x\log_2 xdx$.

Розв'язання. $$\int_1^2 x\log_2 xdx = \left| \begin{array}{l} u = \log_2 x, du = \dfrac{dx}{x\ln 2} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| == \frac{x^2}{2}\log_2 x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x\ln 2}dx =$$
$$= \frac{2^2}{2}\log_2 2 - \frac{1}{2}\log_2 1 - \frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 xdx = 2 - \frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{4\ln 2} = 2 - \frac{3}{4\ln 2}.$$

Приклад 6. Обчислити $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Розв'язання. $$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx =$$
$$= e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{2}{e}.$$

22.3. **Інтегрування парних і непарних функцій на симетричному проміжку**

Розглянемо функцію $f(x)$ на симетричному відрізку $[-a;a]$.

1. Нехай $f(x)$ – парна функція, тоді $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Доведення. Оскільки $f(x)$–парна функція, то $f(-x) = f(x)$.

Тоді $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \left| x = -t, dx = -dt, \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ t & a & 0 \end{array} \right| =$

$$=-\int_a^0 f(-t)dt+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(t)dt+\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$$

2. Нехай $f(x)$ – непарна функція, тоді $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.

Доведення. Оскільки $f(x)$–непарна функція, то $f(-x)=-f(x)$.

Тоді $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=\left|x=-t, dx=-dt, \begin{array}{c|c|c} x & -a & 0 \\ \hline t & a & 0 \end{array}\right|=$

$$=-\int_a^0 f(-t)dt+\int_0^a f(x)dx=\int_a^0 f(t)dt+\int_0^a f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0.$$

Отже,
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & f(x) \text{ парна}, \\ 0, & f(x) \text{ непарна}. \end{cases}$$

Приклад 7. Обчислити $\int_{-a}^{a} x^3\cos xdx$.

Розв'язання. Оскільки $x^3\cos x$–непарна на симетричному проміжку $[-a,a]$, то можна відразу сказати, що $\int_{-a}^{a} x^3\cos xdx=0$.

Покажемо це:

$$\int_{-a}^{a} x^3\cos xdx=\left|\begin{array}{l} u=x^3, du=3x^2dx \\ dv=\cos xdx, v=\sin x \end{array}\right|=x^3\sin x\Big|_{-a}^{a}-\int_{-a}^{a}3x^2\sin xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x^2, du=2xdx \\ dv=\sin xdx, v=-\cos x \end{array}\right|=a^3\sin a-(-a)^3\sin(-a)-3(-x^2\cos x\Big|_{-a}^{a}+\int_{-a}^{a}2x\cos xdx)=$$

$$=3a^2\sin a-3(-a)^2\cos(-a)-6\int_{-a}^{a}x\cos xdx=\left|\begin{array}{l} u=x, du=dx \\ dv=\cos xdx, v=\sin x \end{array}\right|=$$

$$=-6(x\sin x\Big|_{-a}^{a}-\int_{-a}^{a}\sin xdx)=-6a\sin a+6(-a)\sin(-a)+6(-\cos x)\Big|_{-a}^{a}=$$

$$=-6\cos a+6\cos(-a)=0.$$

Приклад 8. Обчислити *а*) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(3x-2x^5)dx$; *б*) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^7 2xdx$;

в) $\int_3^{-3}x^8\arcsin xdx$; *г*) $\int_{-2}^{2}\frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}dx$.

Розв'язання. *а*) Підінтегральна функція $f(x)=3x-5x^5$ непарна, так як $f(-x)=3(-x)-5(-x)^5=-3x+5x^5-(3x-5x^5)=-f(x)$, тому $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(3x-2x^5)dx=0$;

б) $f(-x)=\sin^7(2(-x))=-\sin^7 2x=-f(x)$. тобто, підінтегральна функція непарна. Отже, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^7 2xdx=0$;

в) $f(-x)=(-x)^8\arcsin(-)x=-x^8\arcsin x=-f(x)$, тому $\int_3^{-3}x^8\arcsin xdx=0$;

г) Підінтегральну функцію $f(x)=\dfrac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}$ запишемо у вигляді

$$f(x)=\frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}+\frac{x^5+x^3}{x^3+x}=f_1(x)+f_2(x);$$

$$f_1(-x)=\frac{7(-x)^4-5(-x)^2-2}{(-x)^3+(-x)}=\frac{7x^4-5x^2-2}{-x^3-x}=-\frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}=-f_1(x) \text{ – непарна,}$$

$$f_2(-x)=\frac{(-x)^5+(-x)^3}{(-x)^3+(-x)}=\frac{-x^5-x^3}{-x^3-x}=\frac{x^5+x^3}{x^3+x}=f_2(x) \text{ – парна, тому}$$

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}+\frac{x^5+x^3}{x^3+x}\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{2}\frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}dx+\int_{-2}^{2}\frac{x^5+x^3}{x^3+x}dx=0+2\int_{0}^{2}\frac{x^5+x^3}{x^3+x}dx=2\int_{0}^{2}\frac{x^3(x^2+1)}{x(x^2+1)}dx=$$

$$=2\int_{0}^{2}x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{16}{3}.$$

Запитання до самоконтролю і приклади.

1) У чому полягає метод заміни змінної у визначеному інтегралі?

2) У чому полягає метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі?

3) Інтегрування парних і непарних функцій на симетричному проміжку?

Приклад 1. Обчислити інтеграли: а) $\int_0^1\frac{x^2dx}{(1+x)^4}$, підстановка $x+1=t$;

б) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$, підстановка $\sqrt{e^x-1}=t$; в) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$, підстановка $x^2+1=t$; г) $\int_1^e\frac{\sqrt[4]{1+\ln x}\,dx}{x}$, підстановка $1+\ln x=t$; д) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}$, е) $\int_{-1}^0\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Відповіді: а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{4-\pi}{2}$; в) 3; г) $0{,}8\left(2\sqrt[4]{2}-1\right)$; д) $-\frac{17}{6}$; е) $1{,}5(\ln 4-1)$.

Приклад 2. Обчислити інтеграли: а) $\int_1^e\frac{\ln x dx}{x^3}$;

б) $\int_0^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}dx$; в) $\int_0^{\pi^2/2}x\cos xdx$; г) $\int_0^{-1}xe^{-4x}dx$; д) $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(\ln x)dx$; е) $\int_1^2\frac{\ln xdx}{x^5}$.

Відповіді: а) $\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{e^2}\right)$; б) 2; в) $\frac{\pi}{1}-1$; г) $\frac{1}{16}\left(3e^4+1\right)$; д) $\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$; е) $\frac{15-4\ln 2}{256}$.

ЛЕКЦІЯ 23

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Загальні поняття

Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду)

Невласні інтеграли від необмежених функцій(невласні інтеграли другого роду)

23.1. **Загальні поняття**

Існування визначений інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ передбачає виконання двох умов:

1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;
2) відрізок інтегрування $[a;b]$ скінченний.

Якщо порушується хоча б одна з цих умов, тобто відрізок інтегрування не є скінченним або функція є необмеженою поблизу деякої точки з відрізка $[a;b]$ чи поблизу меж інтегрування, то визначений інтеграл називається невласним.

Залежно від того, яка з умов не виконується, розрізняють класи невласних інтегралів.

23.2. **Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду)**

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$, де нижня межа інтегрування a – деяке стале число, і інтегрована на будь – якому відрізку $[a;b]$, де $b > a$ – довільне дійсне число, тоді інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує для будь – якого $b > a$.

Означення. Якщо існує границя (скінченна або нескінченна) інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ для $b \to +\infty$, то вона називається невласним інтегралом функції $f(x)$ і позначається $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Отже,
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Означення. Якщо границя інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ скінченна, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається збіжним, а сама функція називається інтегрованою на

$[a;+\infty)$. Якщо ж границя не існує, чи є нескінченність, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним.

Аналогічно визначається невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$ і інтегрована на відрізку $[a;b]$ $(-\infty < a < b < +\infty$, то

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$, де c –довільне дійсне число і $c\in[a;b]$.

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$

Розв'язання. За означенням $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^b\right) =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = \left\{-\frac{1}{+\infty}+1\right\} = 1.$

Отже, границя невласного інтеграла скінченна, тому інтеграл збігається, значення границі береться за значення невласного інтеграла, тобто інтеграл дорівнює 1.

Приклад 2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

Розв'язання. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty$.

Отже, невласний інтеграл розбігається.

Приклад 3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin x dx$.

Розв'язання. $\int\limits_0^{+\infty}\sin x dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \sin x dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\cos x\Big|_0^b\right) = \lim\limits_{b\to+\infty}(-\cos b + \cos 0) =$

$= 1 - \lim\limits_{b\to+\infty}\cos b$. Але границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\cos b$ не існує, тому $\int\limits_0^{+\infty}\sin x dx$ розбіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

Розв'язання. За означенням

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2+1} + \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^1\frac{dx}{x^2+1} + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \lim\limits_{a\to-\infty}\left(arctgx\Big|_a^1\right) + \lim\limits_{b\to+\infty}\left(arctgx\Big|_1^b\right) = arctg1 - \lim\limits_{a\to-\infty}arctga + \lim\limits_{b\to+\infty}arctgb - arctg1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi .$$

Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ збіжний.

У розглянутих прикладах невласні інтеграли обчислювали за означенням. Проте інколи досить знати, збіжний чи розбіжний невласний інтеграл, і тоді немає потреби його обчислювати.

Розглянемо деякі ознаки збіжності невласних інтегралів.

Теорема 1. Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$, $\varphi(x)$ неперервні і задовольняють умову $0\le f(x)\le\varphi(x)$, то зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$, а з розбіжності $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$.

Теорема 2. Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c$, $0<c<+\infty$, $f(x)>0,\varphi(x)>0$, то інтеграли $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ або обидва збіжні, або розбіжні.

Приклад 5. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}$.

Розв'язання.

Маємо $f(x)=\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{1}{\frac{x+1}{x}(x+1)^2}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x+1)^2}\sim\frac{1}{(x+1)^2}$ для $x\to\infty$.

Позначимо $\varphi(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$. Функції $f(x)$, $\varphi(x)$ задовольняють умови теореми 1: $0\le f(x)\le\varphi(x)$ для $x\in[0;+\infty)$, $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{(x+1)^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b(x+1)^{-2}dx=-\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\Bigg|_0^b\right)=$
$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b+1}\right)+1=1$. Отже $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(x)dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^2}$ збіжний. Тоді за теоремою 1 $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}$ також збіжний.

Якщо функція $f(x)$ знакозмінна, то має місце твердження:

Теорема 3. Якщо $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ збіжний, то збігається також $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$.

Зауваження. Із збіжності $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ не випливає збіжність $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$.

Означення. Якщо $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збіжний і інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ також збіжний, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ є абсолютно збіжним.

23.3. **Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду)**

Нехай функція $f(x)$ задана на скінченному відрізку $[a;b]$, але необмежена на ньому. Припускаємо, що $f(x)$ неперервна в кожній точці $[a;b]$, крім точки b, в якій функція має нескінченний розрив. Тоді на проміжку $[a;b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$, функція буде неперервною.

Означення. Якщо існує границя (скінченна або нескінченна) визначеного інтеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ для $\varepsilon \to 0$, то ця границя називається невласним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається $\int_a^b f(x)dx$.

Отже,
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Означення. Якщо границя інтеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ скінченна, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається збіжним. Якщо ж границя не існує, чи є нескінченність, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є розбіжним.

Приклад 6. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Функція $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в точці $x=1$ має розрив і $\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\infty$, тому $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ є невласним. Маємо $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ збіжний.

Означення. Якщо $f(x)$ має нескінченний розрив у точці $x=a$, тоді $f(x)$ неперервна в кожній точці проміжку $[a+\varepsilon;b]$, де $0<\varepsilon<b-a$, і невласний інтеграл має вигляд: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Означення. Якщо функція $f(x)$ має нескінченний розрив у точці $c\in(a;b)$, тоді $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Приклад 7.Обчислити невласний інтеграл $\int_0^2\frac{dx}{x^2-2x+1}$.

Розв'язання. Функція $\frac{1}{x^2-2x+1}$ в точці $x=1$ має розрив, тому $\int_0^2\frac{dx}{x^2-2x+1}=\int_0^1\frac{dx}{x^2-2x+1`}+\int_1^2\frac{dx}{x^2-2x+1`}=$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-2x+1}+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{x^2-2x+1}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{-1}{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon}-\frac{1}{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^2\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1-`1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=-2+\lim_{\varepsilon\to0}\frac{2}{\varepsilon}=\infty.$$

Отже, інтеграл $\int_0^2\frac{dx}{x^2-2x+1}$ розбіжний.

Приклад 8. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}, \qquad \alpha>0.$

Розв'язання. Якщо $\alpha\neq1$, то

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to0}(1-\varepsilon^{1-\alpha})=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & 0<\alpha<1;\\ +\infty, & \alpha>1.\end{cases}$$

Якщо $\alpha=1$, то $\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln x\Big|_\varepsilon^1=-\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon=+\infty.$

Таким чином, інтеграл збігається при $0<\alpha<1$ і розбігається при $\alpha\geq1$.

Теорема 4. Якщо на проміжку $[a;b)$ функції $f(x)$, $\varphi(x)$ неперервні і задовольняють умову $0\leq f(x)\leq\varphi(x)$ і у точці $x=b$ мають розрив, то зі збіжності інтеграла $\int_a^b\varphi(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, а з розбіжності $\int_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність $\int_a^b\varphi(x)dx$.

Приклад 8. Дослідити на збіжність $\int_0^1\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Маємо нерівність $0\leq\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx}{\sqrt{x}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$ для $x\in(0;1)$. Тут

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}>0$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1=2$. Отже, інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ збіжний, тоді за теоремою 4 інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx}{\sqrt{x}}$ також збіжний.

Запитання до самоконтролю і приклади

1. Умови існування визначеного інтеграла.
2. Поняття невласного інтегралу.
3. Означення невласного інтеграла першого роду.
4. Означення невласного інтеграла другого роду.
5. Ознаки збіжності невласного інтегралу.

Приклади. Обчислити (дослідити на збіжність) інтеграли:
1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$. 2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$. 3) $\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx$. 4) $\int_{-\infty}^{0}xe^{-x^2}dx$. 5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$.
Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$. 2) Розбіжний. 3) $\frac{1}{2}$. 4) $-\frac{1}{2}$. 5) 0.
Приклади. Обчислити (дослідити на збіжність) інтеграли:
1) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$. 2) $\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}$. 3) $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 4) $\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.
Відповідь: 1) Розбіжний. 2) Розбіжний. 3) $2\sqrt{2}$. 4) 2.

ЛЕКЦІЯ 24

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Обчислення площ плоских фігур в прямокутній системі координатах
Параметричне задання кривої
Довжина дуги кривої в прямокутній системі координат
Довжина дуги кривої, заданої параметрично
Обчислення об’ємів тіл

24.1 **Обчислення площ плоских фігур в прямокутній системі координатах**

Якщо на відрізку $[a,b]$ задана функція $f(x)\geq 0$, то відомо, що площа криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y=f(x)$, віссю OX і прямими $x=a$, $x=b$ дорівнює $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)\leq 0$ на $[a,b]$, то визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx\leq 0$, але $S\geq 0$, тому $S=-\int\limits_a^b f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ скінченне число раз змінює знак на відрізку $[a,b]$, то інтеграл на цьому відрізку розбиваємо на суму інтегралів по частинним відрізкам знакосталості функції. Інтеграл буде додатним на тих відрізках, де $f(x)\geq 0$, і від’ємний, де $f(x)\leq 0$. Інтеграл по всьому відрізку дасть нам відповідну алгебраїчну суму площ, які лежать вище і нижче осі OX (мал.1).
$+\int\limits_d^b f(x)dx=\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

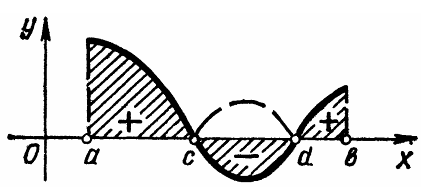


Рис.1

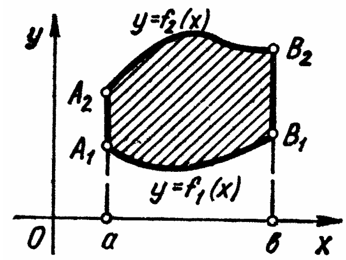


Рис. 2

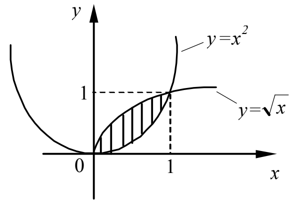


Рис. 3

Якщо необхідно обчислити площу області $A_1A_2B_2B_1$, яка обмежена кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ і прямими $x=a$, $x=b$, то за умови, що $f_2(x)\ge f_1(x)$, площу обчислюємо за формулою (мал.2):

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx.$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури яка обмежена кривими $y=\sqrt{x}, y=x^2$.

Розв'язання. Використаємо формулу $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$. В нашому випадку $f_1(x)=x^2, f_2(x)=\sqrt{x}$. Намалюємо фігуру, площу якої треба знайти (мал.3). Далі знайдемо абсциси точок перетину кривих (межі інтегрування):

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=\sqrt{x}, \end{cases} \Rightarrow x^2=\sqrt{x},\ x^4=x,\ x_1=0, x_2=1 \text{ або } a=0, b=1.$$

Маємо: $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left.\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

24.2 **Параметричне задання кривої**

Нехай крива, що обмежує криволінійну трапецію зверху, задана параметричними рівняннями (мал.4)

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta,$$ де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні функції і мають неперервні похідні на відрізку $[\alpha,\beta]$.

Знаходимо площу криволінійної трапеції, обмеженою прямими $x=a, x=b$, віссю OX і кривою $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ причому $x=\varphi(t)\big|_{t=\alpha}=a$, $y=\psi(t)\big|_{t=\beta}=b$.

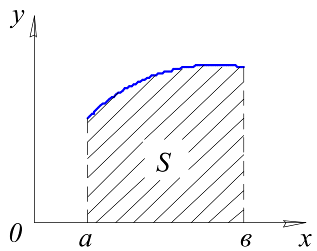


Рис.4

Нехай рівняння $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ визначають деяку функцію $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Тоді площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою: $S=\int_a^b f(x)dx$.

Робимо заміну змінної в цьому інтегралі: $x=\varphi(t), dx=\varphi'(t)dt$, $t=\varphi^{-1}(x)\big|_{x=a}=\alpha$, $t=\varphi^{-1}(x)\big|_{x=b}=\beta$, $y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$.

Тоді $S=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$.

Отже, $S=\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$, це і є формула для обчислення площі криволінійної трапеції в випадку кривої, яка задана параметрично.

Приклад 2. Обчислити площу еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, параметричне рівняння якого має вигляд: $x=a\cos t, y=b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

Розв'язання. Обчислимо площу верхньої половини еліпса, а потім подвоїмо результат. Для верхньої половини еліпса $t\in[\pi,0]$, $dx=(a\cos t)'dt=-a\sin tdt$.

Тоді $S=2\int\limits_\pi^0 b\sin t(-a\sin t)dt=-2ab\int\limits_\pi^0 \sin^2 tdt=-2ab\int\limits_\pi^0 \frac{1-\cos 2t}{2}dt=$

$$=-2ab\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_\pi^0=\pi ab.$$

24.3. **Довжина дуги кривої в прямокутній системі координат**

Нехай крива AB задається рівнянням $y=f(x)$, причому функція $f(x)$ і її перша похідна $f'(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$

Розіб'ємо дугу AB на n частин точками $A=M_0,M_1,..M_{i-1},M_i,...,M_n=B$, які мають абсциси $a=x_0,x_1,...x_{i-1},x_i,...,x_n=b$. Відповідні їм ординати точок розбиття є $y_0=f(x_0),y_1=f(x_1),...,y_{i-1}=f(x_{i-1}),y_i=f(x_i),...,y_n=f(x_n)$.

Позначимо $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$ і проведемо через кожні дві точки розбиття хорду. Довжина l_n побудованої ламаної лінії складається із суми довжин гіпотенуз прямокутних трикутників з катетами Δx_i і Δy_i.

Тоді $l_n=\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$.

Перейдемо до границі для $\max\limits_i \Delta x_i\to 0$, знайдемо довжину дуги AB кривої, яка виражається інтегралом

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{1+(y')^2}dx=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Приклад 3. Знайти довжину дуги кривої $x^2+y^2=a^2$.

Розв'язання. $l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{1+(y')^2}dx$. Розв'яжемо рівняння кола $x^2+y^2=a^2$ відносно $y: y^2=a^2-x^2, y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$. Тоді $y'=\pm\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)=\frac{\pm x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Отже $l=2\int\limits_{-a}^a\sqrt{1+\left(\frac{\pm x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}dx=2\int\limits_{-a}^a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx=2\int\limits_{-a}^a\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}dx=$

$$= 2a\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2a\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} = 2(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) =$$

$$2a\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi a .$$

24.4. **Довжина дуги кривої, заданої параметрично**

Нехай крива задана параметричними рівняннями $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, де $\varphi(t),\psi(t)$–неперервні функції з неперервними похідними, причому на заданому відрізку $\varphi'(t)\neq 0$ і $\varphi(\alpha)=a, \psi(\beta)=b$.

Тоді $l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\begin{vmatrix}dy=\psi'(t)dt\\ dx=\varphi'(t)dt\end{vmatrix}=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)dt$ або

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt .$$

24.5. **Об’єм тіла**

1) Нехай треба знайти об’єм тіла, якщо відомі площі S перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до деякої осі, наприклад OX (мал.5) $S=S(x)$, $a\le x\le b$.

Перетнемо тіло двома площинами, які проходять через точки x_i та $x_i+\Delta x_i$, перпендикулярно до вісі OX. Тоді утворену між перерізами фігуру можна вважати циліндром (деякою похибкою) з основою $S(x_i)$ і висотою Δx_i, тому його об’єм $\Delta V_i \approx S(x_i)\Delta x_i$.

Якщо відрізок $[a,b]$ розбити на n частин і через точки поділу провести площини, перпендикулярні до вісі OX, то тіло розіб’ється n частинних циліндра, об’єм кожного з яких наближено обчислюється за формулою $\Delta V_i \approx S(x_i)\Delta x_i$. Тоді об’єм V тіла наближено обчислюється $V\approx\sum_{i-1}^{n} S(x_i)\Delta x_i$ або $V=\lim_{\max_i \Delta x_i\to 0}\sum_{i-1}^{n} S(x_i)\Delta x=\int_a^b S(x)dx$.

Отже, $$V=\int_a^b S(x)dx .$$

2) Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції $y=f(x)$, $a\le x\le b$. Якщо цю трапецію обертати навколо осі OX, то утвориться просторова фігура, яка називається тілом обертання (мал. 6).

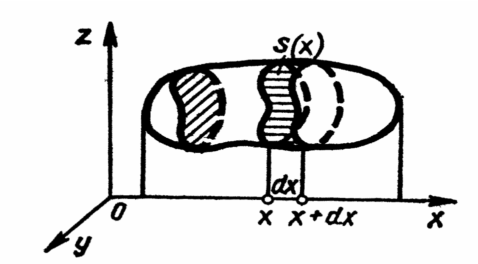


Рис.5

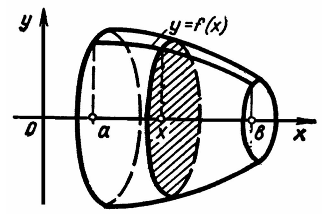


Рис.6

Так як площа поперечного перерізу(площа круга) $S(x)=\pi y^2=\pi(f(x))^2$, то за формулою $V=\int_a^b S(x)dx$ об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі OX, можна обчислити за формулою:

$$V_{ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x=\varphi(y)\geq 0$ і прямими $y=c$, $y=d$, $x=0$ то об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі OY, знаходять за формулою:

$$V_{oy}=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

Приклад 4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням параболи $y=x^2$ на проміжку $1\leq x\leq 2$ навколо осі OX, і осі OY ($1\leq y\leq 4$).

Розв'язання. За формулами маємо:

$$V_{ox}=\pi\int_1^2 x^4dx=\pi\frac{x^5}{5}\bigg|_1^2=\pi\left(\frac{2^5}{5}-\frac{1^5}{5}\right)=\frac{31\pi}{5},\ V_{oy}=\pi\int_1^4 ydy=\pi\frac{y^2}{2}\bigg|_1^4=\pi\left(\frac{4^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)=\frac{15\pi}{2}.$$

Запитання до самоконтролю і приклади.

1. Обчислення площ плоских фігур в прямокутних координатах.
2. Параметричне задання кривої.
3. Довжина дуги кривої в прямокутній системі координат.
4. Довжина дуги кривої, заданої параметрично.
5. Обчислення об'ємів тіл.

Приклад 1. Знайти площу фігури, обмеженої:

1) прямою $y=x$ і параболою $y=2-x^2$;

2) гіперболою $y=\frac{1}{x}$ і прямими ;

3) прямою $x-y+1=0$ і параболою $2x^2+y-2=0$;

4) прямою $x-y=1$ і параболою $y^2=2x+1$;

5) колом $x^2+y^2=8$ і параболою $y=\frac{1}{2}x^2$.

Відповідь. 1) $\frac{9}{2}$; 2) $\ln 2$; 3) $\frac{9}{8}$; 4) $\frac{16}{3}$; 5) $S_1 = \frac{4}{3} + 2\pi$, $S_2 = 6\pi - \frac{4}{3}$.

Приклад 2.Знайти площу фігури, обмеженої віссю OX і однією аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Відповідь. $3\pi a^2$.

Приклад 3. Знайти довжину дуги кривої:

1) $\ln x$ (від $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$);

2) $y^2 = (x+1)^3$, яку відтинає пряма $x = 4$;

3) $y = \frac{x^2}{2}$ від точки $O(0,0)$ до точки $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Відповідь. 1) $3\pi a^2$; 2) $24\frac{22}{27}$; 3) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$.

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, що утворюється від обертання навколо осі OX криволінійної трапеції, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ для $x \in [0, \pi]$.

Відповідь. $\frac{\pi^2}{2}$.

Приклад 5. Обчислити об'єм тіла обертання, утвореного при обертанні навколо осі OY фігури, обмеженою лінією $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Відповідь. $2\pi^2$.

ЛЕКЦІЯ 25

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Загальні поняття та означення.
Задача Коші.
Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

При дослідженні різноманітних процесів та явищ, що містять елементи руху, часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні шуканих функцій. Такі рівняння називають диференціальними. Диференціальне рівняння називається звичайним, якщо невідома функція є функцією однієї змінної, а якщо залежить від кількох аргументів, то диференціальне рівняння називають рівнянням в частинних похідних.

Далі будемо розглядати тільки звичайні диференціальні рівняння.

25.1 Загальні поняття та означення

Означення. Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

яке пов'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y'.

Порядок диференціального рівняння визначає найвища похідна, яка входить у рівняння.

Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно y', то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Рівняння (2) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \text{або} \qquad -f(x, y)dx + dy = 0.$$

Помножимо останнє рівняння на деяку функцію $Q(x, y) \neq 0$, тоді отримаємо рівняння першого порядку, записане в диференціальній формі:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{3}$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – відомі функції.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння (2) на деякому інтервалі $(a; b)$ називається диференційовна на цьому інтервалі функція

$y=\varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (2) обертає його в тотожність по x на $(a;b)$, тобто

$$\forall x\in(a;b)\colon\ \varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x)).$$

Процес відшукання розв'язку диференціального рівняння називається його інтегруванням, а графічне зображення розв'язку диференціального рівняння — інтегральною кривою.

Інтегрування диференціального рівняння в загальному випадку приводить до нескінченної множини розв'язків (вони відрізняються один від одного на сталу величину).

25.2 Задача Коші

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (2) має розв'язок, дає наступна теорема Коші.

Терема 1 (про існування і єдність розв'язку). Нехай функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $f_y^{'}(x,y)$ визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0;y_0)\in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y=\varphi(x)$ рівняння (2), який задовольняє умову

$$y=y_0 \ \text{ при } \ x=x_0, \ \text{ тобто } \ \varphi(x_0)=y_0. \tag{4}$$

Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (2). Геометричний зміст теореми полягає в тому, що при виконанні її умов існує єдина інтегральна крива диференціального рівняння, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$.

Умову (4), згідно з якою розв'язок $y=\varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0, називають початковою умовою розв'язку і записують:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \ \text{ або } \ y(x_0)=y_0. \tag{5}$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (2), який задовольняє початкову умову (5), називається задачею Коші.

Нехай права частина диференціального рівняння (2) задовольняє в області G умови теореми Коші.

Означення. Функція $y=\varphi(x,C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C, називається загальним розв'язком рівняння (2) в області G, якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $\varphi(x,C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значення сталої C з деякої множини;
2) для довільної точки $(x_0;y_0)\in G$ можна знайти таке значення $C=C_0$, що функція $y=\varphi(x,C_0)$ задовольняє початкову умову:

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0.$$

Означення. Частинним розв'язком рівняння (2) називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають загальним інтегралом диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ у цьому випадку називають частинним інтегралом рівняння.

Геометрично функцію $y = \varphi(x, c)$ можна зобразити множиною кривих на площині Oxy. Ці криві, як вище було зазначено, називаються інтегральними кривими диференціального рівняння. З цієї множини можна виділити криву $y = \varphi(x, c_0)$, яка проходить через наперед задану точку $M_0(x_0, y_0)$, тобто задовольняє заданій початковій умові $y(x_0) = y_0$.

Не існує єдиного універсального методу, за допомогою якого можна розв'язати диференціальні рівняння першого порядку. Існує певний клас рівнянь, які можна розв'язати (проінтегрувати). Розглянемо такі рівняння.

25.3 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Рівняння вигляду

$$y' = f(x)\varphi(y), \tag{6}$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Права частина рівняння (6) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (6), потрібно відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\dfrac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (6) на $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx, тоді рівняння (6) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx. \tag{7}$$

Оскільки рівняння (7) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Диференціальне рівняння (6) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0. \tag{8}$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)f_2(x)$. Отримаємо:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C\,.$$

Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (6) на $\varphi(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $\varphi(y_0)=0$, то стала $y=y_0$ є розв'язком рівняння (6), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $\varphi_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (8).

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x+xy^2)dx-(y+yx^2)dy=0.$$

Розв'язання. Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$x(1+y^2)dx-y(1+x^2)dy=0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на $(1+y^2)(1+x^2)\neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{y}{1+y^2}dy=0$$

або

$$\frac{2x\,dx}{1+x^2}=\frac{2y\,dy}{1+y^2}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо

$$\ln(1+x^2)=\ln(1+y^2)+\ln|C|,\quad C\neq 0.$$

Потенціюючи, дістанемо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2}=C,\quad C\neq 0.$$

Приклад. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'\cos^2 x\ln y=y$, який задовольняє початковій умові $y(\pi)=1$.

Розв'язання. По алгоритму відокремлення змінних маємо рівняння з відокремленими змінними $\dfrac{\ln ydy}{y}=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Інтегруємо його: $\int\dfrac{\ln ydy}{y}=\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}$,

$\int\ln yd(\ln y)=\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}$, $\dfrac{1}{2}\ln^2 y=tgx+c$. Останній вираз є загальним інтегралом.

Підставимо в $\dfrac{1}{2}\ln^2 y=tgx+c$ початкові умови $y=1$, $x=\pi$ і знайдемо значення c: $\dfrac{1}{2}\ln^2 1=tg\pi+c$, $0=0+c, c=0.$ Тобто, шуканий частинний розв'язок має вигляд: $\ln^2 y = 2tgx$ і називається частинним інтегралом диференціального рівняння.

Приклад. Матеріальна точка масою m сповільнює свій рух під дією сили опору середовища, пропорційної квадрату швидкості V матеріальної точки. Знайти залежність швидкості від часу, тобто $V = V(t)$, де $t -$час. Знайти також швидкість точки через 4 с після початку сповільнення, якщо $V(0) = 100$ м/с, а $V(1) = 50$ м/с.

Розв'язання. Для знаходження $V(t)$скористаємося другим законом Ньютона (основним законом механіки): $m \cdot a = \mathrm{F}$, де a – прискорення матеріальної точки, яке обчислюється $a = V'(t)$, а F – результуюча сила, що діє на точку в процесі руху. В даному випадку $\mathrm{F} = -kV^2, k > 0$ – коефіцієнт пропорційності (знак мінус указує на те, що швидкість точки зменшується). Отже, маємо $m \cdot V'(t) = -kV^2(t)$ або $V'(t) = -\frac{k}{m}V^2(t)$. Останній вираз є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Знайдемо його розв'язок. Маємо: $\frac{dV}{dt} = -\frac{k}{m}V^2(t)$, $\frac{dV}{V^2} = -\frac{k}{m}dt$, $\int \frac{dV}{V^2} = -\int \frac{k}{m}dt$, $-\frac{1}{V} = -\frac{k}{m}t - c$,

$V = \frac{1}{\frac{k}{m}t + c}$ – загальний розв'язок.

Знайдемо значення $\frac{k}{m}$ і c використовуючи задані умови. Для цього підставимо в загальний розв'язок $t = 0$ і $V = 100$, маємо $100 = \frac{1}{\mathrm{c}}$, або $\mathrm{c} = \frac{1}{100}$.

Далі підставимо $t = 1$ і $V = 50$. Отже: $50 = \frac{1}{\frac{k}{m} + \frac{1}{100}}$, $\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} = \frac{1}{100}$.

Підставимо знайдені значення $\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}$ і c в загальний розв'язок і знайдемо швидкість точки, яка має вигляд $V = \frac{1}{\frac{1}{100}x + \frac{1}{100}}$, $V = \frac{100}{t+1}$. Отже $V(4) = 20$ м/с.

Приклад. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(3;1)$ знаючи, що відрізок будь-якої дотичної до неї, розміщений між осями координат, ділиться в точці дотику пополам.

Розв'язання. Нехай $M(x; y)$ — довільна точки кривої, рівняння якої має вигляд $y = f(x)$. Для визначеності припустимо, що крива розташована в першій чверті (рис. 1).

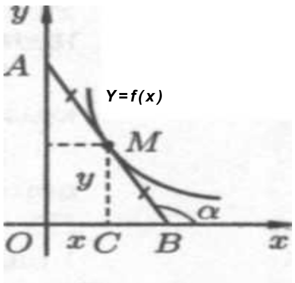


Рис. 1.

Для складання диференціального рівняння скористаємося геометричним змістом першої похідної. Пряма AB – дотична до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x;y)$, а α є кутом між дотичною і додатнім напрямком осі Ox, тоді $y'(x) = tg\alpha$. Із ΔMBC напишемо $tg\angle MBC = \frac{MC}{BC}$ але $tg\angle MBC = tg(180° - \alpha) = -tg\alpha$, $MC = y$. Далі, умовою задачі $AM = BM$, тоді із ΔOAB випливає, що $OC = BC$. Отже $BC = x$. Тобто, можемо записати $-tg\alpha = \frac{y}{x}$ або $y' = -\frac{y}{x}$.

Маємо диференціальне рівняння $y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$, $\ln y = -\ln x + \ln c$, $y = \frac{c}{x}$ – загальний розв'язок. Крива $y = \frac{c}{x}$ проходить через задану точку $M_0(3;1)$, тому підставимо в загальний розв'язок $y = 1$ і $x = 3$, маємо $c = 3$.

Отже, через точку M_0 проходить гіпербола, рівняння якої має вигляд $y = \frac{3}{x}$.

Запитання для самоконтролю та приклади

1. Що називається диференціальним рівнянням першого порядку?
2. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
3. Сформулювати теорему Коші про існування та єдиність розв'язку рівняння першого порядку.
4. Дати означення загального та частинного розв'язків диференціального рівняння першого порядку.
5. Дати означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними. Як воно розв'язується?

Приклад. Перевірити, що дана функция є розв'язком диференціального рівняння:

а) $y=\sqrt{x},\ 2yy'=1$; *б*) $\ln x \ln y = c,\ y\ln y dy + x\ln x dy = 0$; *в*) $y=ce^{-2x}$, $y'+2y=0$; *г*) $y=c_1x+c_2x^2$, $x^2y''-2xy'+2y=0$.

Приклад. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння :

а) $y'+2y=0$; *б*) $y'\cos^2 x = -\sin^2 y$; *в*) $\sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right)y' = y$;

г) $x(1-y)y' = y(1+x)$; *д*) $yy'-x=1$; *е*) $e^y y' + e^x = 0$.

Відповідь. *а*) $y=e^{-2x}+c$; *б*) $ctgy = tgx + c$; *в*) $\ln y + 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x}+c$;

г) $\ln xy = y - x + c$; *д*) $y^2 = 2x + x^2 + 2c$; *е*) $e^y = -e^x + c$.

Приклад. Розв’язати рівняння: $\left(y^2 - xy^2\right)dx + \left(x^2 + yx^2\right)dy = 0.$

Відповідь. $\dfrac{x+y}{xy} + \ln\dfrac{x}{y} = C.$

Приклад. Розв’язати задачу Коші:

а) $y'ctgx = -y,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$; *б*) $y^2 + x^2y' = 0$, $y(-1)=1$;

в) $2\left(1+e^x\right)yy' = e^x$, $y(0)=0$.

Відповідь. *а*) $y=-2\cos x$; *б*) $x+y=0$; *в*) $1+e^x = 2e^{y^2}$.

ЛЕКЦІЯ 26

ОДНОРІДНІ ТА ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Однорідні диференціальні рівняння.
Лінійні диференціальні рівняння.
Рівняння Бернуллі.

26.1 Однорідні диференціальні рівняння

Означення. Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією n-го виміру відносно змінних x та y, якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Наприклад, функція $f(x, y) = x^2 - 5xy$ - однорідна функція другого виміру, оскільки $f(tx, ty) = (tx)^2 - 5(tx)(ty) = t^2(x^2 - 5xy) = t^2 f(x, y)$.

Означення. Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

називається однорідним, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Дамо ще інше означення однорідного рівняння. Нехай функція $f(x, y)$ є однорідною нульового виміру, тобто $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$. Покладемо $\lambda = \dfrac{1}{x}$, тоді $f(x, y) = f\left(\dfrac{x}{x}, \dfrac{y}{x}\right) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Означення. Рівняння $y' = f(x, y)$ називається однорідним, якщо $f(x, y)$ можна представити як функцію відношення $\dfrac{y}{x}$, тобто $f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Покажемо, що однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y = ux, \tag{2}$$

де $u = u(x)$ — невідома функція.

Якщо функція (2) є розв'язком диференціального рівняння (1) і

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}, \text{ то } u + x\frac{du}{dx} = f(x, ux). \tag{3}$$

За умовою $f(x,y)$ — однорідна функція нульового виміру, тобто $f(tx,ty)\equiv f(x,y)$. Поклавши в цій тотожності $y=ux$ і $t=\dfrac{1}{x}$, дістанемо $f(x,ux)=f(1,u)$, тому рівняння (3) набирає вигляду

$$u+x\frac{du}{dx}=f(1,u). \qquad (4)$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо $f(1,u)-u\neq 0$, то, відокремлюючи змінні, дістанемо рівняння

$$\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши, знайдемо

$$\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln|x|+C.$$

Підставимо після інтегрування замість u відношення $\dfrac{y}{x}$ і дістанемо інтеграл рівняння (1). Якщо $f(1,u)-u=0$, то рівняння (4) запишеться у вигляді

$$x\frac{du}{dx}=0.$$

У цьому випадку рівняння (1) можуть мати ще розв'язки $y=Cx \quad (x\neq 0)$ та $x=0 \quad (y\neq 0)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $2xyy'=x^2+y^2$.

Розв'язання. Розв'яжемо це рівняння відносно похідної y', одержимо однорідне рівняння $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$. Чисельник і знаменник правої частини поділимо на x^2. Маємо $y'=\dfrac{1+\left(y/x\right)^2}{2\,y/x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, тобто дане рівняння є однорідним. Далі зробимо підстановку $y=u\cdot x$ (або $u=\dfrac{y}{x}$) і $y'=u'\cdot x+u$, маємо $u'x+u=\dfrac{1+u^2}{2u}$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1+u^2}{2u}-u$, $\dfrac{udu}{1-u^2}=\dfrac{dx}{2x}$. Інтегруємо рівняння

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-u^2\right)}{1-u^2}=\int\frac{dx}{2x},$$

$$\ln\left(1-u^2\right)=-\ln x+\ln c,$$
$$\ln\left(x\left(1-u^2\right)\right)=\ln c,\ \ x\left(1-u^2\right)=c.$$

Далі виключимо проміжну функцію $u=\dfrac{y}{x}$, отже $y^2=x^2-cx$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад. Розв’язати диференціальне рівняння $y-xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$.

Розв’язання. Зробимо в рівнянні $y'=\dfrac{y}{x}\left(1-\ln\dfrac{y}{x}\right)$ заміну змінних: $\dfrac{y}{x}=u$, $y'=u'\cdot x+u$ і отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними $u'x+u=u(1-\ln u)$, $u'x=-u\ln u$. Виконаємо відокремлення змінних $\dfrac{du}{u\ln u}=-\dfrac{dx}{x}$, $\displaystyle\int\frac{d(\ln u)}{\ln u}=-\int\frac{dx}{x}$, $\ln\ln u=-\ln x+\ln c$, $\ln\ln u=\ln\dfrac{c}{x}$, $\ln u=\dfrac{c}{x}$, $u=e^{\frac{c}{x}}$. Враховуючи, що $u=\dfrac{y}{x}$, маємо $y=xe^{\frac{c}{x}}$ – загальний розв’язок рівняння.

Приклад. Розв’язати задачу Коші $(x+y)y'=y$, якщо $y(-1)=1$.

Розв’язання. Поклавши $\dfrac{y}{x}=u$, $y'=u'\cdot x+u$, маємо рівняння $u'\cdot x+u=\dfrac{u}{1+u}$, $u'\cdot x=\dfrac{u-u-u^2}{1+u}$, $u'\cdot x=-\dfrac{u^2}{1+u}$. Розділимо змінні і інтегруємо, маємо $\dfrac{1+u}{u^2}du=-\dfrac{dx}{x}$, $-\dfrac{1}{u}+\ln u=-\ln x+\ln c$, $\dfrac{1}{u}=\ln\dfrac{ux}{c}$. Повертаємось до змінної y і знаходимо загальний інтеграл $x=y\ln\dfrac{y}{c}$. Підставимо $y=1,\ x=-1$ в загальний інтеграл і знайдемо значення константи c: $-1=\ln\dfrac{1}{c}$, $c=e$. Отже, $x=y\ln\dfrac{y}{e}$ – частинний інтеграл рівняння.

Розглянемо тепер рівняння, які можна звести до однорідних. Нехай маємо рівняння

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{5}$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ - задані сталі.

Якщо $\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0$, то підстановкою $z=a_1x+b_1y+c_1$ рівняння (5) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо $\Delta \neq 0$, то можна зробити таку заміну змінних $x = u + \alpha, \quad y = v + \beta$, що в лінійних функціях зникнуть вільні члени, тобто виконуватимуться нерівності $a_i x + b_i y + c_i = a_i u + b_i v$, $i = 1, 2.$

Після такої заміни рівняння буде однорідним.

26.2 Лінійні диференціальні рівняння

Рівняння називається лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції і її похідної, тобто шукана функція і її похідна входять у рівняння в першій степені.

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння виду

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{6}$$

де $p(x)$ і $f(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Одним із способів розв'язання лінійних рівнянь є метод знаходження розв'язку рівняння (6) у вигляді добутку двох функцій, тобто $y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$, $y' = u'v + v'u$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ невідомі функції, причому одна з цих функцій довільна (але не рівна тотожньо нулю).

Тоді рівняння (6) можна переписати у вигляді

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x).$$

На функцію $v = v(x)$ накладають таку умову, щоб вираз

$$v' + p(x)v = 0. \tag{7}$$

Замість рівняння (6) одержуємо рівняння

$$u'v = f(x). \tag{8}$$

Рівняння (7) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v; \quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx; \quad \ln|x| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|; \qquad v = C_1 e^{-\int p(x)dx}, \; C_1 \neq 0.$$

Візьмемо за v який-небудь частинний розв'язок рівняння (7), наприклад

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \tag{9}$$

Знаючи функцію $v = v(x)$, з рівняння (8) знаходимо функцію u:

$$du = f(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

$$u = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C. \tag{10}$$

Підставляючи функції (9), (10) в рівняння $y = uv$, знаходимо загальний розв'язок рівняння (6)

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \right).$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y' + ytgx = \cos x$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним, так як $p(x) = tgx$, а $f(x) = \cos x$. Зробимо підстановку $y = uv$ і $y' = u'v + uv'$, тоді $u'v + uv' + uvtgx = \cos x$, $u'v + u(v' + vtgx) = \cos x$. Маємо систему $\begin{cases} v' + vtgx = 0 \\ u'v = \cos x \end{cases}$. Знайдемо розв'язок рівняння $v' + vtgx = 0$. $\frac{dv}{dx} = -vtgx$, $\frac{dv}{v} = -tgx \cdot dx$, $\int \frac{dv}{v} = -\int tgx \cdot dx$, $\ln v = \ln \cos x$, $v = \cos x$. Підставимо знайдену функцію в друге рівняння системи і знайдемо функцію u. Маємо $u' \cos x = \cos x$, $du = dx$, $u = x + c$. Далі запишемо загальний розв'язок $y = uv = (x + c)\cos x$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $x^2 dy = (3 + 2xy)dx$.

Розв'язання. Зробимо відповідні перетворення, щоб переконатись, що дане рівняння є лінійним: $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3$, $y' - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}$. Маємо лінійне рівняння, де $p(x) = -\frac{2}{x}$, $f(x) = \frac{3}{x^2}$. Замінимо y по формулі $y = uv$, маємо $y' = u'v + uv'$, $u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = \frac{3}{x^2}$, $u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = \frac{3}{x^2}$. Запишемо систему $\begin{cases} v' - \frac{2}{x}v = 0 \\ u'v = \frac{3}{x^2} \end{cases}$.

Далі знайдемо її розв'язок: $v' - \frac{2}{x}v = 0$, $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v$, $\frac{dv}{v} = \frac{2}{x}dx$, $\ln v = 2\ln x$, $v = x^2$.

Далі знайдемо u: $u'x^2 = \frac{3}{x^2}$, $du = \frac{3}{x^4}dx$, $u = -\frac{1}{x^3} + c$.

Отже, загальний розв'язок має вигляд $y = x^2\left(-\frac{1}{x^3} + c\right)$.

26.3 Рівняння Бернуллі

Означення. Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in R, \ \alpha \neq 0;1. \tag{11}$$

Очевидно, при $\alpha = 0$ це лінійне рівняння, а при $\alpha = 1$ - з відокремлюваними змінними. Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного підстановкою $u = y^{1-\alpha}$,

$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Поділимо рівняння Бернуллі на y^{α}, а потім помножимо на $1-\alpha$, отримаємо $(1-\alpha)y'y^{-\alpha} + p(x)(1-\alpha)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x)$. Далі використаємо підстановки, отже $u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)$. Отримане рівняння є лінійним відносно u. Проте на практиці розв'язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи до лінійного.

Запитання для самоконтролю та приклади

1. Означення однорідної функції n - го виміру.
2. Дати означення однорідного диференціального рівняння першого порядку
3. Дати означення лінійного диференціального рівняння першого порядку.
4. Викласти метод інтегрування лінійного диференціального рівняння першого порядку.
5. Дати означення рівняння Бернуллі.

Приклади. Розв'язати диференціальні рівняння:

а) $(x^2 \ln y - x)y' - y = 0;$ б) $(y-x)dx + (x+y)dy = 0;$

в) $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y = x^3$; г) $(x + 2y)dx - xdy = 0$; д) $xyy' = x^2 + y^2$;

е) $y' + xy = x^3y^3$; є) $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$; ж) $x^2y' = 2xy - x^2$; з) $xy' = xtg\dfrac{y}{x} + y$.

Відповіді: а) $x = \dfrac{1}{1 + \ln y - Cy}$; б) $y^2 + 2xy - x^2 = C;$

в) $y = x + Cx\sqrt{1-x^2}$; г) $y = (cx-1)x$; д) $y^2 = 2x^2 \ln cx$;

е) $y^2\left(x^2 + 1 + Ce^{x^2}\right) = 1$; є) $y = xe^{cx-1}$; ж) $y = cx^2 + x$; з) $\sin\dfrac{y}{x} = cx$.

Приклад. Розв'язати задачу Коші:

а) $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$; б) $y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = 2.$

Відповідь. а) $\sin\dfrac{y}{x} = x$; б) $y = e^{x^2} + 1$.

ЛЕКЦІЯ № 27

ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Основні поняття
Лінійні однорідні ДР другого порядку (ЛОДР)
ЛОДР другого порядку з сталими коефіцієнтами

27.1. **Основні поняття**

Означення. Диференціальні рівняння порядку вище першого називаються ДР вищих порядків.

Так, наприклад, ДР другого порядку в загальному випадку записується у вигляді:

$$F(x; y; y'; y'') = 0 .$$

Якщо рівняння $F(x; y; y'; y'') = 0$ можна розв'язати відносно y'' то його записують у вигляді $y'' = f(x; y; y')$ і називають диференціальним рівнянням розв'язаним відносно старшої похідної.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння $y'' = f(x; y; y')$ називається функція $y = \varphi(x)$, при підстановці якої в рівняння воно перетворюється в тотожність. Загальним розв'язком ДР називається функція $y = \varphi(x; c_1; c_2)$, яка задовольняє умовам:

1. Функція $y = \varphi(x; c_1; c_2)$ є розв'язком ДР для кожного фіксованого значення довільних сталих c_1 і c_2.
2. Які б не були початкові умови $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ існують єдині значення $c_1 = c_1^0$ і $c_2 = c_2^0$ такі, що функція $y = \varphi(x; c_1^0; c_2^0)$ є розв'язком ДР і задовольняє початковим умовам.

Будь який розв'язок $y = \varphi(x; c_1^0; c_2^0)$ отриманий із загального розв'язку при конкретних значеннях $c_1 = c_1^0$ і $c_2 = c_2^0$ називають частинним розв'язком.

Задача знаходження розв'язку ДР $y'' = f(x; y; y')$, що задовольняє заданим початковим умовам $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ називається задачею Каші.

27.2. **Лінійні однорідні ДУ другого порядку**

Означення. Рівняння виду $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) другого порядку.

Теорема. Якщо функції $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ деякі два розв'язки ЛОДР, то розв'язком цього рівняння є також і функція
$y = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$, де c_1 і c_2 – довільні сталі.

Доведення. Так як $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ розв'язки ЛОДР, то $y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$ і $y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0$. Підставимо функцію

$y=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)$ і її похідні $y'=c_1\cdot y_1'(x)+c_2\cdot y_2'(x)$, $y''=c_1\cdot y_1''(x)+c_2\cdot y_2''(x)$ в ДР, одержуємо:

$$c_1\cdot y_1''(x)+c_2\cdot y_2''(x)+a_1(x)(c_1\cdot y_1'(x)+c_2\cdot y_2'(x))+a_2(x)(c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x))=$$
$$=c_1\left(y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)\right)+c_2\left(y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)\right)=$$
$$=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0.$$

Отже ,функція $y=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)$ є розв'язком рівняння $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$.

В подальшому дамо відповідь на питання: чи може функція $y=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)$ бути загальним розв'язком рівняння $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$?

Для відповіді на питання введемо поняття лінійної залежності й лінійної незалежності функцій.

Означення. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні, якщо вони пропорційні, тобто $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=\lambda$ або $y_1(x)=\lambda\cdot y_2(x)$, $\lambda-\text{const}$.

Означення. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні, якщо $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=\varphi(x)$ або $y_1(x)=\varphi(x)\cdot y_2(x)$.

Приклад 1. Показати, що функції : а) $y_1(x)=5e^{3x}$ і $y_2(x)=e^{3x}$ лінійно залежні;

б) $y_1(x)=x^3+4x^2+x$ і $y_2(x)=x^2+4x\ +1$ лінійно незалежні.

Розв'язання. а) Розглянемо $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=\dfrac{5e^{3x}}{e^{3x}}=5=\lambda-$ стала. Отже функції лінійно залежні;

б) $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=\dfrac{x^3+4x^2+x}{x^2+4x+1}=\dfrac{x(x^2+4x+1)}{x^2+4x+1}=x=\varphi(x)$. Отже функції лінійно незалежні.

Означення. Визначник виду $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$ називають визначником Вронського або вронськіаном (Ю. Вронський– польський математик).

Мають місце наступні теореми.

Теорема. Якщо дифференційовні функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні на $(a;b)$, то визначник Вронського на цьому інтервалі тотожно дорівнює нулю.

Доведення. Так як функції лінійно залежні, тобто $y_1(x)=\lambda\cdot y_2(x)$ то визначник Вронського набуває вигляду:

$$W(x)=\begin{vmatrix} \lambda\cdot y_2(x) & y_2(x) \\ \lambda\cdot y_2'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=\lambda\cdot y_2(x)\cdot y_2'(x)-\lambda\cdot y_2(x)\cdot y_2'(x)=0.$$

Теорема. Якщо дифференційовні функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні на $(a;b)$, то визначник Вронського на цьому інтервалі ні при яких значеннях x не дорівнює нулю.

Доведення провести самостійно.

Теорема (структура загального розв'язку ЛОДР другого порядку).

Якщо два частинні розв'язки ЛОДР $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні на $(a;b)$, то загальним розв'язком цього рівняння є функція $y(x)=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)$, де c_1 і c_2 –довільні сталі.

Доведення. Було доведено, що функція $y(x)=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)$ є розв'язком ЛОДР. Залишається довести, що цей розв'язок є загальним, тобто, що з нього можна виділити частинний розв'язок, який задовольняє заданим початковим умовам $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'$.

Підставивши початкові умови $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$ у розв'язок $y(x)=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)$, одержимо систему рівнянь

$\begin{cases} y_0=c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0) \\ y_0'=c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0) \end{cases}$. Тут c_1 і c_2 невідомі величини. Знайдемо розв'язок системи.

$\Delta=W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}\neq 0$, так як $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні за умовою теореми; $\Delta_{c_1}=\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$, $\Delta_{c_2}=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}$.

Отже $c_1=c_1^0=\dfrac{\Delta_{c_1}}{\Delta}$, $c_2=c_2^0=\dfrac{\Delta_{c_2}}{\Delta}$.

Розв'язок $y(x)=c_1^0\cdot y_1(x)+c_2^0\cdot y_2(x)$ є частинним розв'язком ЛОДР, яке задовольняє заданим початковим умовам. Теорема доведена.

27.3. ЛОДР другого порядку з сталими коефіцієнтами

Означення. Рівняння виду $y''+p\cdot y'+q\cdot y=0$, де p і q –сталі, називають ЛОДР із сталими коефіцієнтами.

Для знаходження загального розв'язку $y(x)=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)$ рівняння необхідно знайти два його лінійно незалежні частинні розв'язки.

Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $y=e^{kx}$, де k – невідоме число. За припущенням, функція $y=e^{kx}$ є розв'язком, тому задовольняє однорідне рівняння. Підставимо $y=e^{kx}$, $y'=k\cdot e^{kx}$ і $y''=k^2\cdot e^{kx}$ в рівняння, маємо $k^2\cdot e^{kx}+p\cdot k\cdot e^{kx}+q\cdot e^{kx}=0$, $e^{kx}(k^2+p\cdot k+q)=0$ або $k^2+p\cdot k+q=0$ $(e^{kx}\neq 0)$.

Означення. Рівняння виду $k^2+p\cdot k+q=0$ називають характеристичним рівнянням однорідного ДР.

Для його складання необхідно в рівнянні $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ замінити y'' на k^2, y' на k, а y на 1.

При розв'язуванні характеристичного рівняння можливі три випадки:

Випадок 1. Дискримінант $D = \frac{p^2}{4} - q > 0$, тобто корені $k_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D}$ і $k_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D}$ дійсні і різні $(k_1 \neq k_2)$.

Частинними розв'язками однорідного рівняння є функції $y = e^{k_1 x}$ і $y = e^{k_2 x}$, які є лінійно незалежними, так як їх вронськіан $W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} k_2 e^{k_2 x} - e^{k_2 x} k_1 e^{k_1 x} = k_2 e^{(k_1 + k_2)x} - k_1 e^{(k_1 + k_2)x} = e^{(k_1 + k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$.

Випадок 2. Дискримінант $D = \frac{p^2}{4} - q = 0$, тобто корені $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ дійсні і рівні. Маємо один частинний розв'язок: $y_1 = e^{k_1 x}$. Другим буде функція $y_2 = x e^{k_1 x}$. Покажемо, що це так:

1) Функція $y_2 = x e^{k_1 x}$ є розв'язком однорідного рівняння. Підставимо $y_2 = x e^{k_1 x}$, $y_2' = e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x}$ і $y_2'' = 2k_1 e^{k_1 x} + x k_1^2 e^{k_1 x}$ в однорідне рівняння, маємо $2k_1 e^{k_1 x} + x k_1^2 e^{k_1 x} + p\left(e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x}\right) + q x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}\left(2k_1 + x k_1^2 + p + p x k_1 + q x\right) =$
$= e^{k_1 x}\left(x\left(k_1^2 + p k_1 + q\right) + \left(2k_1 + p\right)\right) = 0$, так як $k_1^2 + p k_1 + q = 0$ (k_1– корінь) і $2k_1 + p = 0$ ($k_1 = -\frac{p}{2}$). Тому $y_2''(x) + p \cdot y_2'(x) + q \cdot y_2(x) = 0$, тобто функція $y_2 = x e^{k_1 x}$ є розв'язком ДР.

2) Функції $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = x e^{k_2 x}$, які є лінійно незалежними, так як їх вронськіан $W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & x e^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x} \end{vmatrix} = e^{k_1^2 x} \neq 0$.

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(c_1 + c_2 x).$$

Випадок 3. Дискримінант $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$, тобто корені $k_1 = \alpha + \beta i$ і $k_2 = \alpha - \beta i$ комплексні , $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0$. В цьому випадку приймемо без доведення , що загальний розв'язок однорідного ДР має вигляд $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' - 12y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 4k - 12 = 0$.

Знайдемо його розв'язок : $D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{16}{4} - (-12) = 4 + 12 = 16 > 0$. Маємо *випадок* 1.

$k_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} = -\frac{4}{2} - 4 = -6$, $k_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} = -\frac{4}{2} + 4 = 2$.

Отже, загальний розв’язок рівняння має вигляд $y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{2x}$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 6k + 9 = 0$.

Знайдемо його розв’язок : $D = \frac{36}{4} - 9 = 9 - 9 = 0$. Випадок 2.

$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} = -\frac{6}{2} = -3$.

Отже $y = e^{-3x}(c_1 + c_2 x)$.

Приклад 4. Розв’язати рівняння $y'' - 4y' + 8y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 8 = 0$.

Знайдемо його розв’язок : $D = \frac{16}{4} - 8 = 4 - 8 = -4 < 0$. Маємо випадок 3, корені комплексні: $\alpha = -\frac{p}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = \sqrt{8 - \frac{(-4)^2}{4}} = \sqrt{8-4} = 2$,

$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i = 2 \pm 2i$.

Отже, загальний розв’язок рівняння має вигляд $y = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

Приклад 5. Знайти частинний розв’язок рівняння $y'' - 8y' = 0$, який задовольняє заданим початковим умовам $y(0) = -1$, $y'(0) = 16$.

Розв’язання. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 8k = 0$. Його корені: $k_1 = 0$, $k_2 = 8$. Загальний розв’язок $y(x) = c_1 + c_2 e^{8x}$. Використовуючи початкові умови знайдемо значення c_1 і c_2. Для цього необхідно скласти систему рівнянь із невідомими c_1 і c_2. Перше рівняння системи є результат підстановки в загальний розв’язок $y(x) = c_1 + c_2 e^{8x}$ початкової умови $y(0) = -1$, тобто $x = 0$ і $y = -1$. Маємо $-1 = c_1 + c_2 e^{0x}$, $c_1 + c_2 = -1$. Друге рівняння системи є результат підстановки $x = 0$ і $y' = 16$ ($y'(0) = 16$) в похідну від загального розв’язку, як має вигляд: $y'(x) = 8c_2 e^{8x}$. Отже, $y'(0) = 8c_2 e^{8\cdot 0}$, $8c_2 = 16$. Маємо систему $\begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ 8c_2 = 16 \end{cases}$, розв’язок якої є $c_1 = -3$ і $c_2 = 2$. Частинний розв’язок має вигляд $y(x) = -3 + 2e^{8x}$.

Запитання до самоконтролю і приклади.

1) Означення ДР вищих порядків.
2) Поняття частинного і загального розв’язку.
3) Означення ЛОДР, його розв’язок.
4) Лінійно залежні і лінійно незалежні функції.
5) Визначник Вронського?
6) Теорема про структуру розв’язку ЛОДР.

7) ЛОДР із сталими коефіцієнтами і х розв’язування:

а) випадок 1;

б) випадок 2;

б) випадок 3.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок ДР:

1) $y'' + y' - 6y = 0$.
2) $y'' - 7y' + 10y = 0$.
3) $y'' + 6y' + 9y = 0$.
4) $y'' - 10y' + 25y = 0$.
5) $y - 4y' - 13y = 0$.
6) $y'' + 2y' + 5y = 0$.
7) $y'' - 16y = 0$.
8) $y'' - 9y = 0$.
9) $y'' + 25y = 0$.
10) $y'' + 64y = 0$.
11) $2y'' + 5y' = 0$.
12) $3y'' - 4y' = 0$.

Відповіді.

1) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$.
2) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}$.
3) $y = e^{-3x}(c_1 + c_2 x)$.
4) $y = e^{5x}(c_1 + c_2 x)$.
5) $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$.
6) $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.
7) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{4x}$.
8) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$.
9) $y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$.
10) $y = c_1 \cos 8x + c_2 \sin 8x$.
11) $y = c_1 + c_2 e^{-\frac{5}{2}x}$.
12) $y = c_1 + c_2 e^{\frac{4}{3}x}$.

Приклад 2. Знайти частинний розв’язок ДР:

1) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.

2) $y'' + 10y' + 25y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.

3) $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

4) $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

5) $y'' + 2y' = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$.

6) $y'' + 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Відповіді. 1) $y = e^{-x}(3\cos x + \sin x) + 2x^2 - x$. 2) $y = e^{-5x}(1 + 2x) + x - 2$.
3) $y = e^{5x}(1 + x)^2 - e^x$. 4) $y = e^{4x}(3x^2 - 2x + 1)$. 5) $y = -5 + 3e^{-2x} - \cos 4x + 2\sin 4x$.
6) $y = 4(e^{-x} - e^{-4x}) + \cos 3x - \sin 3x$.

ЛЕКЦІЯ 28
ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІЛЬНІ РІВНЯННЯ

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР)
ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального виду
Метод варіації довільних сталих

28.1. **Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР)**

Означення. Рівняння виду $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ називаються лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями (ЛНДР) другого порядку. Якщо $f(x) = 0$, то рівняння є однорідним $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$.

Теорема (структура загального розв'язку ЛНДР). Загальним розв'язком y неоднорідного рівняння є сума його довільного частинного розв'язку y^* і загального розв'язку $\overline{y} = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ відповідного однорідного рівняння, тобто $y = y^* + \overline{y}$.

Доведення теореми можна розбити на етапи:

1) Показати, що функція $y = y^* + \overline{y}$ є розв'язком рівняння. Це досягається підстановкою $y = y^* + \overline{y}$, $y' = \left(y^*\right)' + \left(\overline{y}\right)'$ і $y'' = \left(y^*\right)'' + \left(\overline{y}\right)''$ в рівняння.

2) Показати, що функція $y = y^* + \overline{y}$ є загальним розв'язком рівняння. Для цього треба довести, що із розв'язку $y(x) = y^*(x) + c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ можна виділити частинний розв'язок, який задовольняє заданим початковим умовам $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

Доведення провести самостійно.

28.2.**ЛНДР другого порядку з сталими коефіцієнтами із правою частиною спеціального виду**

Розглянемо ЛНДР другого порядку з сталими коефіцієнтами, тобто рівняння $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$, де p і q деякі числа.

Розв'язок рівняння будемо знаходити у вигляді $y = y^* + \overline{y}$, де y^* – частинний розв'язок неоднорідного, а $\overline{y}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння.

Для рівнянь із сталими коефіцієнтами існує метод знаходження y^*, якщо права частина $f(x)$ неоднорідного рівняння має так називаний «спеціальний вигляд»: $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$ або $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$, де $P_n(x)$ – відомий многочлен степеня n; a, b, α і β – задані числа.

Суть методу, названого методом невизначених коефіцієнтів, полягає в наступному:

по структурі (по вигляду) $f(x)$ правої частини рівняння записують частинний розв'язок y^*, в склад якого входять невизначені (невідомі) коефіцієнти. Для їх визначення частинний розв'язок підставляють у рівняння і із отриманої тотожності знаходять значення невідомих коефіцієнтів.

Зауваження. Перед знаходженням y^* необхідно побудувати $\overline{y}$, тобто потрібно знати корені характеристичного рівняння.

Випадок 1. Якщо права частина рівняння є $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, то частинний розв'язок y^* має вигляд $y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$.

Коефіцієнт r може приймати значення 0 або 1 або 2 в залежності від того, скільки раз α співпадає з коренем характеристичного рівняння, тобто:

а) якщо $\alpha \neq k_1$ і $\alpha \neq k_2$, то $r = 0$;

б) якщо $\alpha = k_1$ і $\alpha \neq k_2$ або $\alpha = k_2$ і $\alpha \neq k_1$ то $r = 1$;

в) якщо $\alpha = k_1 = k_2$, то $r = 2$.

$Q_n(x)$– многочлен степеня n, що і $P_n(x)$, але із невизначеними коефіцієнтами. Наприклад, якщо $f(x)$ містить $P_2(x)$, то $Q_2(x)$ має вигляд $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, де A, B і C – коефіцієнти, які необхідно визначити;
$P_1(x)$, то $Q_1(x) = Ax + B$; $P_0(x)$, то $Q_0(x) = A$ і т.д.

Зауваження. В многочлені $Q_n(x)$ представлені всі степені x починаючи з n на відміну із $P_n(x)$. Наприклад, нехай $P_2(x) = ax^2$ але $Q_2(x)$ має вигляд $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$,

Випадок 2. Якщо права частина рівняння має вигляд $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$, то частинний розв'язок y^* має вигляд $y^* = x^r e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, де A і B – невизначені коефіцієнти. Коефіцієнт r може приймати значення 0, якщо $\alpha \pm \beta i$ не є коренями характеристичного рівняння і $r=1$, якщо $\alpha \pm \beta i$– корінь характеристичного рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 3e^{2x}$.

Розв'язання. Розглянемо однорідне рівняння $y'' - 2y' + y = 0$ і знайдемо його загальний розв'язок $\overline{y}$. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$. Звідси $k_1 = k_2 = 1$ і $\overline{y} = e^x(c_1 + c_2 x)$. Знайдемо частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння. Права частина рівняння має вигляд $f(x) = 3e^{2x}$, який відповідає розглянутому *Випадок* 1
($f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x} \Rightarrow y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$).

Для запису y^* необхідно визначити значення r порівнюючи величину α із коренями характеристичного рівняння k_1 і k_2, і записати многочлен $Q_n(x)$ виходячи із $P_n(x)$.

Маємо $f(x) = 3e^{2x} = P_0(x)e^{2x}$, звідси $P_0(x) = 3$ (многочлен нульової степені), то і $Q_0(x)$ також многочлен нульової степені із невизначеними коефіцієнтами, тобто $Q_0(x) = A$, так як $\alpha = 2$ і $\alpha \neq k_1 = k_2 = 1$, то $r = 0$. Значить, при підстановці в $y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$ величин $r = 0$, $\alpha = 2$ і $Q_0(x) = A$ маємо $y^* = Ae^{2x}$.

Для знаходження невизначеного коефіцієнта А підставимо $y^* = Ae^{2x}$, $(y^*)' = 2Ae^{2x}$ і $(y^*)'' = 4Ae^{2x}$ в початкове рівняння, маємо $4Ae^{2x} - 2 \cdot 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = 3e^{2x}$, $Ae^{2x} = 3e^{2x}$, $A = 3$ (так як $e^{2x} \neq 0$). Отже $y^* = 3e^{2x}$.

Загальний розв'язок $y = y^* + \overline{y}$ неоднорідного рівняння має вигляд $y = 3e^{2x} + e^x(c_1 + c_2 x)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' = 9x$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо $\overline{y}$. Характеристичне рівняння однорідного рівняння $y'' + 3y' = 0$ має вигляд $k^2 + 3k = 0$, коренями якого є $k_1 = -3$ і $k_2 = 0$. Отже $\overline{y} = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{0x}$ або $\overline{y} = c_1 e^{-3x} + c_2$.

Далі запишемо y^*. Права части на рівняння $f(x) = 9x$, яку можна записати у вигляді $f(x) = 9x \cdot e^{0x}$, тобто $\alpha = 0$ і $9x = P_1(x)$. Так як $\alpha = 0$ і $\alpha = k_2$, ($\alpha \neq k_1$), то $r = 1$. Многочлен правої частини є $P_1(x) = 9x$, значить $Q_1(x) = Ax + B$. Отже $y^* = x(Ax + B)e^{0x} = Ax^2 + Bx$. Знайдемо $(y^*)' = (Ax^2 + Bx)' = 2Ax + B$, $(y^*)'' = (2Ax + B)' = 2A$ і підставимо $(y^*)'$ і $(y^*)''$ в початкове рівняння ,маємо $2A + 3(2Ax + B) = 9x$, $6Ax + 2A + 3B = 9x$.

В лівій частині останньої рівності многочлен $6Ax + 2A + 3B$, а в правій многочлен $9x + 0x^0$, які рівні між собою. Два многочлена можуть бути рівними тоді і тільки , коли рівні їхні коефіцієнти при однакових степенях x. Прирівнюючи ці коефіцієнти маємо систему рівнянь відносно *A* і *B*, тобто

$$\begin{array}{c|}x^1 \\ x^0\end{array}\begin{array}{|l}6A = 9 \\ 2A + 3B = 0\end{array}, \quad \begin{cases} 6A = 9 \\ 2A + 3B = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = \dfrac{3}{2} \\ B = -1 \end{cases}.$$

Отже $y^* = \frac{3}{2}x^2 - x$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = \frac{3}{2}x^2 - x + c_1 e^{-3x} + c_2$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

Розв'язання. Коренями характеристичного рівняння є $k_1 = 2$ і $k_2 = 3$. Значить, $\overline{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ – загальний розв'язок однорідного.

Частинний розв'язок неоднорідного будемо шукати у вигляді $y^* = x^r e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, так як права $f(x) = 13\sin 3x$ частина рівняння містить тригонометричні функції (*Випадок* 2.), яка може бути записаною у вигляді $f(x) = e^{0x}(0 \cdot \cos 3x + 13\sin 3x)$; тут $\alpha = 0$, $\beta = 3$.

Величина $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 3i$ не є коренем ($k_1 = 2$, $k_2 = 3$) характеристичного рівняння, тому $r = 0$. Далі запишемо $y^* = A\cos 3x + B\sin 3x$, і знайдемо $\left(y^*\right)' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$, $\left(y^*\right)'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$.

Підставимо y^*, $\left(y^*\right)'$ і $\left(y^*\right)''$ в початкове рівняння

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 5\left(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x\right) + 6\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) = 13\sin 3x$$

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 15A\sin 3x - 15B\cos 3x + 6A\cos 3x + 6B\sin 3x = 13\sin 3x,$$

$$\left(-3A - 15B\right)\cos 3x + \left(15A - 3B\right)\sin 3x = 13\sin 3x.$$

Остання рівність має місце, якщо рівні коефіцієнти при синусах і косинусах .

Прирівнюючи ці коефіцієнти одержимо систему рівнянь, тобто

$$\begin{array}{l|l} \sin 3x & 15A - 3B = 13 \\ \cos 3x & -3A - 15B = 0 \end{array}, \quad \begin{cases} 15A - 3B = 13 \\ -3A - 15B = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = \dfrac{5}{6} \\ B = -\dfrac{1}{6} \end{cases}.$$

Отже $y^* = \dfrac{5}{6}\cos 3x - \dfrac{1}{6}\sin 3x$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = \dfrac{5}{6}\cos 3x - \dfrac{1}{6}\sin 3x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

28.3. Метод варіації довільних сталих

Розглянемо ЛНДР $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$. Його загальним розв'язком є функція $y = y^* + \overline{y}$.

Будемо знаходити частинний розв'язок y^* виходячи із загального розв'язку $\overline{y} = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ однорідного рівняння методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

Суть метода в наступному: замінимо в функції $\overline{y} = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ константи c_1 і c_2 невідомими функціями $c_1(x)$ і $c_2(x)$ і підберемо їх так, щоб функція $y^* = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$ була розв'язком неоднорідного рівняння.

Накладемо на шукані функції $c_1(x)$ і $c_2(x)$ іще і умову $c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$.

Умови, які накладено на $c_1(x)$ і $c_2(x)$ приводять до системи:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0, \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок $c_1'(x)$ і $c_2'(x)$ даної системи:

$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, так як $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні;

$$\Delta_{c_1'} = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \ \Delta_{c_2'} = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Отже, $c_1'(x)=\dfrac{\Delta_{c_1'}}{\Delta}=\varphi_1(x), c_2'(x)=\dfrac{\Delta_{c_2'}}{\Delta}=\varphi_2(x), c_1(x)=\int\varphi_1(x)dx$,

$c_2(\ )=\int\varphi_2(x)dx$.

Функція $y^*(x)=y_1(x)\int\varphi_1(x)dx+y_2(x)\int\varphi_2(x)dx$ є частинним розв'язком ЛОДР.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y''-4y'+3y=e^{2x}$.

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння будемо знаходити у вигляді $y=y^*+\overline{y}$.

Характеристичне рівняння однорідного рівняння $y''-4y'+3y=0$ має вигляд $k^2-4k+3=0$, його корені $k_1=1$, $k_2=3$.

Отже, $\overline{y}=c_1e^x+c_2e^{3x}$ – загальний розв'язок однорідного.

Замінимо в цьому розв'язку $\overline{y}$ на y^*, c_1 на $c_1(x)$, c_2 на $c_2(x)$, і знайдемо частинний $y^*=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{3x}$ розв'язок методом варіації довільних сталих.

Для побудови системи $\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x)=0, \\ c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x). \end{cases}$ знайдемо $y_1'(x)$ і $y_2'(x)$, якщо $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=e^{3x}$, маємо $y_1'(x)=e^x$, $y_2'(x)=3e^{3x}$.

Система набуває вигляду $\begin{cases} c_1'(x)\cdot e^x+c_2'(x)\cdot e^{3x}=0, \\ c_1'(x)\cdot e^x+c_2'(x)\cdot 3e^{3x}=e^{2x}. \end{cases}$

Знайдемо її розв'язок: $\Delta=W(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}=3e^{4x}-e^{4x}=2e^{4x}$; $\Delta_{c_1'}=\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}=-e^{5x}$,

$\Delta_{c_2'}=\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^{2x} \end{vmatrix}=e^{3x}$.

Отже, $c_1'(x)=\dfrac{\Delta_{c_1'}}{\Delta}=\dfrac{-e^{5x}}{2e^{4x}}=-\dfrac{e^x}{2}$, $c_2'(x)=\dfrac{\Delta_{c_2'}}{\Delta}=\dfrac{e^{3x}}{2e^{4x}}=\dfrac{1}{2e^x}$,

$$c_1(x)=-\frac{1}{2}\int e^xdx=-\frac{e^x}{2}+c_3\ ,.c_1(x)=\frac{1}{2}\int e^{-x}dx=-\frac{e^{-x}}{2}+c_4\ .$$

Покладемо $c_3=c_4=0$. Маємо

$$y^*=-\frac{e^x}{2}e^x-\frac{1}{2e^x}e^{3x}=-\frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{2}=-e^{2x}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного має вигляд $y=-e^{2x}+c_1e^x+c_2e^{3x}$.

Запитання до самоконтролю і приклади:

1) Означення ЛНДР.

2) Теорема про структуру розв'язку ЛНДР.

3) ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального видую:

а) випадок 1;

б) випадок 2.

4) Суть методу варіації довільних сталих.

Приклад 1.

1) $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 4x + 1$.

2) $y'' + 4y' + 5y = 15x^2 + 19x$.

3) $y'' + 2y' - 3y = 5xe^{2x}$.

4) $y'' - 6y' + 9y = (2x + 3)e^{4x}$.

5) $y'' + 4y' - 5y = -145\sin 2x$.

6) $y'' - 4y' + 3y = 8\cos x + 6\sin x$.

7) $y'' + 3y' - 4y = 10e^{-4x}$.

8) $y'' - 5y' + 4y = -9e^{x}$.

9) $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$.

10) $y'' + 6y' + 9y = 6e^{2x}$.

Відповіді.

1) $y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x) + x^2 - x + \dfrac{3}{4}$.

2) $y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 3x^2 - x + \dfrac{2}{5}$.

3) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x} + \left(x - \dfrac{6}{5}\right) \cdot e^{2x}$.

4) $y = e^{3x}(c_1 + c_2 x) + (2x - 1) \cdot e^{4x}$.

5) $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{x} + 8\cos 2x + 9\sin 2x$.

6) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + 2\cos x - \sin x$.

7) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} - 2x \cdot e^{-4x}$.

8) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{4x} + 3x \cdot e^{x}$.

9) $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x) + 3x^2 \cdot e^{2x}$.

10) $y = e^{-3x}(c_1 + c_2 x) - x^2 \cdot e^{-3x}$.

Приклад 2.

1) $y'' + 2y' + 5y = 10x^2 + 3x + 2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.

2) $y'' + 10y' + 25y = 25x - 40$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.

3) $y'' - 6y' + 5y = (8x + 10)e^{5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

4) $y'' - 8y' + 16y = 6e^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

5) $y'' + 2y' = 32\cos 4x - 24\sin 4x$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$.

6) $y'' + 5y' + 4y = -50\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Відповіді.

1) $y = e^{-x}(3\cos x + \sin x) + 2x^2 - x$.

2) $y = e^{-5x}(1 + 2x) + x - 2$.

3) $y = e^{5x}(1 + x)^2 - e^{x}$.

4) $y = e^{4x}(3x^2 - 2x + 1)$.

5) $y = -5 + 3e^{-2x} - \cos 4x + 2\sin 4x$.

6) $y = 4(e^{-x} - e^{-4x}) + \cos 3x - \sin 3x$.

ЛЕКЦІЯ 29

ПРЕДМЕТ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ПОДІЙ

Елементи комбінаторики.
Простір елементарних подій. Випадкові події та операції над ними.
Ймовірності подій.
Теореми додавання ймовірностей.

29.1 Елементи комбінаторики

Основний принцип комбінаторики (правило множення). Припустимо, що потрібно послідовно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу − n_2 способами і т.д. до k- ї дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Приклад. Щоб дістатися з Києва до Одеси можна вибрати один із 4 залізничних або один із 3 автобусних рейсів. Скільки є варіантів здійснити подорожі за маршрутами: а) Київ – Одеса – Київ; б) Київ – Одеса – Київ, якщо повертатися з Одеси до Києва поїздом?

Розв'язання.
а) З Києва до Одеси можна дістатися 7 способами, з Одеси до Києва − також 7 способами. За правилом множення число способів здійснити таку подорож дорівнює $7 \times 7 = 49$.
б) З Києва до Одеси можна дістатися 7 способами, з Одеси до Києва − 4 способами. За правилом множення число способів здійснити таку подорож дорівнює $7 \times 4 = 28$.

Означення. Розміщенням з n елементів по k називається довільна впорядкована підмножина з k елементів, взятих із даних n елементів.

Два розміщення вважаються різними не тільки тоді, коли складаються з різних елементів, але й тоді, коли вони складаються з однакових елементів, але відрізняються їх порядком. Число розміщень з n елементів по k $(k \le n)$ знаходиться за формулою

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1).$$

Приклад. Скласти всі двозначні числа з різними цифрами 3, 5, 8.

Розв'язання. Маємо 35, 38, 53, 58, 83, 85. Загальну кількість різних чисел можна підрахувати за формулою $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Означення. Розміщення з n елементів по n називаються перестановками. Різні перестановки відрізняються лише порядком елементів. Число перестановок з n елементів дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до n:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n.$$

Приклад. Скількома способами можна скласти список з 8 студентів?

Розв'язання. Маємо $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320.$

Означення. Комбінацією (сполукою) з n елементів по k називається довільна впорядкована підмножина з k елементів, взятих із даних n елементів.

Порядок елементів у комбінаціях неістотній. Число комбінацій з n елементів по k $(k \le n)$ знаходиться за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Домовимося, що $0! = 1$, тоді $C_n^0 = 1$.

Приклад. На зборах присутні 30 осіб. Скількома способами можна обрати президію у складі трьох осіб?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу комбінацій з 30 елементів по 3:

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060.$$

29.2 Простір елементарних подій. Випадкові події та операції над ними

В теорії ймовірностей розглядаються експерименти, які в незмінних умовах можна повторити будь-яку кількість раз, але результати яких не можна наперед передбачити. Такі експерименти будемо називати випробовуваннями.

Найпростіший результат випробування називається елементарною подією і позначається ω. Сукупність всіх можливих елементарних подій випробовування називається простором елементарних подій і позначається Ω. Будь-яка підмножина A простору елементарних подій називається випадковою подією. Сама множина Ω називається достовірною подією, порожня множина Ø − неможливою подією.

Приклад. Випробування полягає в кидані грального кубика. Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де ω_i − випадання грані в i очок ($i = \overline{1,6}$). Подія A − випало парне число очок: $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$; B − випало число очок, що ділиться на 3: $B = \{\omega_3, \omega_6\}$.

Означення. Сумою (об'єднанням) подій A та B називається подія $A + B$ $(A \cup B)$, яка настає тоді, коли настає принаймні одна з подій A або B.

Означення. Добутком (перетином) подій A та B називається подія AB $(A \cap B)$, яка настає тоді, коли настають обидві події A і B.

Означення. Події A та B називається несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу іншої, тобто $AB = \varnothing$.

Означення. Різницею подій A та B називається подія A / B, яка настає тоді, коли настає подія A і не настає подія B.

Означення. Подія $\overline{A}$ називається протилежною до події A, якщо $\overline{A}$ настає тоді, коли не настає A.

Приклад. Випробування полягає в кидані грального кубика, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$. Знайти $A \cup B$, AB, A / B, $\overline{A}$.

Розв'язання. $A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$, $AB = \{\omega_6\}$, $A / B = \{\omega_2, \omega_4\}$, $\overline{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$.

Означення. Події $A_1, A_2, ..., A_k$ утворюють повну групу подій, якщо $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j,\ i, j = 1,2,...,k$ та $\bigcup_{i=1}^{k} A_k = \Omega$.

Приклад. Двічі кидають монету. Описати простір елементарних подій. Описати події: A − принаймні один раз випаде герб, B − при першому кидані випаде герб, $A \cup B$, AB, A / B.

Розв'язання. Якщо *г* − випадання герба, *р* − випадання решки, то простір елементарних подій $\Omega = \{гг, гр, рг, рр\}$, подія $A = \{гг, гр, рг\}$, подія $B = \{гг, гр\}$, $A \cup B = \{гг, гр, рг\}$, $AB = B = \{гг, гр\}$, $A / B = \{рг\}$.

Приклад. Стрілець двічі стріляє по мішені. Подія A − влучення при першому пострілі, подія B − при другому. Описати простір елементарних подій. Записати подію, яка полягає в тому, що а) стрілець влучив у мішень принаймні один раз (подія C); б) стрілець влучив у мішень рівно один раз (подія D); в) стрілець не влучив у мішень (подія E).

Розв'язання. Простір елементарних подій складається з таких подій: AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\,\overline{B}$.

а) Якщо стрілець влучив у мішень принаймні один раз, то це означає, що він влучив або при першому пострілі, або при другому, або при обох, тобто $C = A \cup B$.

б) Рівно одне влучення може бути тільки тоді, коли стрілець при першому пострілі влучив, а при другому − ні, або при першому не влучив, а при другому влучив, тобто $D = A\overline{B} \cup \overline{A}B$.

в) Якщо стрілець не влучив у мішень, то це означає, що він не влучив при обох пострілах, тобто $E = \overline{A}\,\overline{B}$.

29.3 Ймовірності подій

Класичне означення ймовірності

Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ є скінченою множиною, тобто є тільки n можливих результатів випробування ($N(\Omega) = n$). Припустимо, що всі елементарні події рівно можливі. Це означає, що немає об'єктивних причин вважати одну з елементарних подій більш ймовірною порівняно з іншими. Нехай A − випадкова подія, що містить m сприятливих елементарних подій ($N(A) = m$).

Означення. Ймовірністю випадкової величини A називається відношення числа результатів випробування, сприятливих для A, до числа всіх рівно можливих і попарно несумісних результатів випробування:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що число очок, яке випаде на гральному кубику при одному кидані, буде парним (подія A).

Розв'язання. Простір елементарних подій Ω містить $n=6$ елементарних подій, подія $A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ містить $m=3$ сприятливих подій. Отримаємо $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Властивості ймовірності:

1) для кожної події $A \subset \Omega$ справедлива нерівність $0 \le P(A) \le 1$;

2) ймовірність достовірної події $P(\Omega)=1$;

3) ймовірність неможливої події дорівнює нулю P(Ø)=0.2

Приклад. В урні є N куль, з них M білі, а решта − чорні. З урни виймають r куль. Яка ймовірність того, що серед них буде рівно k білих куль?

Розв'язання. Кожна елементарна подія у цьому випробувані визначається деякою підмножиною з r елементів множини з N елементів, тобто комбінацією з N елементів по r. Отже, число всіх елементарних подій дорівнює $n=C_N^r$. Знайдемо число підмножин, в яких є рівно k білих куль (і тому $r-k$ чорних), k білих куль можна вибрати з M білих куль C_M^k способами, а $r-k$ чорних з $N-M$ чорних куль − C_{N-M}^{r-k} способами. За правилом добутку число сприятливих елементарних подій дорівнює $m=C_M^k \cdot C_{N-M}^{r-k}$. Шукана ймовірність дорівнює

$$P=\frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{r-k}}{C_N^r}.$$

Статистичні ймовірності

Нехай проведено n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A відбулася m раз $(m \le n)$. Число $\frac{m}{n}$ називається відносною частотою події A. Відносну частоту можна знайти тільки після проведення випробувань. В багатьох випадках відносна частота події A стабілізується при великому n. Відносні частоти при різних n відрізняються мало і коливаються біля деякого сталого числа. Такі події називаються статистично стійкими.

Число, до якого збігаються відносні частоти події, називається статистично ймовірністю події.

Приклад. При стрільбі була одержана відносна частота влучень 0,6. Скільки було зроблено пострілів, якщо одержано 12 промахів?

Розв'язання. Нехай було зроблено n пострілів. Тоді число влучень дорівнює n-12, і відносна частота дорівнює $\frac{n-12}{n}=0{,}6$, звідси $n-12=0{,}6 \cdot n,\ n=30$.

Геометричні ймовірності

Нехай Ω − деяка область на прямій, площині або а просторі, A − деяка частина області Ω. В області Ω навмання вибирають точку, вважаючи, що вибір точок області рівноможливий. Ймовірність того, що вибрана точка належить A, визначається рівністю

$$P(A)=\frac{mes\,A}{mes\,\Omega},$$

де $mes\,A$, $mes\,\Omega$ − міра (довжина, площа, об'єм) A, Ω.

Приклад. На касеті записані концерти трьох співаків: першого − протягом 40 хв. звучання, другого − протягом 30 хв., третього − протягом 20 хв. Запис перемотується і навмання включається. Яка ймовірність, що звучить пісня у виконані другого співака?

Розв'язання. Час звучання всього запису $T(\Omega)=90$ хв., час звучання другого співака $T(A)=30$ хв. Тому

$$P(A)=\frac{T(A)}{T(\Omega)}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}.$$

29.4 Теореми додавання ймовірностей

Терема 1 (додавання для несумісних подій). Якщо A і B несумісні ($AB=\varnothing$), то $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Наслідок 1. Якщо події $A_1,A_2,...,A_k$ попарно несумісні, тобто $A_i\,A_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то $P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)$.

Наслідок 2. Ймовірність протилежної до A події $\overline{A}$ дорівнює $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Наслідок 3. Сума ймовірностей подій $A_1,A_2,...,A_k$, що утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці: $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k)=1$.

Приклад. В ящику 10 червоних і 6 синіх ґудзиків. Навмання виймають два ґудзики. Яка ймовірність того, що ґудзики будуть одного кольору?

Розв'язання. Введемо позначення: подія A − ґудзики одного кольору, подія B − ґудзики червоні, подія C − ґудзики сині. Очевидно, $A=B\cup C$, і події B і C несумісні. За теоремою 1: $P(A)=P(C)+P(B)$. Знайдемо $P(C)$, $P(B)$. Число способів взяти 2 ґудзики із 16 дорівнює C_{16}^2, число наслідків, сприятливих події B, дорівнює C_{10}^2, сприятливих події C − C_6^2. Одержимо: $P(B)=\frac{C_{10}^2}{C_{16}^2}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2}{15\cdot 16}=\frac{3}{8}$, $P(C)=\frac{C_6^2}{C_{16}^2}=\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2}{15\cdot 16}=\frac{1}{8}$. Отже, $P(A)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.

Теорема 2 (додавання для сумісних подій). Якщо A і B сумісні, то $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Приклад. Знайти ймовірність того, що навмання вибране двозначне число є кратним 2, або 5, або тому й іншому одночасно.

Розв'язання. Введемо позначення: подія A − вибране число кратне 2, або 5, або тому й іншому одночасно, подія B − число кратне 2, подія C − число кратне 5. Очевидно, $A = B \cup C$. За теоремою 2: $P(A) = P(B) + P(C) - P(BC)$. Всього є $n = 90$ двозначних чисел, з них 45 кратних 2. Кількість двозначних чисел, кратних 5, за правилом добутку дорівнює $n = 9 \cdot 2 = 18$, з них 9 чисел кратних і 2, і 5. Маємо $P(B) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$, $P(BC) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$. Отже, $P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$.

Запитання до самоконтролю і приклади.

6. Сформулювати правило множення.
7. Дати означення розміщення, комбінації. В чому полягає відмінність розміщення і комбінації?
8. Дати означення простору елементарних подій, випадкової події.
9. Що називається сумою подій, добутком подій, різницею подій?
10. Які події називаються несумісними?
11. Дати означення повної групи подій.
12. Дати означення класичної ймовірності.
13. Дати означення статистичної ймовірності.
14. Дати означення геометричної ймовірності.
15. Сформулювати теореми додавання ймовірностей для несумісних та сумісних подій випадкових подій.

Приклад. Скільки існує шестизначних чисел, які діляться на 5?

Відповідь. 180000.

Приклад. Скільки всього семизначних телефонних номерів, в кожному з яких ні одна цифра не повторюється?

Відповідь. $A_{10}^{7} = 604800.$

Приклад. У Ніни є 7 різних книг з математики, а у Слави − 9 різних книг з філософії. Скількома способами вони можуть обмінятися один з одним по 5 книг?

Відповідь. $C_7^5 \cdot C_9^5 = 2646.$

Приклад. В урні лежать 4 кулі, занумеровані цифрами 1, 2, 3, 4. Витягують по одній дві кулі. А) Описати простір елементарних подій. Б) Записати елементарні події, сприятливі для події A, яка полягає в тому, що витягнуто дві кулі з парними номерами.

Відповідь. $A) \ \Omega = \{12, 13, 14, 23, 24, 34, 21, 31, 41, 32, 42, 43\}$, $Б) \ A = \{24, 42\}$.

Приклад. В урні 15 білих і 10 чорних куль. З урни виймають навмання три кульки. Знайти ймовірність того, що: 1) всі три кулі білі; 2) дві кулі − білі і одна чорна.

Відповідь. 1) $\frac{91}{460}$; 2) $\frac{21}{46}$.

Приклад. Підкидають три монети. Знайти ймовірність того, що випаде два герба.

Відповідь. $\frac{3}{8}$.

Приклад. У три вагони заходять 9 пасажирів. Знайти ймовірність подій: 1) в перший вагон зайдуть 3 пасажири; 2) в кожен вагон зайде по три пасажира; 3) в один з вагонів зайдуть 4, а в два інших − 3 та 2 пасажири.

Відповідь. 1) $\frac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9} = 0{,}273$; 2) $\frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{3^9} = 0{,}085$; 3) $\frac{C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 \cdot 3!}{3^9} = 0{,}384$.

Приклад. В коробці 7 куль, серед яких 4 білі. Навмання взяли 3 кулі. Яка ймовірність того, що: 1) всі взяті кулі білі; 2) одна з них біла?

Відповідь. 1) $\frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$; 2) $\frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$.

Приклад. З букв розрізної абетки складено слово «книга». Букви розсипали, а потім склали в довільному порядку. Яка ймовірність того, що знову отримали слово «книга»?

Відповідь. $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$.

Приклад. Те ж запитання, якщо було складено слово «ананас»?

Відповідь. $\frac{3! \cdot 2!}{6!} = \frac{1}{60}$.

Приклад. На п'яти картках написані цифри від 1 до 5. Навмання беруть 3 картки. Яка ймовірність того, що серед них буде картка №1?

Відповідь. $\frac{C_1^1 \cdot C_4^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}$.

Приклад. При стрільбі з гвинтівки відносна частота попадання в ціль виявилась рівною 0,85. Зайти число влучень, якщо було зроблено 120 пострілів.

Відповідь. 102.

Приклад. У прямокутному трикутнику з катетами довжиною 3 і 4 м навмання вибрали точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в круг, вписаний в трикутник?

Відповідь. $\frac{\pi}{6}$.

Приклад. Навмання вибрано два додатних числа x та y, кожне яких не перевищує 10. Знайти ймовірність того, що $x + y \le 9$, а $y < 2x$.

Відповідь. 0,27.

Приклад. Студент прийшов на залік, підготувавши лише 25 і 30 питань програми. Після відмови відповідати на перше запитання екзаменатор задає ще одне запитання. Знайти ймовірність того, що студент складе залік.

Відповідь. $\frac{25}{29}$.

Приклад. Всередині прямокутника, обмеженого осями координат і прямими $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$, навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що вона лежить нижче лінії $y = \cos x$.

Відповідь. $\frac{2}{\pi}$.

ЛЕКЦІЯ 30

УМОВНА ЙМОВІРНІСТЬ, ПОВНА ЙМОВІРНІСТЬ ТА ФОРМУЛИ БАЙЄСА

Умовна ймовірність та теореми множення ймовірностей.
Ймовірність настання хоча б однієї події.
Формула повної ймовірності.
Формула Байєса.
Схема Бернуллі.

30.1 Умовна ймовірність та теореми множення ймовірностей

Розглянемо спочатку приклад. Кинемо двічі гральний кубик. Подія A полягає в тому, що сума очок дорівнює 5. Простір елементарних подій складається з 36 елементів: $\Omega=\{(i,j),\, i,j=1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{(4,1),(3,2),(2,3),(1,4)\}$. Тому $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. Припустимо відомо, що при першому кидані кубика випала трійка (подія B). Тоді ймовірність події A стане іншою: 5 очок в сумі тепер може випасти лише тоді, коли при другому кидані випаде двійка, тобто в одному випадку з шести. Отже, ймовірність події A, за умови, що настала подія B, дорівнює $\frac{1}{6}$. Цю ймовірність позначають $P(A/B)$ і називають умовною ймовірністю. Таким чином, $P(A)=\frac{1}{9}$, $P(A/B)=\frac{1}{6}$.

Для визначення умовної ймовірності події A за умови, що відбулася подія B, можливими результатами випробування треба вважати ті, при яких настає подія B; сприятливими для A будуть ті результати випробування, при яких настають обидві події A і B. Тому ймовірність події A за умови, що подія B відбулася, дорівнює

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B)>0.$$

Означення. Умовною ймовірністю події A за умови, що відбулася подія B, називається величина $P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B)>0.$

З останньої формули випливає теорема множення для двох подій: $P(AB)=P(B)P(A/B)$.

Означення. Випадкові події A і B називаються незалежними, якщо $P(AB)=P(A)P(B)$, тобто настання однієї з двох випадкових подій не впливає на ймовірність іншої.

Теорема 1. Якщо $A_1,A_2,...,A_n$ – довільні події, то $P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$.

Означення. Випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо $P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) ... P(A_{i_k})$ для будь-яких $k = 2,3,...,n, \quad 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n.$

Якщо ця рівність виконується при $k = 2$, то події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються попарно незалежними. Попарно незалежні події можуть не бути незалежними в сукупності.

Приклад. Студент прийшов на іспит. Підготувавши лише 20 з 25 питань програми. Екзаменатор задав йому три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на всі ці питання.

Розв'язання. Введемо позначення: A − студент знає відповіді на всі три питання; подія A_i $(i = 1,2,3)$ − студент знає відповідь на i-те питання. Тоді $A = A_1 A_2 A_3$ і матимемо $P(A) = P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2)$. Очевидно, що $P(A_1) = \frac{20}{25}, \; P(A_2 / A_1) = \frac{19}{24}, \; P(A_3 / A_1 A_2) = \frac{18}{23}$.

Одержуємо $P(A) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = 0{,}496.$

30.2 Ймовірність настання хоча б однієї події

Припустимо, що в результаті випробування можуть відбутися n подій $A_1, A_2, ..., A_n$, незалежних в сукупності, ймовірності яких відомі $p_1, p_2, ..., p_n$. Тоді ймовірності протилежних подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ дорівнюють $q_1 = 1 - p_1, \; q_2 = 1 - p_2, ..., q_n = 1 - p_n$.

Теорема 2. Ймовірність настання принаймні однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$, незалежних в сукупності, знаходиться за формулою: $P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$.

Наслідок. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ мають однакову ймовірність p, то ймовірність настання принаймні однієї з цих подій дорівнює $P(A) = 1 - q^n$.

Приклад. У кожному з трьох ящиків лежить по 10 деталей; у першому ящику 2 деталі браковані, у другому − 3, у третьому − 1. З кожного ящика беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед них є принаймні одна стандартна.

Розв'язання. Позначимо події: A − серед трьох деталей принаймні одна стандартна, A_i $(i = 1,2,3)$ − деталь взята з i-го ящика, стандартна. Маємо: $P(A_1) = \frac{8}{10}, \quad P(A_2) = \frac{7}{10}, \quad P(A_3) = \frac{9}{10}, \quad q_1 = P(\overline{A}_1) = \frac{2}{10}, \quad q_2 = P(\overline{A}_2) = \frac{3}{10},$ $q_3 = P(\overline{A}_3) = \frac{1}{10}$. Тоді $P(A) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$

Приклад. Ймовірність влучення під час одного пострілу дорівнює 0,4. Скільки треба зробити пострілів, щоб ймовірність принаймні одного влучення була не менше ніж 0,9?

Розв'язання. Нехай подія A − при n пострілах буде хоча б одне влучення, Тоді $P(A) = 1 - q^n$. За умовою $p = 0{,}4$, отже $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. $P(A) \ge 0{,}9$.

Одержимо: $1-0{,}6^n \geq 0{,}9$, звідки $0{,}6^n \geq 0{,}1$. Прологарифмуємо за основою 10: $n\lg 0{,}6 \leq \lg 0{,}1$. Враховуючи, що $\lg 0{,}6 < 0$, маємо: $n \geq \dfrac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}6} = 4{,}5$. Отже, $n \geq 5$, тобто потрібно зробити не менше 5 пострілів.

30.3 Формула повної ймовірності

Припустимо, що $H_1, H_2, \ldots, H_n$ − повна група подій, які будемо називати гіпотезами, $P(H_i) > 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Тоді ймовірність події A, яка може наступити за умови настання однієї з подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, дорівнює

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Остання формула і є формулою повної ймовірності.

Приклад. У трьох урнах лежать білі і чорні кулі. У першій − 3 білі і 1 чорна, у другій − 6 білих і 4 чорних, у третій − 9 білих і 1 чорна. З навмання взятої урни виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.

Розв'язання. Введемо позначення: події H_i $(i = 1,2,3)$ − вибрана i-та урна, подія A − взята куля біла. Очевидно, що $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$, $P(A/H_1) = \dfrac{3}{4}$, $P(A/H_2) = \dfrac{6}{10}$, $P(A/H_3) = \dfrac{9}{10}$. За формулою повної ймовірності $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{9}{10}\right) = \dfrac{3}{4}.$

30.4 Формула Байєса

Якщо до випробування відомі апріорні ймовірності подій $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, а в результаті випробування сталася подія A, і $P(A) > 0$, то з урахуванням настання цієї події умовні ймовірності гіпотез обчислюються за формулою Байєса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}, \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

де $P(A)$ заходиться за формулою повної ймовірності.

Приклад. На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє 25%, друга − 35%, третя − 40% усіх гвинтів. Частка браку відповідно 5%, 4% і 2%. Випадково вибраний гвинт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його зроблено першою, другою, третьою машинами?

Розв'язання. Введемо позначення: події H_i $(i = 1,2,3)$ − вибраний гвинт виготовлений i-ою машиною, подія A − вибраний гвинт бракований. Маємо $P(H_1) = 0{,}25$, $P(H_2) = 0{,}35$, $P(H_3) = 0{,}4$, $P(A/H_1) = 0{,}05$, $P(A/H_2) = 0{,}04$, $P(A/H_3) = 0{,}02$ і $P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0345$. За формулою Байєса одержимо:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{0{,}0345}=0{,}3623,$$
$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}35\cdot 0{,}04}{0{,}0345}=0{,}4058,$$
$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}02}{0{,}0345}=0{,}2319.$$

30.5 Схема Бернуллі

Нехай проводиться n послідовних незалежних випробувань, в кожному з яких може відбутися подія A. Настання події A будемо називати «успіхом», ймовірність успіху при кожному випробуванні одна й та сама і дорівнює p $(0<p<1)$. Ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A настане k раз в n випробуваннях $(0\le k\le n)$ знаходиться за формулою Бернуллі:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad q=1-p.$$

Число k_0, при якому ймовірність $P_n(k_0)$ найбільша, називається найімовірнішим числом настання події A. Шукається воно за формулою $k_0=[(n+1)p]$ − ціла частина числа $(n+1)p$. Якщо число $(n+1)p$ − ціле, то k_0-1 також буде найімовірнішим числом настання події A.

Приклад. Монету кинуто 6 раз. Знайти ймовірність того, що герб випаде 0, 3, 5, 6 разів.

Розв'язання. Маємо $n=6,\ p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}.$

$P_6(0)=C_6^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64},\quad P_6(3)=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64},\quad P_6(5)=C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{6}{64},$
$P_6(6)=C_6^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}.$

Приклад. Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,8. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб найімовірніше число влучень дорівнювало 18?

Розв'язання. За умовою $p=0{,}8,\ k_0=18.$ Одержимо $18=[(n+1)0{,}8],\ 0{,}8n=17{,}2,\ n=[21{,}5]=21.$

Приклад. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515, а дівчинки 0,485. В деякій сім'ї шестеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед них не більше двох дівчаток.

Розв'язання. За умовою $n=6,\ p=0{,}485,\ q=0{,}515.$ Шукана ймовірність дорівнює

$P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)=(0{,}515)^6+C_6^1\cdot 0{,}485\cdot(0{,}515)^5+C_6^2\cdot(0{,}485)^2\cdot(0{,}515)^4\approx 0{,}3723.$

Запитання до самоконтролю і приклади.

1. Дати означення умовної ймовірності випадкової події.
2. Які випадкові події називаються: а) незалежними в сукупності, б) попарно незалежними?
3. Записати формулу повної ймовірності.
4. Записати формулу Байєса.
5. Записати формулу Бернуллі.

Приклад. Два стрільці зробили по одному пострілі по мішені. Ймовірність влучити в мішень для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого − 0,7. Яка ймовірність того, що: а) влучить лише один стрілець, б) влучить хоча б один стрілець?
Відповідь. а) 0,38; б) 0,94.
Приклад. Ймовірність хоча б одного влучення в ціль при двох пострілах дорівнює 0,99. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі.
Відповідь. 0,9.
Приклад. В урні 7 кульок з номерами від 1 до 7. Навмання вибираємо 3 кульки. Яка ймовірність того, що послідовно з'являються кульки з номерами 1,3,5?
Відповідь. $\frac{1}{210}$.
Приклад. З урни, яка містить 3 білих та 2 чорних кулі, перекладено дві кулі до урни, яка містить 4 білих та 4 чорних кулі. Яка ймовірність того, що з другої урни після такого перекладання буде взято білу кулю?
Відповідь. 0,52.
Приклад. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення першого − 0,8, другого − 0,4. Відомо, що є одне влучення. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив перший стілець.
Відповідь. $\frac{6}{7}$.
Приклад. В першому ящику 2 білих та 1 чорна куля, у другому − 1 біла і 4 чорних кулі. Навмання вибирають ящик і виймають з нього кулю. Яка ймовірність того, що витягнута куля буде білою?
Відповідь. $\frac{13}{30}$.
Приклад. Перший і другий заводи поставляють порівну однакових деталей, але перший завод виробляє 90% стандартних деталей, а другий − 80%. Навмання взята деталь стандартна. Яка ймовірність, що вона виготовлена першим заводом?
Відповідь. $\frac{9}{17}$.

Приклад. Яка ймовірність того, що при 10 підкиданнях монети випаде герб від 4 до 6 разів?

Відповідь. $\frac{21}{32}$.

Приклад. Батарея зробила 14 пострілів по об'єкту, ймовірність влучення в який 0,2. Обчислити найбільш ймовірне число влучень і його ймовірність.

Відповідь. $k_0 = 2,\ k_1 = 3,\ P_{14}(2) = P_{14}(3) = 0{,}25.$

Приклад. Що більш ймовірно: виграти у гравця (рівного собі за силою гри) 4 партії з 8 чи 3 партії з 5?

Відповідь. $P_5(3) > P_8(4)$.

ЛЕКЦІЯ 31

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Види випадкових величин
Закони розподілу дискретних випадкових величин
Біноміальний закон розподілу
Геометричний закон розподілу
Закон розподілу Пуассона
Гіпергеометричний закон розподілу
Числові характеристики дискретних випадкових величин

31.1. **Види випадкових величин**

Означення. Випадкова величина X – це змінна числова величина, яка в результаті експерименту приймає одне з можливих своїх значень, заздалегідь невідомого і обумовленого випадковими причинами.

Нехай $x_1, x_2, x_3, ...$– значення випадкової величини X. Одне і те саме значення x_i може відповідати різним елементарним подіям. Сукупність всіх цих елементарних подій утворює складену випадкову подію, яка полягає в тому, що $X = x_i$. Ймовірність цієї події позначаються $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1,2,...$.

Приклади випадкових величин:

1) частота появи герба при підкиданні монети;
2) кількість дефектних виробів у даній партії;
3) кількість влучень в ціль при n пострілах.
4) час безвідмовної роботи приладу.

Випадкові величини діляться на дискретні і неперервні:

Означення. Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називається величина, яка в результаті експерименту набуває скінченну, чи нескінченну (але злічeнну) множину числових значень.

Множина є зліченною, якщо її елементи можна занумерувати.

Означення. Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, нескінченна безліч значень якої є деяким скінченним, чи нескінченним інтервалом числової осі.

Найбільш повним, вичерпним описом випадкової величини є її закон розподілу.

31.2. **Закони розподілу дискретних випадкових величин**

Означення. Закон, який встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями називають законом розподілу випадкової величини.

Закони розподілу можна подати: 1) таблицею, 2) графічно, 3) аналітично.

1) Найпростіша форма представлення закону розподілу ДВВ є ряд розподілу – прямокутна таблиця, першим рядком якої є можливі значення $X = x_i$, другим – відповідні їм ймовірності $p_i = P(X = x_i)$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Той факт, що X набуває певного значення є випадковою подією і, враховуючи, що в одному випробуванні випадкова величина набуває лише одного можливого значення, можна зробити висновок, що події $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ утворюють повну групу , тому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

2) Закон розподілу ДВВ можна зображати графічно. У прямокутній системі координат задається набір точок (x_i, p_i), які з'єднуються ломаною лінією. Одержана ломана лінія називається многокутником розподілу випадкової величини.

3) При аналітичному способі задання закону розподілу дискретної випадкової величини задається функція $p_i = P(X = x_i) = f(x_i)$ $(i = 1,2,\ldots)$, яка називається функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X.

В залежності, як задається функція розподілу ймовірностей $f(x_i)$ закони розподілу для ДВВ розрізняють на біноміальний, геометричний, розподіл

Пуассона і гіпергеометричний .

31.3. **Біноміальний закон розподілу**

Закон розподілу випадкової величини X – кількість появи події А (число успіхів) при n випробуваннях називають біноміальним законом розподілу. Біноміальний розподіл був вперше вивчений Якобом Бернуллі і через це біноміальні випробування інколи називають випробуваннями Бернуллі або схемою Бернуллі.

Біноміальний закон розподілу – це закон розподілу величини X, яка набуває значень $x_i = 0,1,2,\ldots,k,\ldots,n$ з ймовірностями $p_k = P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, де p – ймовірність успіху (настання події *A*) в кожному випробуванні, $q = 1 - p$ – ймовірність невдачі.

Його можна подати у вигляді таблиці

x_i	0	1	2	…	k	…	n
p_i	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$C_n^n p^n q^0$

Закон називається біноміальний тому, що $C_n^k p^k q^{n-k}$ можна розглядати як загальний член бінома Ньютона

$$C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n = (p + q)^n = 1.$$

Приклад 1. Нехай в партії готової продукції $2/3$ виробів вищого ґатунку. Проводиться послідовна вибірка 5 – ти виробів. Побудувати закон розподілу ймовірностей, який характеризує можливі результати вибірки.

Розв'язання. Нехай $X = k$ кількість виробів вищого ґатунку у вибірці з 5–ти виробів. Можливі значення величини $X: x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5$. Подія A – поява виробу вищого ґатунку при відборі одного виробу. Тоді $p = P(A) = \dfrac{2}{3}$, $q = 1 - p = \dfrac{1}{3}$.

Тоді за формулою $p_k = P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ маємо: $p_1 = P_5(0) = C_5^0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$, $p_2 = P_5(1) = C_5^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{10}{243}$,

$p_3 = P_5(2) = \frac{40}{243}$, $p_4 = P_5(3) = \frac{80}{243}$, $p_5 = P_5(4) = \frac{80}{243}$, $p_6 = P_5(5) = \frac{32}{243}$.

Отже, закон розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

31.4. **Геометричний закон розподілу**

Нехай маємо послідовність незалежних випробувань за схемою Бернуллі зі сталою ймовірністю $p = P(A)$ появи події A в кожному випробуванні, $q = P(\overline{A}) = 1 - p$. Розглянемо випадкову величину X – кількість проведених випробувань до першої появи події A (до першого успіху). Ця величина може набувати значень 1,2,3,…

Обчислимо їх ймовірності: $p_1 = P(X = 1) = p$ (подія A з'явилась в першому випробуванні) $P(A) = p$; $p_2 = P(X = 2) = qp$ (в першому випробуванні відбулась подія $\overline{A}$ і в другому відбулась подія A) $P(\overline{A}A) = P(\overline{A}) \cdot P(A) = qp$;

$$p_3 = P(X = 3) = P(\overline{A}\overline{A}A) = P(\overline{A})P(\overline{A})P(A) = q^2 p;\ldots;$$

$$p_k = P(X = k) = P\left(\underbrace{\overline{A}\ldots\overline{A}}_{k-1}A\right) = q^{k-1} p.$$

Закон розподілу можна подати у вигляді таблиці:

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	p	qp	$q^2 p$	…	$q^{k-1} p$	…

$p + qp + q^2 p + .. + q^{k-1} p + ... = p\left(1 + q + q^2 + ... + q^{k-1}\right) = p\frac{1}{1-q} = 1$, так як $1 + q + q^2 + ... + q^{k-1}$ – нескінченно спадна геометрична прогресія, сума членів якої дорівнює $\frac{1}{1-q}$.

Приклад 2. Гральний кубик підкидають до першої появи 3 –х очок на верхній грані. Побудувати закон розподілу величини X – кількості проведених випробувань.

Розв'язання. Можливі значення $X = \{1,2,3,...\}$. Подія A –поява 3 – х очок:

$P(A) = \frac{1}{6}; P(\overline{A}) = q = \frac{5}{6}; p_1 = P(X = 1) = P(A) = p = \frac{1}{6};$

$p_2 = P(X = 2) = P(\overline{A}A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$; $p_3 = P(X = 3) = P(\overline{A}\overline{A}A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ і так дальші.

Отже, закон розподілу має вигляд:

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{5^2}{6^3}$	…	$\frac{5^{k-1}}{6^k}$	…

31.5. **Закон розподілу Пуассона**

Означення. Розподіл ймовірностей дискретної випадкової величини X, яка в біноміальних випробуваннях набуває значення 0,1,2,3,… з ймовірностями $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=P(k,\lambda)$, де $\lambda = np$, називається законом розподілу Пуассона.

Таблиця цього закону має вигляд:

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	…

Розподіл Пуассона є законом розподілу частоти появи малоймовірних подій в заданому проміжку часу чи частині простору. Сфера використання закону Пуассона: вхідний потік вимог про ремонт чи обслуговування, прибуття та розвантаження кораблів в порту, потік покупців в магазині і т. п.

Приклад 3. На 10 однотипних перехрестях місцевих доріг зафіксовано за місяць 20 аварій. Вважаючи, що аварії на кожному перехресті – незалежні події, а їх кількість на кожному перехресті підпорядковані закону Пуассона.

Визначити: 1) ймовірність 3 – х аварій на одному перехресті впродовж місяця;

2) ймовірність того, що число аварій виявиться не меншим 4 на одному перехресті за цей же період.

Розв'язання. Визначимо середню кількість аварій $\lambda=\frac{20}{10}=2$, що припадає на одне перехрестя.

1) $P(k;\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $P(3;2)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0{,}18045$;

2) $P(k\ge 4;2)=1-P(k<4;2)=1-P(0;2)-P(1;2)-P(2;2)-P(3;2)=$
$=1-0{,}13534-0{,}27067-0{,}27067-0{,}18045=0{,}14287$.

31.6. **Гіпергеометричний закон розподілу**

Розглянемо вибірку обсягу k з деякої множини, що містить N елементів, серед яких ознака A зустрічається n разів, і не зустрічається $N-n$ раз. Позначимо через X – кількість елементів серед відібраних, які наділені ознакою A, $X=\{0,1,2,...,m,...,k\}$. Всього вибірок по k елементів із сукупності N елементів можна здійснити C_N^k способами. Серед цих вибірок , в яких подія A (подія A – відібраний елемент наділений ознакою A) зустрічається m разів, буде $C_n^m\cdot C_{N-n}^{k-m}$. Використовуючи класичне означення ймовірності маємо:

$$P(X=m)=\frac{C_n^m\cdot C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k}\quad m\le n\,,\ m\le k\,.$$

Покладаючи в цій формулі $m=0{,}1{,}2{,}...$ і знаходячи $P(X=m)$, матимемо ряд ймовірностей, який називають гіпергеометричним розподілом

x_i	0	1	$\dots$	m	$\dots$	k
p_i	$\frac{C_n^0\cdot C_{N-n}^{k-0}}{C_N^k}$	$\frac{C_n^1\cdot C_{N-n}^{k-1}}{C_N^k}$	$\dots$	$\frac{C_n^m\cdot C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k}$	$\dots$	$\frac{C_n^k\cdot C_{N-n}^{k-k}}{C_N^k}$

Приклад 4. Партія складається з 20 деталей, серед яких є 3 браковані. З партії навмання взято 4 деталі. Побудувати закон розподілу ВВ X – числа бракованих деталей серед відібраних.

Розв'язання. Випадкова величина X може набувати значення 0 або 1 або 2 або 3. Обчислимо відповідні їм ймовірності за формулою $P(X=m)=\frac{C_n^m\cdot C_{N-n}^{k-m}}{C_N^k}$, $N=20$, $n=3$, $k=4$.

Отже: $$p_1=P(X=0)=\frac{C_{17}^4}{C_{20}^4}=\frac{\dfrac{17!}{4!(17-4)!}}{\dfrac{20!}{4!(20-4)!}}=\frac{17!\cdot 4!\cdot 16!}{4!\cdot 13!\cdot 20!}=\frac{17!\cdot 4!\cdot 13!\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{4!\cdot 13!\cdot 17!\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=\frac{28}{57};$$

$$p_2=P(X=1)=\frac{C_{17}^3\cdot C_3^1}{C_{20}^4}=\frac{17!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 16!}{3!\cdot 14!\cdot 2!\cdot 20!}=\frac{8}{19};\ p_3=P(X=2)=\frac{C_{17}^2\cdot C_3^2}{C_{20}^4}=\frac{8}{95};$$

$$p_4=P(X=3)=\frac{C_{17}^1\cdot C_3^3}{C_{20}^4}=\frac{17!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 16!}{16!\cdot 3!\cdot 20!}=\frac{1}{285};\ p_1+p_2+p_3+p_4=1.$$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{28}{57}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{8}{95}$	$\frac{1}{285}$

31.7. **Числові характеристики дискретних випадкових величин**

Закон розподілу, функція розподілу (означення і властивості якої розглянемо пізніше) дають повну характеристику випадкової величини. Крім них існують окремі числові параметри, що характеризують деякі суттєві особливості її розподілу. Їх називають числовими характеристиками випадкової величини.

Означення. Математичним сподіванням (центром розподілу) $M(X)$ випадкової величини називають її теоретичне середнє значення.

Означення. Математичним сподіванням випадкової величини X називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності і позначається $M(X)$, тобто $M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Властивості $M(X)$:

1) $M(C)=C$, де C– константа.

2) $M(CX)=CM(X)$.

3) $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

4) $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$, якщо X і Y – незалежні випадкові величини.

5) При досить великих значеннях n математичне сподівання наближено дорівнює середньому арифметичному значень випадкової величини, що спостерігається, тобто $M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n\approx\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$.

6) Так, як $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$, то $M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\Big/\sum_{i=1}^{n}p_i$. Нехай p_i– маси матеріальних точок з координатами x_i, тоді $M(X)=x_c$– центр віги системи матеріальних точок. Тому математичне сподівання називають центром розподілу випадкової величини.

Означення. Різниця між випадковою величиною та її математичним сподіванням, тобто $X-M(X)$ називають відхиленням випадкової величини X.

Відхилення має властивість: математичне сподівання від відхилення дорівнює нулю, тобто $M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0$.

Означення. Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення її математичного сподівання. Вона є характеристикою розсіювання навколо центру розподілу. Дисперсію обчислюють за формулою: $D(X)=M(X-M(X))^2=M(X^2)-M^2(X)$.

Властивості $D(X)$:

1) $D(C)=0$.

2) $D(CX)=C^2D(X)$.

3) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$, якщо X і Y – незалежні випадкові величини.

Означення. Середнє квадратичне $\sigma(X)$ відхилення дорівнює квадратному кореневі із дисперсії: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Приклад 5. Задано ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	-1	0	4	5
p_i	0,3	p_2	0,1	0,4

Визначити p_2, $M(X)$, $D(X)$.

Розв'язання.

Так як $p_1+p_2+p_3+p_4=1$, то $p_2=1-p_1-p_3-p_4=1-0,3-0,1-0,4=0,2$;

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4=-1\cdot 0,3+0\cdot 0,2+4\cdot 0,1+5\cdot 0,4=2,1;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X), M(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x^2{}_ip_i=x^2{}_1p_1+x^2{}_2p_2+x^2{}_3p_3+x^2{}_4p_4=$$

$$=(-1)^2\cdot 0,3+0^2\cdot 0,2+4^2\cdot 0,1+5^2\cdot 0,4=11,9,\ D(X)=11,9^2-2,1^2=141,61-4,41=137,2$$

Запитання до самоконтролю і приклади.

1. Дати означення дискретної випадкової величини (ДВВ).
2. Які є способи задання ДВВ.
3. Дати означення біноміального закону розподілу
4. Дати означення геометричного закону розподілу
5. Дати означення закону розподілу Пуассона
6. Дати означення гіпергеометричного закону розподілу
7. Дати означення математичного сподівання $M(X)$.
8. Назвати властивості $M(X)$.
9. Дати означення дисперсії $D(X)$.
10. Назвати властивості $D(X)$.
11. Якою формулою обчислюється математичне сподівання дискретної випадкової величини?
12. Якою формулою обчислюється дисперсія неперервної випадкової величини?

Приклад 1.Задано закон розподілу *ДВВ* X

x_i	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	7	9
p_i	0,01	0,07	0,1	0,09	0,03	0,2	0,02	0,2	0,08	0,2

Знайти $M(X), D(X), \sigma(X)$.

Відповідь. $M(X)=3{,}92, D(X)=10{,}9336, \sigma(X)=3{,}3066.$

Приклад 2. Ймовірність впіймати потрібну хвилю приймачем дорівнює 0,96.

Зроблено 9 спроб, побудувати закон розподілу ВВ X – кількість вдалих спроб впіймати потрібну хвилю.

Відповідь.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$0{,}04^9$	$8{,}64 \cdot 0{,}04^8$	$36 \cdot 0{,}96^2 \cdot 0{,}04^7$	$84 \cdot 0{,}96^3 \cdot 0{,}04^6$	$126 \cdot 0{,}96^4 \cdot 0{,}04^5$	$126 \cdot 0{,}96^5 \cdot 0{,}04^4$

6	7	8	9
$84 \cdot 0{,}96^6 \cdot 0{,}04^3$	$36 \cdot 0{,}96^7 \cdot 0{,}04^2$	$0{,}36 \cdot 0{,}96^8$	$0{,}96^9$

Приклад 3. Знайти $M(X), D(X), \sigma(X)$ біноміального розподілу при $n=4, p=\dfrac{1}{4}$.

Відповідь.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

$M(X)=2, D(X)=\sigma(X)=1.$

ЛЕКЦІЯ 32

НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Функція розподілу випадкової величини
Щільність розподілу ймовірностей
Числові характеристики неперервних випадкових величин
Основні закони розподілу неперервних випадкових величин
Рівномірний розподіл

Показниковий (експоненціальний) закон розподілу
Нормальний закон розподілу та його параметри
Ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини
на інтервал. Правило трьох сігм

32.1. **Функція розподілу випадкової величини**

Означення. Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка для кожного $x \in R$ дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X набуде значень менших від дійсного числа x, тобто $F(x) = P(X < x)$.

Для дискретних випадкових величин функцією розподілу обчислюється за формулою $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} P(X = x_i)$.

Якщо X – неперервна випадкова величина, то функцію $F(x)$ називають іще інтегральною функцією розподілу. Крім того, якщо X –НВВ, то $F(x)$ є неперервною функцією і диференційовною. Тому $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = P(x < X < x + \Delta x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F(x) = 0$.

Означення. Випадкова величина X називається неперервною, якщо її функція розподілу $F(x)$ є неперервною кусково–диференційовною функцією.

Властивості функції розподілу:

1. Функція розподілу є невід'ємною величиною, яка набуває значень від 0 до 1 $(0 \le F(x) \le 1)$.

2. Функція обмежена знизу і зверху: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

3. Функція розподілу є неспадною функцією, тобто $F_2(x) \ge F_1(x)$, якщо $x_2 > x_1$.

4. Ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення з проміжку $[\alpha; \beta)$ дорівнює приросту функції $F(x)$ на цьому проміжку, тобто $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

5. Ймовірність будь – якого окремо взятого значення НВВ дорівнює нулю: $P(X = x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P(x \le X \le x + \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F(x) = 0$.

6. $P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X \le \beta)$

7. Якщо можливі значення НВВ належать інтервалу (α, β), то $F(x) = 0$, при $x \le \alpha$ і $F(x) = 1$, при $x \ge \beta$.

32.2. **Щільність розподілу ймовірностей**

Означення. Перша похідна функції розподілу $F(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей (диференціальною функцією розподілу) і позначається $f(x)$.

Отже, $$f(x)=F'(x).$$

Із означення $f(x)$ виплива, що $F(x)$ є первісною функції $f(x)$. Крива $y=f(x)$ називається кривою розподілу ймовірностей або кривою розподілу.

Властивості $f(x)$:

1. $f(x)\geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$;
3. $P(\alpha\leq X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$;
4. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Приклад 1. Знайти $f(x)$, $P(2\leq X<7)$, $P(X=2)$, якщо

$$F(x)=\begin{cases}0, \textit{якщо } x\leq 0,\\ \frac{1}{4}x, \textit{якщо } 0<x\leq 4,\\ 1, \textit{якщо } x>4.\end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $f(x)=F'(x)$, то $f(x)=\begin{cases}0, \textit{якщо } x\leq 0,\\ \frac{1}{4}, \textit{якщо } 0<x\leq 4,\\ 0, \textit{якщо } x>4.\end{cases}$

$$P(2\leq X<7)=P(2\leq X<4)+P(4\leq X<7)=\int_2^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx=$$

$$=\int_2^4 \frac{1}{4}dx+\int_4^7 0dx=\frac{1}{4}x\Big|_2^4+0=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Випадкова величина X є неперервною, тому ймовірність будь – якого окремого взятого значення дорівнює нулю: $P(X=2)=0$.

32.3. **Числові характеристики неперервних випадкових величин**

Означення $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$ у випадку НВВ аналогічні як і для ДВВ, але обчислюються за іншими формулами.

Математичне сподівання обчислюється за формулою: $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

Якщо неперервна ВВ набуває можливих значень з відрізку $[a,b]$, то $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$.

Дисперсію НВВ обчислюють за формулою:

$D(X)=M(X-M(X))^2=M(X^2)-M^2(X)$, де $M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$.

Приклад 2. Випадкова величина задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x \le 0,\\ \sin x, \text{ якщо } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ якщо } x > \dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \quad \text{Знайти } M(X),\ D(X).$$

Розв'язання. $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot xdx + \int\limits_{0}^{\pi/2} x\cdot \sin xdx + \int\limits_{\pi/2}^{+\infty} 0\cdot xdx =$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/2} x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx, dv = \sin xdx, \\ v = \int \sin xdx = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} \cos xdx =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0\cdot 1 + \sin x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2}\cdot 0 + \sin\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 1^2 = \int\limits_0^{\pi/2} x^2\cdot \sin xdx - 1 =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x^2, du = 2xdx, dv = \sin xdx, \\ v = \int \sin xdx = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} x\cos xdx - 1 =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, du = dx, dv = \cos xdx, \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin xdx - 1 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 - 1 = \frac{\pi}{2}.$$

32.4. **Основні закони розподілу неперервних випадкових величин**

Рівномірний розподіл

Означення. Неперервна випадкова величина X називається розподіленою рівномірно на відрізку $[a,b]$, де a і b – дійсні числа, якщо кожному значенню випадкової величини X на цьому відрізку відповідає одна і та ж щільність $\dfrac{1}{b-a}$, а поза відрізком – щільність дорівнює нулю, тобто

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x \le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ якщо } a < x \le b, \\ 0, \text{ якщо } x > b.\end{cases} \quad \text{Тут } a,b \text{ – параметри.}$$

Функція розподілу : $F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x < a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ якщо } a < x \le b, \\ 1, \text{ якщо } x > b.\end{cases}$

$M(X)$ має вигляд: $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_a^b \frac{x}{b-a}dx==\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$;

аналогічно знаходяться $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$; $\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}; P(\alpha \le X < \beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$.

32.5. **Показниковий (експоненціальний) закон розподілу**

Означення. Неперервна випадкова величина X (невід'ємна) називається розподіленою за показниковим законом з параметром λ, якщо її щільність ймовірності має вигляд $f(x)=\begin{cases}0, \textit{якщо}\ \ x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, \ \textit{якщо}\ \ x\ge 0,\end{cases}$ де $\lambda=\mathrm{const}>0$.

Число λ називається параметром показникового розподілу.

$$F(x)=\begin{cases}0, \textit{якщо}\ \ x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, \ \textit{якщо}\ \ x\ge 0,\end{cases}$$

Для показникового закону розподілу числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ дорівнюють $M(X)=\frac{1}{\lambda}$, $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$, і

$$P(\alpha<X<\beta)=\begin{cases}e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}, \text{яякщ}\ \alpha>0,\\ 1-e^{-\lambda\beta}, \text{яякщ}\ \alpha<0.\end{cases}$$

Показниковий розподіл застосовується в теорії масового обслуговування, дослідженні ділових операцій, в біології, фізиці, теорії надійності тощо.

32.6. **Нормальний закон розподілу та його параметри**

Одним з найважливіших законів розподілу випадкової величини є нормальний закон. Він зустрічається найбільш часто і є домінуючим над іншими законами розподілу та відіграє важливу роль в різних застосуваннях теорії ймовірності, особливо при побудові статистичних моделей. Такі випадкові величини, як помилки вимірювання, точки попадання в ціль при стрільбі, дальність польоту снаряда, тощо, підпорядковуються нормальному закону.

Означення. Нормальним називається розподіл неперервної випадкової величини, щільність розподілу якої має вигляд $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де a і σ – параметри нормального розподілу.

Функція розподілу має вигляд $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$.

Параметр a нормального розподілу є математичним сподіванням (центром розподілу), тобто $M(X)=a$, а параметр σ є $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sigma$.

Те,що випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами a і σ, позначають: X `$\sim N(a,\sigma)$.

Якщо $a=0$, $\sigma=1$, то нормальний розподіл називається нормованим. Щільність розподілу для нього: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Це функція Гаусса, значення

якої задаються в таблиці.

32.7. **Ймовірність попадання значень нормально розподіленої випадкової величини на інтервал. Правило трьох сігм.**

Ймовірність попадання ВВ на інтервал $(\alpha;\beta)$ обчислюється за формулою $P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$, або $P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$, де $F(x)$ – функція розподілу ВВ X,

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt,\quad P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Обчислення $P(\alpha<X<\beta)$ за останньою формулою досить складна процедура, так як інтеграл неможливо обчислити за допомогою елементарних функцій, тому для обчислення $P(\alpha<X<\beta)$ використовують зв'язок між функцією $F(x)$ та функцією Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Формула має вигляд: $P(\alpha<X<\beta)=\Phi(z_2)-\Phi(z_1)$, або

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Найбільш просто через функцію Лапласа виражається ймовірність попадання ВВ на проміжок довжиною 2ε, симетричний відносно центра розсіювання (математичного сподівання: $M(X)=a$). Маємо

$$P(|X-a|<\varepsilon)=P(a-\varepsilon<X<a+\varepsilon)=\Phi\left(\frac{(a+\varepsilon)-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(a-\varepsilon)-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Нехай $\varepsilon=3\sigma$, то $P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973$,

$$P(|X-a|\geq 3\sigma)=1-P(|X-a|<3\sigma)=1-0{,}9973=0{,}0027.$$

Отже, якщо ВВ розподілена за нормальним законом, то ймовірність того, що абсолютна величина відхилення X від її математичного сподівання a буде не меншою 3σ є дуже мала ($\approx 0{,}0027 \approx 0{,}3\%$).

Звідси випливає, що всі значення нормально розподіленої ВВ зосереджені біля центра розсіювання (математичного сподівання) у смузі $a-3\sigma \leq x \leq a+3\sigma$. В цьому полягає правило трьох сігм.

На практиці правило трьох сігм має широке застосування. Наприклад, якщо закон розподілу ВВ невідомий, але одержані статистичні дані говорять, що максимальне відхилення значень її від математичного сподівання не перевищує 3σ, тоді можна говорити, що ВВ нормально розподілена.

Приклад 3. Щільність розподілу ВВ X є функція $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$.
Знайти: 1) ймовірність того, що ВВ X набуде значень з інтервалу $(12;14)$;

2) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення ВВ X від її

математичного сподівання $M(X)$ буде менша 2.

Розв'язання. 1) Так як $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, то $a=10$, $2\sigma^2=8$, $\sigma=2$;

$$P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)$$

$=0{,}4772-0{,}3413=0{,}1359$. Отже, лише біля 13,6% значень ВВ X припадає на інтервал $(12;14)$.

2) $P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$,

$$P(|X-10|<2)=2\Phi\left(\frac{2}{2}\right)=2\Phi(1)=2\cdot 0{,}3413=0{,}6826.$$

Запитання до самоконтролю і приклади.

13. Дати означення неперервної випадкової величини (НВВ).
14. Які є способи задання НВВ.
15. Дати означення математичного сподівання $M(X)$.
16. Дати означення дисперсії $D(X)$.
17. Назвати властивості $D(X)$.
18. Яка функція називається щільністю розподілу ймовірностей ?
19. Назвати властивості щільності розподілу ймовірностей.

20. Сформулювати властивості функції розподілу неперервної випадкової величини та дискретної випадкової величини. Які спільні властивості вони мають?
21. Як визначити ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал, якщо вона задана щільністю розподілу?
22. Як визначити ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал, якщо вона задана функцією розподілу?
23. Якою формулою обчислюється математичне сподівання дискретної випадкової величини?
24. Якою формулою обчислюється математичне сподівання неперервної випадкової величини?
25. Якою формулою обчислюється дисперсія неперервної випадкової величини?
26. НВВ називається розподіленою рівномірно на відрізку, якщо…
27. Записати функцію розподілу рівномірно розподіленої ВВ.
28. НВВ називається розподіленою за показниковим законом…
29. Нормальний закон розподілу.
30. Обчислення $P(\alpha < X < \beta)$.
31. Правило трьох сігм.

Приклад 1. *а*)Задано закон розподілу *ДВВ X*

x_i	-4	-1	0	2
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4

Знайти функцію розподілу і побудувати її графік.

б) Записати $F(x)$, якщо $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 1, \\ ax^2, \text{ якщо } 1<x\le 5, \\ 0, \text{ якщо } x>5. \end{cases}$

Відповідь.

а) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le -4, \\ 0{,}1, \text{ якщо } -4<x\le -1, \\ 0{,}4, \text{ якщо } -1<x\le 0, \\ 0{,}6, \text{ якщо } 0<x\le 2, \\ 1, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$ *б*) $a=\dfrac{3}{124}, F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 1, \\ \dfrac{x^3-1}{124}, \text{ якщо } 1<x\le 5, \\ 1, \text{ якщо } x>5. \end{cases}$

Приклад 2. Випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x\le 2, \\ (x-2)^2, \text{ якщо } 2<x\le 3, \\ 1, \text{ якщо } x>3. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$ і обчислити $P(2{,}1<X<2{,}5)$.

Відповідь. $f(x)=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ \ x\le 2,\\ 2(x-2),\ \textit{якщо}\ \ 2<x\le 3,\\ 0,\ \textit{якщо}\ \ x>3.\end{cases}$ $P(2{,}1<X<2{,}5)=0{,}24$.

Приклад 3. Випадкова величина задана щільністю розподілу

$f(x)=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ \ x\le 0,\\ \cos x,\ \textit{якщо}\ \ 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0,\ \textit{якщо}\ \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ Знайти $M(X),D(X),\sigma(X)$.

Відповідь. $M(X)=0{,}57,D(X)=0{,}14,\sigma(X)=0{,}37.$

Приклад 4. Випадкова величина розподілена рівномірно в інтервалі $(2;8)$. Записати $f(X),F(X)$; знайти $P(0<X<5)$; обчислити $M(X),D(X),\sigma(X)$.

Відповідь. $f(x)=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ \ x\le 2,\\ \dfrac{1}{6},\ \textit{якщо}\ \ 2<x\le 8,\\ 0,\ \textit{якщо}\ \ x>8,\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ \ x\le 2,\\ \dfrac{x-2}{6},\ \textit{якщо}\ \ 2<x\le 8,\\ 1,\ \textit{якщо}\ \ x>8.\end{cases}$

$P(0<X<5)=\dfrac{1}{2}$, $M(X)=5,D(X)=3,\sigma(X)=\sqrt{3}.$

Приклад 5. Випадкова величина розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda=4$. Записати $f(X),F(X)$; знайти $P(0{,}1<X<1{,}5)$; обчислити $M(X),D(X),\sigma(X)$.

Відповідь. $f(x)=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ \ x<0,\\ 4e^{-4x},\ \textit{якщо}\ \ x\ge 0,\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ \ x<0,\\ 1-e^{-4x},\ \textit{якщо}\ \ x\ge 0,\end{cases}$

$P(0{,}1<X<1{,}5)=e^{-0{,}4}-e^{-6}$, $M(X)=\dfrac{1}{4},D(X)=\dfrac{1}{16},\sigma(X)=\dfrac{1}{4}.$

Приклад 6. Випадкова величина є нормально розподіленою з математичним сподіванням $a=-7$ і дисперсією $D(X)=9$, записати вирази для щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ та функції розподілу $F(x)$. Обчислити ймовірність попадання випадкової величини на проміжок $(-5;-3)$. Яка ймовірність відхилення ВВ від її математичного сподівання більш ніж на дві одиниці?

Відповідь. $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x+7)^2}{18}}$, $F(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{(t+7)^2}{18}}dt$,

$P(-5<X<-3)=0{,}1596$, $P(|X+7|\ge 2)=1-P(|X+7|<2)=0{,}5028.$

Рекомендована література

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Київ, А.С.К., 2001
2. Вища математика. Збірник задач, за ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика, К., Вища школа, 1999.
3. Вища математика. Методичні вказівки до виконання контрольних робіт для студентів технологічних та інженерних спеціальностей заочної форми навчання, К., НУХТ, 2003, інв. № 5401.

Зміст

Навчальне видання

М.А. МАРТИНЕНКО
О.П. ЗІНЬКЕВИЧ
А.М. ТКАЧУК

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів напрямів підготовки
6.051701 «Харчові технології та інженерія», 6.051401 «Біотехнологія»,
6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування», 6.040101 «Готельно-ресторанна справа»
денної та заочної форм навчання

Видання подається в авторській редакції

Підп. до друку 18.10.10. Ум. друк. арк. 13,94. Наклад 300 пр.
Зам. № 105-10А

РВЦ НУХТ. 01601 Київ-33, вул. Володимирська, 68
www.book.nuht.edu.ua
Свідоцтво про реєстрацію серія ДК № 1786 від 18.05.04 р.