РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ ЛАПЛАСА ТА ПУАССОНА

А.В. Дем'яненко
Національний університет харчових технологій

Методи розв'язку рівнянь Лапласа та Пуассона відомо з математичної фізики (відокремлення змінних, перехід до чи полярних координат).

В даній доповіді пропонується розв'язання рівняння Пуассона з використанням математичного додатку MathCad.

Для розв'язування рівнянь Пуассона $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F(x,y)$ та Лапласа (частковий випадок, коли F (x, y) = 0) - рівнянь еліптичного типу - призначена функція relax (*a, b, d, e, f, u, rjac*), що реалізує метод релаксації. Фактично, цю функцію можна використовувати для вирішення еліптичного рівняння загального вигляду [2]

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=F(x,y)$$

$$D=AC-B^2>0,$$

не може бути зведене до рівняння в скінчевих різницях

$$a_{i,j}u_{i+1,j}+b_{i,j}u_{i-1,j}+c_{i,j}u_{i,j+1}+d_{i,j}u_{i,j-1}+e_{i,j}u_{i,j}=f_{i,j}$$

Зокрема, для рівняння Пуассона коефіцієнти $a_{i,j}=b_{i,j}=c_{i,j}=d_{i,j}=1, e_{i,j}=-4$.

Ідея методу релаксації полягає в наступному. Якщо немає джерел (рівняння Лапласа), то значення функції в даному вузлі на поточному кроці *k* +1 визначається як середнє значення функції в найближчих вузлах на попередньому кроці *k*

$$u_{i,j}^{k+1}=\frac{1}{4}\left(u_{i-1,j}^{k}+u_{i+1,j}^{k}+u_{i,j-1}^{k}+u_{i,j+1}^{k}\right)$$

При наявності джерел різницева схема має вигляд

$$u_{i,j}^{k+1}=\frac{1}{4}\left(u_{i-1,j}^{k}+u_{i+1,j}^{k}+u_{i,j-1}^{k}+u_{i,j+1}^{k}\right)-\frac{h}{4}f_{i,j}$$

Метод релаксації сходиться досить повільно, оскільки фактично він використовує різницеву схему $\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau}=\frac{c}{h^2}\left(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}\right)$ з максимально можливим для двомірного випадку кроком $\tau=\frac{h^2}{4}$. В методі релаксації необхідно задати початкове наближення, тобто значення функції у всіх вузлах області, а так граничні умови.

Функція relax повертає квадратну матрицю, в якої [1]:

1) розташування елемента в матриці відповідає його положенню всередині квадратної області; 2) це значення наближує розв'язання в цій точці. Функція relax дає розв'язок з мінімальним відхиленням. Для

використання функції relax потрібно знати значення шуканої функції u(x,y) на всіх чотирьох сторонах квадратної області.

Розглянемо використання функції relax на прикладі:

$$n:=2^4 \qquad i:=0..n \qquad j:=0..n$$

Задаємо праву частину рівняння Пуассона – два точкових джерела

$$M_{i,j}:=0 \qquad M_{6,8}:=10 \qquad M_{10,8}:=-10$$

Задаємо значення параметрів функції relax

$$a_{i,j}:=1 \quad b:=a \quad c:=a \quad d:=a \quad f:=M \quad e:=-4\cdot a$$

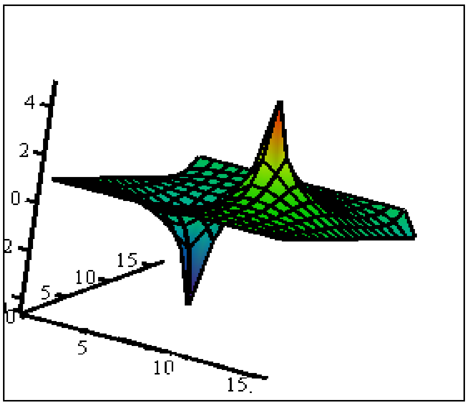
Задаємо граничні умови і початкове наближення – нулі у всіх внутрішніх точках області

$$u_{i,j}:=0 \quad u_{i,j}:=0 \quad u_{0,j}:=1-2\cdot\frac{j}{n} \quad u_{i,0}:=1 \quad u_{n,j}:=1-2\cdot\frac{j}{n}$$

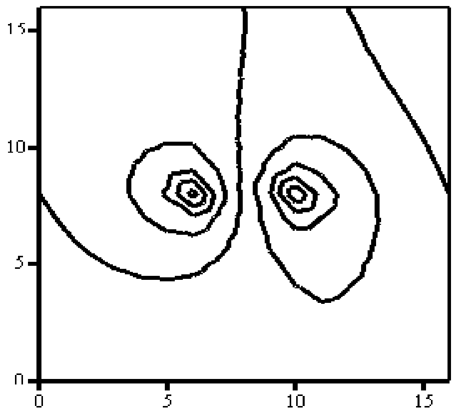
Знаходимо розв'язок $Z:=relax(a,b,c,d,e,f,u,0.95)$ і подаємо його графік у вигляді поверхні ліній рівнів.

Z =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0.875	0.75	0.625	0.5	0.375	0.25	0.125	0	-0.125	-0.25
1	1	0.853	0.704	0.551	0.392	0.23	0.069	-0.082	-0.21	-0.307	-0.38
2	1	0.833	0.662	0.481	0.289	0.085	-0.122	-0.311	-0.451	-0.514	-0.525
3	1	0.819	0.629	0.424	0.196	-0.058	-0.331	-0.591	-0.766	-0.775	-0.696
4	1	0.812	0.612	0.389	0.13	-0.182	-0.553	-0.954	-1.25	-1.123	-0.888
5	1	0.816	0.618	0.392	0.115	-0.248	-0.745	-1.423	-2.154	-1.581	-1.058
6	1	0.833	0.653	0.446	0.186	-0.178	-0.756	-1.838	-4.363	-1.989	-1.055
7	1	0.861	0.716	0.554	0.36	0.105	-0.263	-0.811	-1.471	-0.958	-0.554
8	1	0.897	0.794	0.694	0.596	0.501	0.411	0.327	0.25	0.181	0.123
9	1	0.932	0.871	0.831	0.828	0.892	1.079	1.458	1.962	1.311	0.788
10	1	0.958	0.929	0.931	0.991	1.162	1.555	2.464	4.829	2.313	1.256
11	1	0.971	0.956	0.973	1.045	1.209	1.516	2.013	2.578	1.855	1.202
12	1	0.969	0.951	0.958	1.007	1.113	1.285	1.496	1.615	1.327	0.95
13	1	0.956	0.921	0.903	0.912	0.951	1.014	1.072	1.057	0.888	0.65
14	1	0.933	0.872	0.822	0.786	0.764	0.749	0.722	0.653	0.519	0.346
15	1	0.906	0.814	0.727	0.646	0.57	0.496	0.414	0.314	0.189	...



Z



Z

ЛІТЕРАТУРА

1. Гурский Д.А., Турбина Е.С. Вычисления в MathCad 12- СПб.: Питер. 2006. – 544 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т.2 – М. 2008. – 560 с.

Керівники: О.К. Мазур, О.Л. Сєдих, С.В. Маковецька