АВП

Автоматизація виробничих процесів

Всеукраїнський науково-технічний журнал

1 (16)

КИЇВ 2003

УДК 681.5.01.23

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

О. П. Лобок, канд. физ.-мат. наук, Н .М. Луцька

В роботі пропонується оптимальний регулятор із зворотним зв'язком для керування типовим розподіленим процесом з інтегрально- квадратичним критерієм якості. Розглянемо типовий технологічний процес, що описується лінійним параболічним рівнянням. Нехай система задається рівнянням у відхиленнях у просторі (розподілі) станів

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}+d(x,t)u(t);\ t_0\le t\le T;\ 0\le x\le L \tag{1}$$

з початковою

$$\varphi(x,t_0)=\varphi_0(x)$$

та граничними умовами виду

$$\varphi(0,t)=0\,;\qquad \varphi(L,t)=0\,, \tag{2}$$

де t — поточний час процесу; x — просторова координата; $\varphi(x,t)$ — функція, яка описує відхилення реального стану системи від заданого або програмного стану в точці x в момент часу t; $d(x,t)$ — функція, що задає закон керування (наприклад, зосереджене точкове або рухливе); $u(t)$ — інтенсивність джерела енергії; a — коефіцієнт, що залежить від виду процесу, наприклад, якщо це процес теплопроводності, то a визначає коефіцієнт температуропроводності, якщо процес масообмінний, то a — коефіцієнт дифузії (турбулентної або молекулярної).

Розглянемо також інтегрально-квадратичний критерій оптимальності виду

$$I(u)=\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{0}^{L}\varphi^2(x,t)dxdt+\int\limits_{t_0}^{T}u^2(t)dt, \tag{3}$$

де перша складова визначає середньоквадратичне відхилення реального стану системи від бажаного, а друга — енергетичні витрати.

Задача полягає в тому, щоб знайти оптимальне керування в класі регуляторів зі зворотним зв'язком від стану системи, яке мінімізує критерій (3), а стан системи описується рівняннями (1), (2). Для розв'язання даної задачі можна використати принцип максимуму Понтрягіна або метод динамічного програмування Белмана. В даній роботі був використаний принцип максимуму. У відповідності до даного методу будувалася функція Гамільтона та оптимальне керування знаходилося з умови мінімізації даної функції. В результаті була одержана так звана двохточкова крайова задача. Використовуючи підхід, запропонований в [1], оптимальне керування $u(t)$ вдалося одержати у вигляді зворотного зв'язку від стану системи виду

$$u(t)=\int\limits_{0}^{L}R(y,t)\varphi(y,t)dy, \tag{4}$$

де

$$R(y,t)=0{,}5\int\limits_{0}^{L}d(x,t)S(x,y,t)dx. \tag{5}$$

У співвідношенні (5) $S(x,\ y,\ t)$ — розв'язок інтегро-диференціального рівняння типу Ріккаті

$$\frac{\partial S(x,y,t)}{\partial t}+a\frac{\partial^2 S(x,y,t)}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 S(x,y,t)}{\partial y^2}-2\delta(x-y)+$$

$$+0{,}5\int\limits_{0}^{L}d(\theta,t)S(x,\theta,t)d\theta\int\limits_{0}^{L}S(\varsigma,y,t)d(\varsigma,t)d\varsigma=0 \tag{6}$$

з початковою

$$S(x,y,T)=0$$

та граничними умовами

$$\begin{cases} S(x, L, t) = S(x, 0, t) = 0, & 0 \le x \le L; \\ S(L, y, t) = S(0, y, t) = 0, & 0 \le y \le L, \end{cases}$$

де $\delta(x - y)$ — дельта-функція Дірака.

Аналіз функції керування (4) показує, що функція $R(y,t)$, яка задає закон зворотного зв'язку, може бути визначена заздалегідь поза контуром керування і до початку процесу керування, так як вона не залежить від стану системи $\varphi(x, t)$. Але для визначення $R(y, t)$ необхідно знайти розв'язок досить складної крайової задачі (6). Для наближеного розв'язання (6) був використаний чисельно-аналітичний метод Гальоркіна [2], у відповідності до якого функція $S(x, y, t)$ розкладалася в ряд за системою заданих базисних функцій, в результаті чого рівняння з розподіленими параметрами (6) було зведено до матричної системи звичайних диференціальних рівнянь типу Ріккаті.

Числове моделювання було проведено за допомогою математичного пакету MatLab при наступних початкових даних: $a = 0{,}5$ — коефіцієнт температуропроводності або дифузії; $0 < t < 1$ — часова координата ($T = 1$); $0 < x < 1$ — просторова координата ($L = 1$); $\varphi(x, t_0) = 10x - x^2$ — початковий стан системи; $\varphi(x_0, t) = 0$ та $\varphi(x_L, t) = 0$ — граничні умови системи; функція, яка визначає місце знаходження пристрою керування, задавалася виразом $d(x, t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{\frac{(x-\nu(t))^2}{2\delta^2}}$, де $\delta = 3$ — коефіцієнт фокусування точкового джерела, $\nu(t) = \sin(t)$ — задає закон руху джерела енергії.

Нижче наведені результати обчислювальних експериментів. Рис. 1 описує динаміку зміни стану системи при оптимальному керуванні (4). Як бачимо, з плином часу функція розузгодження $\varphi(x, t)$ швидко зменшується, прямуючи до нульового значення по всій просторовій координаті. На рис. 2 зображено динаміку оптимального керування, яке, як і передбачалося, також монотонно прямує до нуля, що випливає з інтегрально- квадратичного критерію якості. Обчислення проводилися при різній кількості та при різних системах базисних функцій, також змінювали значення коефіцієнтів фокусування джерела енергії δ та закон руху джерела $\nu(t)$. Ре-

Рис. 1. Оптимальний перехідний процес

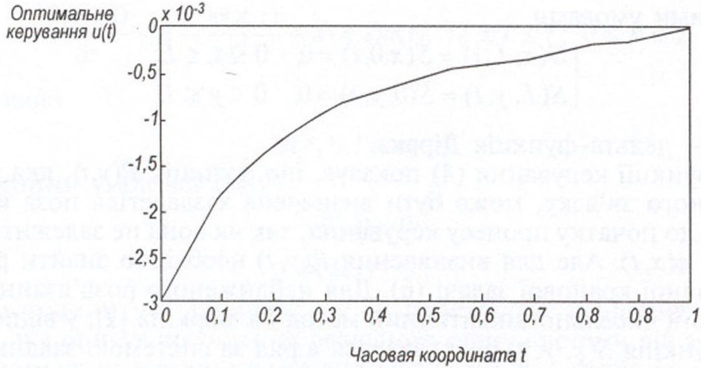

Рис. 2. Графік оптимального керування

зультати обчислень показують високу ефективність одержаного алгоритму оптимального керування.

Наведений підхід дозволяє синтезувати оптимальне керування для технологічних процесів, в першу чергу, для тепло- та масообмінних процесів з урахуванням вимог точності та обмеженості ресурсів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.

2. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1971.

3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами // Серия «Теоретические основы технической кибернетики». Главная редакция физико-математической литературы издательства. — М.: Наука, 1978. — 464 с.