

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Л.В.Мазник
Л.О.Коннова
Л.В.Чорноус

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчально-методичний посібник

Київ НУХТ 2013

УДК 519.86

Рецензент: **Т.А.Репіч**, канд. екон. наук, доцент кафедри маркетингу

Мазник Л.В., Коннова Л.О., Черноус Л.В. Економіко-математичне моделювання: Навчально-методичний посібник до вивчення дисципліни, виконання лабораторних та контрольних робіт для студентів за напрямами підготовки 6.030509 «Облік і аудит» та 6.030508 «Фінанси і кредит» всіх форм навчання – К.: НУХТ, 2013. – 157 с.

АНОТАЦІЯ

Викладено теоретичні та практичні питання щодо застосування економіко-математичних моделей в харчовій промисловості з використанням методів лінійного програмування, кореляційно-регресійного аналізу.

Розрахований на студентів денної та заочної форм навчання, які навчаються за напрямом підготовки 6.030509 «Облік і аудит» та 6.030508 «Фінанси і кредит».

Л.В.Мазник, канд.ек.наук
Л.О.Коннова,
Л.В.Черноус

УДК 519.86

© Л.В.Мазник, 2013
Л.О.Коннова,
Л.В.Черноус
© НУХТ, 2013

Зміст

1. Загальні відомості	5
2. Лабораторні заняття.....	5
3. Питання для підготовки до іспиту.....	7
4. Вказівки до виконання лабораторних робіт.....	8
5. Вказівки до виконання контрольної роботи студентами заочної форми навчання	8
Тема № 1. МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ НА РІВНІ ПІДПРИЄМСТВА.....	9
Лабораторна робота № 1 «Розрахунок оптимальної виробничої програми карамельного цеху»	9
Тема № 2. МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЗАВАНТАЖЕННЯ ОБЛАДНАННЯ	34
Лабораторна робота № 2 «Модель оптимального використання потужності»	34
Тема № 3. МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИРОБНИЧОЇ ПРОГРАМИ ПІДПРИЄМСТВА.....	37
Лабораторна робота № 3 «Оптимізація виробничої програми хлібозаводу»	37
Тема № 4. МЕТОДИ ВИРІШЕННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ТА ЇЇ МОДЕЛІ	49
Лабораторна робота № 4 «Оптимізація витрат на перевезення вантажу»	49
Тема № 5. НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ.....	59
Тема № 6. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	61
Лабораторна робота № 5 «Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами»	61
Тема № 7. КОРЕЛЯЦІЯ ДВОХ ЗМІННИХ.....	66
Лабораторна робота № 6 «Модель парної лінійної кореляційної залежності»	66
Тема № 8. ФУНКЦІЇ І ГРАФІКИ В ЕКОНОМЕТРИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ	80
Лабораторна робота № 7 «Пошук взаємозалежності між економічними процесами»	80
Тема № 9. ОДНОВИМІРНІ ЧАСОВІ РЯДИ ТА ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ	84
Лабораторна робота № 8 «Перевірка наявності тенденції середнього рівня»	88
Лабораторна робота № 9 «Згладжування емпіричних кривих (метод ковзної середньої)»	91
Тема № 10. МОДЕЛІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ.....	93
Лабораторна робота № 10 «Множинна лінійна кореляційна модель»	93
Тема № 11. МОДЕЛІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ.....	110
Лабораторна робота № 11 «Виробнича функція Кобба-Дугласа».....	110

Додаток 1	116
Додаток 2	118
Додаток 3	119
Додаток 4	120
Додаток 5	122
Додаток 6	127
Додаток 7	128
Додаток 8	130
Додаток 9	131
Додаток 10	136
Додаток 11	136
Додаток 12	137
Додаток 13	139
Додаток 14	140
Додаток 15	143
Додаток 16	148
Додаток 17	150
Додаток 18	151
Додаток 19	153
ЛІТЕРАТУРА	155

1. Загальні відомості

В даній дисципліні розглядаються принципи побудови економіко-математичних моделей і методів їх вирішення, порядок побудови математичних моделей економічних процесів, різновид задач оптимального планування, методи рішення цих задач на ПК, прийоми економічного аналізу результатів рішення. Також розглядаються основні методи одномірного прогнозування.

Предмет дисципліни – вивчення основних економіко-математичних методів і моделей, які використовуються для вироблення планових і управлінських рішень на підприємствах.

Мета дисципліни – навчити майбутніх спеціалістів використовувати в економічній діяльності методи лінійного програмування, кореляційно-регресійного аналізу і основні методи одномірного прогнозування економічних показників.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен **знати**: наукові основи побудови, вирішення і аналізу результатів задач за допомогою методів лінійного програмування, кореляційно-регресійного аналізу і основних методів одномірного прогнозування; **уміти**: визначати цільову функцію, формулювати основні умови та закономірності та описувати їх у вигляді математичних співвідношень, будувати кореляційно-регресійні моделі, застосовувати методи прогнозування основних техніко-економічних показників, а також розв'язувати основні задачі математичного програмування за допомогою ПК.

2. Лабораторні заняття

№	Тема заняття	Література
1	2	3
1	Моделі оптимального планування на рівні підприємства. Лабораторна робота № 1 Оптимізація виробничої програми карамельного цеху (асортиментна задача)	[1, с. 354-377; 2, с. 117-190; 6, с. 120-137; 7, с. 24-44, 102-128, 251; 251; 9, с. 45-48, 59; 13, с. 31-39, 41-47]
2	Модель оптимального завантаження обладнання Лабораторна робота № 2 Задачі оптимального використання потужностей	[1, с. 358-361; 2, с. 93-116; 5, с. 186-210; 6, с. 66; 7, с. 30-32, 45-54; 9, с.45-48, 51-52; 13, с.8, 31]
3	Модель оптимізації виробничої програми підприємства Лабораторна робота № 3 Оптимізація виробничої програми хлібозаводу	[1, с. 354-377; 2, с. 117-190; 6, с. 120-137; 7, с. 24-44, 102-128, 251; 251; 9, с. 45-48, 59; 13, с. 31-39, 41-47]

4	Методи вирішення транспортної задачі та її моделі Лабораторна робота № 4 Транспортна задача	[1, с. 354-377, 385-392, 436-455; 2, с. 69-72, 117-190; 6, с. 120-137; 7, с. 102-128, 251; 9, с. 45-58, 53-54, 59, 63-65; 13, с. 9-11, 31-39, 41-47, 60-63, 75-87]
5	Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем	[1, с. 468–491; 5, с. 186-211; 7, с. 139-147; 9, с. 69-70]
6	Динамічне програмування Лабораторна робота № 5 Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами	[20; 25]
7	Кореляція двох змінних Лабораторна робота № 6 Модель парної лінійної кореляційної залежності	[3, с. 233-263; 5, с. 415-463; 8, с. 25-38; 9, с. 43-46, 96-106, 111-130; 10, с. 44-60, 63-65, 102; 11, с. 23-29, 113-120, 127-140; 12, с. 41-58]
8	Функції і графіки в економетричному моделюванні Лабораторна робота № 7 Пошук взаємозалежності між економічними процесами	[1, с. 169-193; 5, с. 538-598; 9, с. 179-200; 10, с. 138-150; 12, с. 66-73]
9	Одновимірні часові ряди та їх моделювання Лабораторна робота № 8 Перевірка наявності тенденції середнього рівня Лабораторна робота № 9 Згладжування емпіричних кривих (метод ковзної середньої)	[5, с. 538-598; 10, с. 138-154; 11, с. 399-440]
10	Моделі множинної регресії Лабораторна робота № 10 Множинна лінійна кореляційна модель	[3 с.257-267; 5, с. 465-534; 8, с. 39-57, 89-100; 9, с. 96-99, 145-150; 10, с. 171-227, 249-272; 11, с. 46-68, 140-149, 46-68, 95-97, 245-265; 12, с. 93-105, 142-154]
11	Моделі множинної регресії Лабораторна робота № 11 Виробнича функція Кобба-Дугласа	[3, с. 257-267; 5, с. 525–534; 8, с. 39-57; 9, с. 96-99; 10, с. 171-227; 11, с. 46-68, 140-149; 12, с. 93-105, 143-154]

3. Питання для підготовки до іспиту

1. Поняття про економіко-математичні моделі і моделювання.
2. Класифікація економіко-математичних моделей.
3. Теоретичні основи математичного моделювання.
4. Схема класифікації економіко-математичних методів і моделей.
5. Етапи моделювання економічних процесів.
6. Формулювання задачі лінійного програмування.
7. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.
8. Рішення задачі лінійного програмування.
9. Загальна модель задачі лінійного програмування.
10. Принципи побудови оптимізаційних моделей.
11. Види оптимізаційних економіко-математичних моделей.
12. Поняття та вибір критерію оптимізації у задачах лінійного програмування.
13. Система обмежень в моделі оптимальної виробничої програми підприємства.
14. Моделі оптимального плану випуску продукції підприємства.
15. Структура моделі оптимального асортименту випуску продукції підприємства.
16. Матрична форма задачі оптимального випуску продукції на підприємстві.
17. Модель розрахунку оптимальної виробничої програми підприємства.
18. Модель оптимального завантаження обладнання.
19. Моделі оптимального складу сировини для виробництва продукції.
20. Моделі оптимальних планів використання ресурсів підприємства.
21. Математична модель транспортної задачі.
22. Основи теорії кореляції. Функціональний і кореляційний зв'язок.
23. Етапи кореляційного аналізу.
24. Лінійні і нелінійні кореляційні моделі.
25. Метод найменших квадратів для побудови рівняння регресії.
26. Показники тісноти зв'язку між змінними.
27. Оцінка достовірності і точності побудованих моделей.
28. Еластичність.
29. Графічне відображення кореляційних моделей
30. Поняття про множинну кореляцію.
31. Сутність виробничих функцій.
32. Етапи побудови множинних кореляційних моделей.
33. Основні характеристики виробничих функцій і їх економічний зміст.
34. Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія.
35. Етапи побудови парної лінійної регресійної моделі.
36. Система нормальних рівнянь парної лінійної регресійної моделі.
37. Лінійні моделі множинної регресії.
38. Структура та зміст лінійної економетричної моделі.
39. Приклади використання лінійних множинних регресійних моделей.

40. Економіко-математичні моделі продуктивності праці.
41. Характеристика парної лінійної регресійної моделі.
42. Оцінка точності та надійності параметрів моделі.
43. Стандартні похибки та надійність прогнозу.
44. Передумова застосування методу найменших квадратів (МНК).
45. Мультиколінеарність в економетричному моделюванні. Метод Феррара – Глобера.
46. Узагальнена економетрична модель.
47. Методи побудови узагальненої економетричної моделі.
48. Ізокванта.

4. Вказівки до виконання лабораторних робіт

Лабораторні роботи з дисципліни «Економіко-математичне моделювання», що виконують студенти, спрямовані на практичне засвоєння матеріалу з тем дисципліни, передбачених навчальною програмою. Завдання до лабораторних робіт дають студентам можливість опанувати методи знаходження розв'язків задач лінійного програмування, розв'язування оптимізаційних задач за допомогою програм SIMPL.EXE та Microsoft Excel, засвоїти основи кореляційного аналізу, етапи побудови лінійних та нелінійних, парних та множинних кореляційних моделей, набуті практичних аналітичних навичок математичного моделювання економічних процесів, які є основою економічних досліджень.

Лабораторні роботи студент виконує згідно з варіантом, який отримує у викладача. Роботу потрібно виконувати в зошитах для лабораторних робіт або на пронумерованих стандартних аркушах паперу (формат А4), які потім зшити.

5. Вказівки до виконання контрольної роботи студентами заочної форми навчання

Для виконання контрольної роботи потрібно ознайомитись з літературою з дисципліни (список додається). Моделювання здійснюють на основі вибірки статистичних даних, яку студент отримує з відповідних таблиць.

Робота повинна бути акуратно оформлена, мати титульну сторінку, на якій зазначаються: назви університету й дисципліни, прізвище та ініціали студента, факультет, курс, група, номери залікової книжки та варіанта контрольної роботи.

Контрольну роботу потрібно виконувати на пронумерованих стандартних аркушах паперу (формат А4), які потім зшити. В кінці роботи навести список використаної літератури згідно з правилами бібліографічного опису. На останній сторінці роботи проставити дату її виконання та свій власний підпис.

У контрольній роботі на основі виконаних лабораторних робіт необхідно побудувати моделі за темами: «Побудова, вирішення і аналіз задач лінійного програмування», «Модель оптимального завантаження обладнання», «Модель оптимізації виробничої програми підприємства», «Транспортна задача» «Одновимірні часові ряди та їх моделювання», «Функції і графіки в економетричному моделюванні», «Кореляція двох змінних», «Одновимірні

часові ряди та їх моделювання», «Моделі множинної регресії», «Нелінійні кореляційні моделі».

Варіант лабораторних робіт студент обирає за останньою цифрою номера залікової книжки (табл. 1).

Таблиця 1

Варіанти лабораторних робіт	
Цифра залікової книжки	Номер варіанта
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
0	10

Тема № 1. МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ НА РІВНІ ПІДПРИЄМСТВА.

Лабораторна робота № 1

«Розрахунок оптимальної виробничої програми карамельного цеху»

Лінійне програмування

Загальна модель задачі лінійного програмування повинна відповідати наступним вимогам:

1) Модель повинна мати лінійну цільову функцію, екстремальне значення якої знаходиться у процесі рішення задачі.

2) Математичні рівняння та тотожності, які входять до складу моделі повинні теж бути лінійними (тобто невідомі змінні, які входять в модель можуть мати тільки першу ступінь).

3) Змінні, які входять в модель не можуть бути від'ємними.

Модель записується у такому виді:

I. Цільова функція (критерій оптимальності)

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j \rightarrow \max(\min) \quad (1.1)$$

$$\text{або: } F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min), \quad j = 1, \dots, n$$

c_j – коефіцієнти при невідомих шуканих змінних x_j в цільовій функції (оптові ціни за одиницю продукції; собівартість одиниці продукції; питомий прибуток окремих видів продукції; питома рентабельність окремих видів продукції).

x_j – шукані змінні більшою частиною означають обсяги випуску j виду продукції;

j – види продукції.

II. Система обмежень.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3j}x_j + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right. \quad (1.2.)$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$m \succ n$$

$$\text{або: } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} b_i$$

a_{ij} – коефіцієнти при невідомих змінних x_j в рівняннях та тотожностях (можуть бути: норми витрат сировини, матеріалів на одиницю продукції; оптові ціни за одиницю продукції та ін.);

x_j – невідомі змінні;

b_j – рівень обмежень у рівняннях та тотожностях (рівень ресурсів: матеріальних, сировинних, трудових і т.д.).

III. Умови невід'ємності змінних

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

На базі наведеного математичного опису можна проілюструвати суть цієї

моделі так: необхідно визначити значення n невід'ємних змінних x_j , які задовольняють обмеженням 1.2 та забезпечують екстремальне значення (максимальне або мінімальне) цільової функції, яка виражена рівнянням 1.1.

До методів вирішення задач ЛП відносяться симплекс-метод, графічний метод.

Модель оптимізації виробничої програми підприємства

Однією з основних задач планування виробництва є розрахунок оптимального плану випуску продукції з урахуванням основних факторів, які впливають на його обсяг.

Вирішення оптимізаційної задачі розподіляється на три етапи: побудування економіко-математичної моделі; знаходження оптимального рішення задачі; аналіз результатів рішення.

Асортиментні задачі на кондитерських фабриках являють собою групу задач, в яких визначають виробничу програму фабрики з урахуванням впливу на підприємства внутрішніх факторів (можливостей обладнання, лімітів сировини, трудових чинників) та деяких зовнішніх вимог (по товарній продукції в цілому чи окремих її асортиментних груп та видів, середньої ціни асортименту, який випускається).

В задачі оптимізуємо виробничу програму підприємства по критерію максимального прибутку від реалізації продукції; відповідно мова піде про підвищення рентабельності виробництва та зниження собівартості.

Для побудування абстрактної економіко-математичної моделі асортиментної задачі введемо наступні умовні позначення:

j – індекс виду випускаємої продукції;

$j = 1, 2, \dots, n$ – кількість видів випускаємої продукції;

x_j – шукаємий випуск продукції j -того виду;

i – індекс виду ведучого обладнання;

$i = 1, 2, \dots, m$ – кількість одиниць ведучого обладнання;

a_{ij} – зв'язуючий коефіцієнт обмеження по обладнанню, визначаючий норму витрат часу роботи обладнання i -го виду на випуск одиниці продукції j -го виду;

A_i – потужність обладнання i -го виду за плановий період (рік);

B – собівартість продукції звітного чи планового року;

B_j – питома собівартість j -го виду продукції;

D_j' , D_j – границя попиту на продукцію j -го виду, відповідно верхній і нижній;

P_j – питомий прибуток від реалізації одиниці продукції j -го виду;

S_j – оптово-відпускна ціна одиниці продукції j -го виду (діюча);

S – вартість порівняльної товарної продукції звітного чи планового року.

Цільова функція має наступний вигляд:

$$F(x) = \sum_{j=1}^n P_j x_j \rightarrow \max.$$

При обмеженнях:

1. По ведучому обладнанню:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \leq A_i; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

2. По випуску товарної продукції:

$$\sum_{j=1}^n S_j x_j \geq S; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

3. По попиту на окремі види продукції:

$$x_j \leq D'_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_j \leq D_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

4. По собівартості продукції:

$$\sum_{j=1}^n B_j x_j \leq B_j; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

5. Умова невід'ємності змінних:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Задача

У карамельному цеху випускають декілька видів продукції. Продуктивність ліній визначається по варочному апарату. Кількість варильних апаратів – 1.

Відповідно до варіанту (додаток 5) необхідно побудувати та знайти рішення оптимального плану випуску продукції карамельного цеху.

Визначені оптові ціни, собівартість продукції і рівень попиту продукції, річна продуктивність апаратів по карамелі, а також норми витрат та ціни за 1 т сировини (додаток б).

Для виконання завдання необхідно:

- розрахувати обсяги ресурсів на заданий асортимент;
- побудувати модель оптимального випуску продукції підприємства по критерію оптимізації – **максимальний прибуток**;
- за допомогою нерівностей (рівнянь) побудувати та записати матрицю коефіцієнтів і функцію цілі;
- провести розрахунки за допомогою програми SIMPL.EXE або функції "Поиск решения" табличного процесора Microsoft Excel
- заповнити вихідну таблицю та виконати економічний аналіз отриманих результатів моделювання.

Приклад виконання лабораторної роботи.

У карамельному цеху випускають декілька видів продукції. Продуктивність ліній визначається по варочному апарату. Кількість варильних апаратів – 1.

Проведемо розрахунки обсягів ресурсів та значень обмежень для моделі (табл. 1.1, 1.2, 1.3).

Розв'язування

Робоча модель задачі

1. Цільова функція – отримати максимальний прибуток від випуску карамелі при визначених обмеженнях по продуктивності обладнання, собівартості, попиту, загальному випуску.

$$F(x) = 278,33x_1 + 424,37x_2 + 583,21x_3 + 346,7x_4 + 400x_5 + 566,67x_6 + 245x_7 + 341,4x_8 + 190,37x_9 \rightarrow \max$$

2. Обмеження:

1) По ведучому обладнанню:

$$A_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 4230$$

2) По випуску товарної продукції:

$$A_2 = 1958,33x_1 + 2546,26x_2 + 2175x_3 + 2175x_4 + 2100x_5 + 2166,7x_6 + 1815x_7 + 2178x_8 + 2136x_9 \geq 1603605,25$$

3) По собівартості продукції:

$$A_3 = 1680x_1 + 2121,89x_2 + 1591,79x_3 + 1828,3x_4 + 1700x_5 + 1600x_6 + 1570x_7 + 2178x_8 + 2136x_9 \leq 1323928,07$$

4) По максимальному та мінімальному попиту:

$$A_4 = x_1 \leq 89$$

$$A_5 = x_1 \geq 59$$

$$A_6 = x_2 \leq 110$$

$$A_7 = x_2 \geq 71$$

$$A_8 = x_3 \leq 80$$

$$A_9 = x_3 \geq 51$$

$$A_{10} = x_4 \leq 99$$

$$A_{11} = x_4 \geq 80$$

$$A_{12} = x_5 \leq 102$$

$$A_{13} = x_5 \geq 67$$

$$A_{14} = x_6 \leq 67$$

$$A_{15} = x_6 \geq 74$$

$$A_{16} = x_7 \leq 104$$

$$A_{17} = x_7 \geq 66$$

$$A_{18} = x_8 \leq 105$$

$$A_{19} = x_8 \geq 67$$

$$A_{20} = x_9 \leq 114$$

$$A_{21} = x_9 \geq 72$$

5) По выпуску продукции

$$A_{22} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 748,5$$

6) По финансовым возможностям

$$A_{23} = 831,63x_1 + 851,75x_2 + 860,27x_3 + 868,17x_4 + 890,02x_5 + \\ + 847,93x_6 + 890,05x_7 + 836,76x_8 + 830,88x_9 \leq 641314,28$$

7) Умова невід'ємності змінних:

$$A_{24} = x_1 \geq 0; A_{25} = x_2 \geq 0; A_{26} = x_3 \geq 0; A_{27} = x_4 \geq 0; A_{28} = x_5 \geq 0; A_{29} = x_6 \geq 0; \\ A_{30} = x_7 \geq 0; A_{31} = x_8 \geq 0; A_{32} = x_9 \geq 0.$$

Для реалізації задачі на комп'ютері будемо робочу матрицю (табл. 1.4), використовуючи вище наведену робочу модель.

За допомогою програми SIMPL.EXE знаходимо рішення оптимізаційної задачі. Активізуємо програму – натискаємо кнопку F7. У першому рядку записуємо функцію цілі. Далі вносимо ліву частину матриці, натискаємо кнопку F8, заповнюємо таблицю обмежень (рис. 1.1).

	x01	x02	x03	x04	x05	x06	
Min :	-278.33	-424.37	-583.21	-346.70	-400.00	-566.67	-245.00 -341.40 -190.37
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	4230.000 00
2	1958.33	2546.26	2175.00	2175.00	2100.00	2166.67	1603605.250 00
3	1680.00	2121.89	1591.79	1828.30	1700.00	1600.00	1323928.070 60
4	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	89.000 00
5	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	59.000 00
6	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	110.000 00
7	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	71.000 00
8	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	80.000 00
9	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	51.000 00
10	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	99.000 00
11	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	80.000 00
12	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	102.000 00
13	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	67.000 00
14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	99.000 00
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	74.000 00
16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	104.000 00
17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	66.000 00
18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	105.000 00

1 Help 2 Записать matr. 3 Читать matr. 4 Решение задачи 5 Печать matr.
6 Просмотр реш. 7 Редактирование 8 Редак.огранич. 9 Очистить matr. 10 Печать резул.

Рис. 1.1. Таблица обмежень

Таблиця 1.1

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Один. виміру	Види карамелі									Знак	Значення обмежень	
		Апельсин	Фрукт.-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина			
1. Шуканий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9			
2. Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	\geq	748,5	
3. Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	\geq	1603605,25	
4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	\leq	1323928,07	
5. Питомий прибуток 1т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	\rightarrow	290005,44	
6. Грошові витрати на сировину	тис. грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	\leq	641314,28	
7. Попит	max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114		
	min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72		
8. Товарна продукція	тис. грн.	143,15	229,60	153,12	189,66	172,26	195,22	161,72	178,81	180,06	\geq	1603,605	

Таблиця 1.2

Потреба у сировині, кг/т карамелі

Види сировини	Норми витрат, кг/т і									Ціна за 1 т сировини, грн.
	Апельсин	Фрукт.- ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	
Цукор-пісок	633,72	637,79	640,37	643,31	643,18	645,3	643,18	637,69	615,67	750
Патока	317,82	320,75	322,17	321,66	323,95	324,53	324,14	319,81	309,99	153
Пюре фруктове	153,07	163,65	164,72	165	180,98	165,58	180,98	154,03	161,46	1800
Есенція	0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0	0,96	0,96	0,92	14400
Кислота молочна	6,03	6	6,03	6,04	6,07	6,07	6,07	6,07	5,5	1980
Кислота лимонна	3,06	2	4,02	6,52	3,08	2,02	3,08	3,08	3,3	2100
Вартість сировини на 1 т (тис. грн./т)	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	–

Таблиця 1.3

Річна продуктивність ліній

	Апельсин	Фрукт.- ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т
Лінія 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4230

Таблиця 1.4

Робоча модель оптимального плану випуску продукції

Показники	Види карамелі									Обмеження	
	Апельсин	Фрукт. - ягідн. десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	знак	величина
	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉		
Функція цілі	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	→	max

Обмеження:

1	По обладнанню	1	1	1	1	1	1	1	1	1	≤	4230
2	Товарна продукція	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,7	1815	2178	2136	≥	1603605,25
3	Собівартість	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,6	≤	1323928,07
4	По попиту	1									≤	89
5		1									≥	59
6			1								≤	110
7			1								≥	71
8				1							≤	80
9				1							≥	51

Закінчення таблиці 1.4

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	знак	величина
10					1						≤	99
11					1						≥	80
12						1					≤	102
13						1					≥	67
14							1				≤	99
15							1				≥	74
16								1			≤	104
17								1			≥	66
18									1		≤	105
19									1		≥	67
20										1	≤	114
21										1	≥	72
22	Випуск продукції	1	1	1	1	1	1	1	1	1	≥	748,5
23	По фінансовим можливостям	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	≤	641314,28

Вирішуємо задачу – натискаємо кнопку F4. На питання: «Вирішувати з висновком проміжних результатів?» відповідаємо “Y”. В результаті отримаємо таблиці: «Оптимальне рішення» та «Вивід відхилень по рядках» (рис. 1.2 та рис. 1.3).



Рис. 1.2. Оптимальне рішення

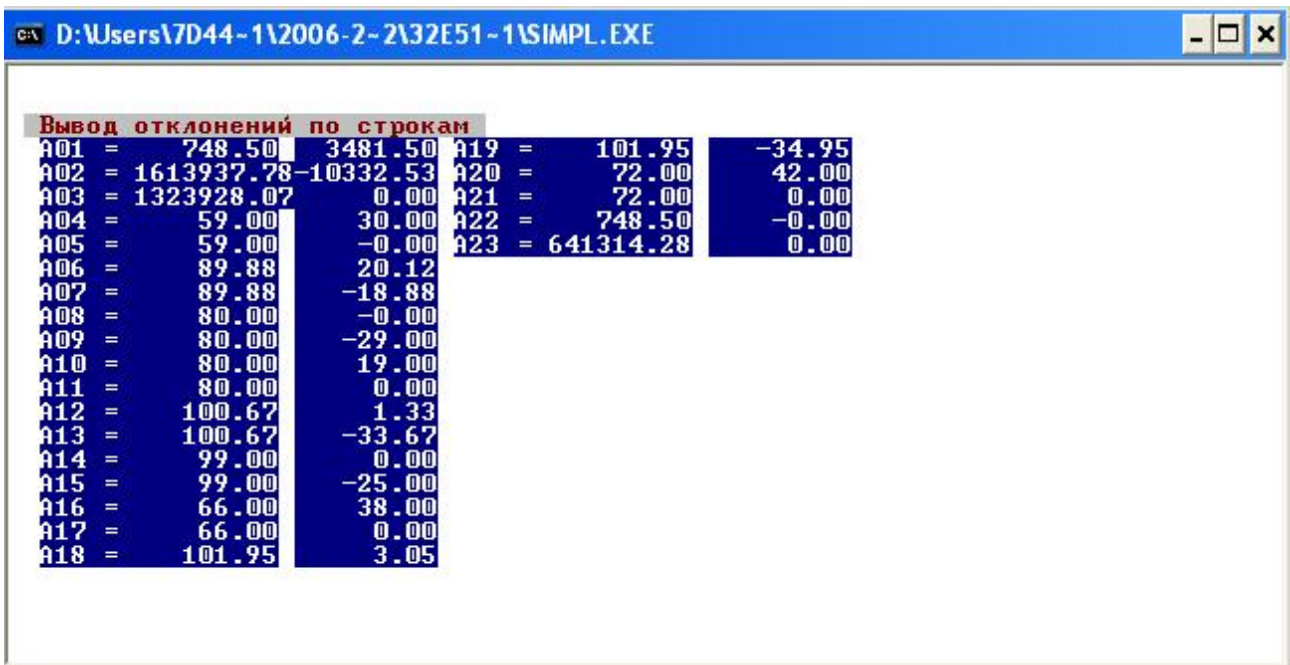


Рис. 1.3. Вивід відхилень по рядках

Отримані результати оптимізації виробничої програми лінії виробництва карамелі з фруктовими наповнювачами зводимо в таблицю 1.5.

Таблиця 1.5

Результати оптимізації

Показники	Од. виміру	Величина		Відхилення	
		до оптимізації	після оптимізації	абсолютне +, -	відносне %
1	2	3	4	5	6
1. Обсяг випуску карамелі, всього	т	748,5	748,5	0	0
в т.ч. "Апельсин"	т	73,1	59	-14,1	-19,29
"Фруктово-ягідний букет"	т	90,17	89,88	-0,29	-0,32
"Десертна"	т	70,4	80	9,6	13,64
"Яблуко"	т	87,2	80	-7,2	-8,26
"Абрикос"	т	82,03	100,67	18,64	22,72
"Вікторія"	т	90,1	99	8,9	9,88
"Слива"	т	89,1	66	-23,1	-25,93
"Лимон"	т	82,1	101,95	19,85	24,18
"Малина"	т	84,3	72	-12,3	-14,59
2. Використання потужності	%	17,7	17,7	0	0
3. Собівартість товарної продукції	тис. грн.	1323,9	1323,9	0	0
4. Товарна продукція	тис. грн.	1603,6	1613,9	10,3	0,64
5. Прибуток від реалізації	тис. грн.	279,67	290,00	10,33	3,69
6. Витрати на 1 грн. товарної продукції	коп.	82,56	82,03	-0,53	-0,64
5. Рентабельність	%	21,1	21,9	0,78	-

Аналіз результатів

Аналіз попиту на продукцію в асортименті дозволив оптимізувати обсяги виробництва з метою збільшення прибутку від реалізації.

В результаті оптимізації прибуток від реалізації карамелі збільшився на 10332,53 грн. без зміни обсягу виробництва.

В межах попиту збільшився випуск карамелі: "Абрикос" – на 18,64 тонни, або на 22,72 %; "Десертна" – на 6,9 тонн, або на 13,64 %; "Вікторія" – на 8,9 тонн, або на 9,88 %; "Лимон" – на 19,85 тони, або на 24,18 %.

Знизився випуск карамелей: "Апельсин" – на 14,1 тонн, або на 19,29 %; "Фруктово-ягідний букет" – на 0,29 тонни, або на 0,32 %; "Яблуко" – на 7,2 тонн, або на 8,26 %; "Слива" – на 23,1 тонн, або на 25,93 %; "Малина" – на

12,3 тонни, або на 14,59 %.

Витрати на 1 грн. виробленої продукції зменшуються на 0,53 коп., або на 0,63 %. Рентабельність випуску карамелі збільшиться на 0,78 %.

Послідовність розв'язування задачі «Оптимізація виробничої програми карамельного цеху» за допомогою табличного процесора Microsoft Excel.

I.

1. Створюємо таблиці похідних даних (рис. 1.4) де розраховуємо питомий прибуток, товарну продукцію, потребу і вартість сировини.

M9 $=\text{СУММПРОИЗВ}(D\$6:L\$6;D9:L9)$												
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1												
2	Таблиця 1 <i>Вихідні дані для побудови робочої моделі</i>											
3	Показники	Один.вим.	Вид карамелі									Всього
4			Апельсин	Фрукт.-агідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	
5	1.Шукаємий випуск продукції	т	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	
6	2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	748,5
7	3.Оптова ціна	грн.	1958,3	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	1603605,25
8	4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	1323928,07
9	5.Питомий прибуток 1 т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	279677
10	6.Грошові витрати на сировину	тис.грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	641314,28
11	7.Полит											
12	max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114	
13	min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72	
14	Товарна продукція	тис.грн.	143,15	229,60	153,12	189,66	172,26	195,22	161,72	178,81	180,06	1603,61
15												
16	Таблиця 2. <i>Потреба у сировині, кг/т карамелі</i>											
17	Показники		Вид карамелі									Ціна 1 т сировини, грн.
18			Апельсин	Фрукт.-агідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	
19	Цукор-пісок		633,72	637,79	640,37	643,31	643,18	645,3	643,18	637,89	615,67	750
20	Патока віг		317,82	320,75	322,17	321,66	323,95	324,53	324,14	319,81	309,99	153
21	Пюре фруктове		153,07	163,65	164,72	165	180,98	165,58	180,98	154,03	161,46	1800
22	Есенція		0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0	0,96	0,96	0,92	14400
23	Кислота молочна 40% кр.		6,03	6	6,03	6,04	6,07	6,07	6,07	6,07	5,5	1980
24	Кислота лимонна		3,06	2	4,02	6,52	3,08	2,02	3,08	3,08	3,3	2100
25	Вартість сировини (на 1 т)	тис.грн/т	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	-
26												
27	Таблиця 3. <i>Річна продуктивність ліній</i>											
28			Апельсин	Фрукт.-агідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т
29	Лінія 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	4230

Рис. 1.4. Розрахунки

Розраховуємо по формулах питомий прибуток 1 т продукції, товарну продукцію.

Грошові витрати на сировину розраховуємо в таблиці 2 і робимо посилку з таблиці 1 на підсумковий рядок таблиці 2.

2. Запишемо задачу лінійного програмування в аналітичному вигляді:

$$F(x) = 278,33x_1 + 424,37x_2 + 583,21x_3 + 346,7x_4 + 400x_5 + 566,67x_6 + 245x_7 + 341,4x_8 + 190,37x_9 \rightarrow \max \quad (1.1)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 4230, \quad (1.2)$$

$$143,15x_1 + 229,60x_2 + 153,12x_3 + 189,66x_4 + 172,26x_5 + 195,22x_6 +$$

$$+ 161,72x_7 + 178,81x_8 + 180,06x_9 \geq 1603,605, \quad (1.3)$$

$$1680x_1 + 2121,89x_2 + 1591,79x_3 + 1828,3x_4 + 1700x_5 +$$

$$+ 1600x_6 + 1570x_7 + 2178x_8 + 2136x_9 \leq 1323928,07, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 89; & x_1 &\geq 59; \\ x_2 &\leq 110; & x_2 &\geq 71; \\ x_3 &\leq 80; & x_3 &\geq 51; \\ x_4 &\leq 99; & x_4 &\geq 80; \\ x_5 &\leq 102; & x_5 &\geq 67; \\ x_6 &\leq 67; & x_6 &\geq 74; \\ x_7 &\leq 104; & x_7 &\geq 66; \\ x_8 &\leq 105; & x_8 &\geq 67; \\ x_9 &\leq 114; & x_9 &\geq 72. \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 748,5, \quad (1.6)$$

$$831,63x_1 + 851,75x_2 + 860,27x_3 + 868,17x_4 + 890,02x_5 +$$

$$+ 847,93x_6 + 890,05x_7 + 836,76x_8 + 830,88x_9 \leq 641314,28 \quad (1.7)$$

3. Для рішення задачі на аркуші **Microsoft Excel** створюємо «Базовий варіант» (рис. 1.5).

Показники		Один.вим.	Вид карамелі									Всього	Напрямок	Базовий варіант
			Апельсин	Фрукт.-агідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина			
1.	Шукаємий випуск продукції	т	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9			
2.	Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	748,5	≥	748,5
3.	Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	1603605,25		1603605,25
4.	Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	1323928,07	≤	1323928,07
5.	Питомий прибуток 1 т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	279677,19		279677,19
6.	Грошові витрати на сировину	тис.грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	641314,28	≤	641314,28
7.	Попит													
	max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114			
	min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72			
14.	Товарна продукція	тис.грн.	143,154	229,596	153,12	189,66	172,263	195,217	161,717	178,814	180,065	1603,61	≥	1603,61
Річна продуктивність ліній														
			Апельсин	Фрукт.-агідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т	Напрямок	Базовий варіант
18.	Лінія 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	748,5	≥	4230
19.														
20.														
21.														
22.														

Рис. 1.5. Базовий варіант

Вихідні дані для побудови робочої моделі

M13		fx													
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1	Таблиця 1														
2			Вихідні дані												
3															
4	Показники	Одін. вип.	Вид карамелі								Всього	Направл.	Базовий варіант		
5			Апельсин	Фрукт-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Афрікос	Вікторія	Слива	Лімон				Малина	
6	1.Шукаємий випуск продукції	т	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9				
7	2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	=СУММ(D7:L7)	>=	748,5	
8	3.Оптова ціна	пр.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	=СУММПРОИЗВ(D\$7:L\$7;D8:L8)		1603605,25	
9	4. Собівартість 1 т	пр.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	=СУММПРОИЗВ(D\$7:L\$7;D9:L9)	<=	1323928,06	
10	5.Питомий прибуток 1 т	пр.	=D8-D9	=E8-E9	=F8-F9	=G8-G9	=H8-H9	=I8-I9	=J8-J9	=K8-K9	=L8-L9	=СУММПРОИЗВ(D\$7:L\$7;D10:L10)		279677,187	
11	6.Грошові витрати на сировину	тис.пр.	=D25	=E25	=F25	=G25	=H25	=I25	=J25	=K25	=L25	=СУММПРОИЗВ(D\$7:L\$7;D11:L11)	<=	641314,278	
12	7.Попит														
13	max	т.р/к	89	110	80	99	102	99	104	105	114				
14	min	т.р/к	59	71	51	80	67	74	66	67	72				
15	Товарна продукція	тис.пр.	=D8*D7/1000	=E8*E7/1000	=F8*F7/1000	=G8*G7/1000	=H8*H7/1000	=I8*I7/1000	=J8*J7/1000	=K8*K7/1000	=L8*L7/1000	=СУММ(\$D\$15:\$L\$15)	>=	1603,60525	

Рис. 1.6. Формули розрахунку

Потреба у сировині, кг/т карамелі

D16		Потреба у сировині, кг/т карамелі			
A	B	C	D	E	F
16	Таблиця 2		Потреба у сировині, кг/т карамелі		
17				Вид карамелі	
18	Показники		Апельсин	Фрут - ягідний десерт	Десерт на
19	Цукор-пісок	633,72	637,79	640,37	
20	Патока в/г	317,82	320,75	322,17	
21	Пюре фруктове	153,07	163,65	164,72	
22	Есенція	0,96	0,95	0,96	
23	Кислота молочна 40% кр.	6,03	6	6,03	
24	Кислота лимонна	3,06	2	4,02	
25	Вартість сировини (на 1 т)	тис.грн/т	=СУММПРОИЗВ(D19:D24;\$M\$21:\$M\$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(E19:E24;\$M\$21:\$M\$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(F19:F24;\$M\$21:\$M\$26)/1000

D16		Потреба у сировині, кг/т карамелі			
	G	H	I	J	
16					
17					
18	Яблуно	Абрикос	Вікторія	Слива	
19	643,31	643,18	645,3	643,18	
20	321,66	323,95	324,53	324,14	
21	165	180,98	165,58	180,98	
22	0,96	0,96	0	0,96	
23	6,04	6,07	6,07	6,07	
24	6,52	3,08	2,02	3,08	
25	=СУММПРОИЗВ(G19:G24;\$M\$21:\$M\$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(H19:H24;\$M\$21:\$M\$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(I19:I24;\$M\$21:\$M\$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(J19:J24;\$M\$21:\$M\$26)/1000	

D16		Потреба у сировині, кг/т карамелі			
	K	L	M	N	
16					
17					
18	Лінол	Маліна	Ціна 1 т сировини, грн.		
19	637,69	615,67	750		
20	319,81	309,99	153		
21	154,03	161,46	1800		
22	0,96	0,92	14400		
23	6,07	5,5	1980		
24	3,08	3,3	2100		
25	=СУММПРОИЗВ(K19:K24;\$M\$21:\$M\$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(L19:L24;\$M\$21:\$M\$26)/1000			

Рис. 1.7. Формули розрахунку

Річна продуктивність ліній

C28		Річна продуктивність ліній												
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
28	Таблиця 3	Річна про												
29			Апельси	Фрукт-ягідний десерт	Десерти	Яблуко	Абрикос	Віктори	Слива	Линон	Малина	Річна продуктивність, т	Напруженість	Базовий варіант
30	Лінія 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	=СУММПРОИЗВ(D30:L30;D7:L7)	< =	4230
31														
32														
33														

Рис. 1.8. Формули розрахунку

В комірки електронних таблиць заносимо вихідні дані: базовий випуск, оптову ціну, максимальний та мінімальний попит.

Цільова функція (1.1) і обмеження (1.2 – 1.7) у вигляді формул заносяться у комірки колонки «Всього» (рис. 1.6, 1.7 та 1.8).

В останню колонку за допомогою «Спеціальної вставки» вставляємо копію колонки «Всього» для аналізу результатів розрахунку.

II.

Після введення формул всіх обмежень і цільової функції для розв'язання задачі лінійного програмування за допомогою табличного процесора Microsoft Excel потрібно виконати такі дії:

1. Створити новий лист – «Оптимізація» і скопіювати в нього лист «Базовий варіант».

Можна створити лист «Оптимізація» за допомогою наступної операції: відкрити лист «Базовий варіант», нажати кнопку **Ctrl** і мишкою потягнути за лист вправо й відпустити спочатку клавішу мишки, а потім кнопку **Ctrl**. Одержимо новий лист із назвою «Базовий варіант (2)», змінимо назву на «Оптимізація».

На листі «Оптимізація» проведемо обчислення для завдання.

2. В головному меню виберіть пункт «Сервіс», далі – «Поиск решения» (рис.1.9).

The screenshot shows an Excel spreadsheet with a linear programming model. The model is structured as follows:

Показники	Один. вим.	Вид карамелі									Всього	Напрямок	Базовий варіант
		Апельсин	Фрукт.-ягідний	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина			
1. Шукаємий випуск продукції	т	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9			
2. Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	748,5	≥	748,5
3. Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	1603605,25		1603605,25
4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	1323928,07	≤	1323928,07
5. Питомий прибуток 1 т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	279677,19	≥	279677,19
6. Грошові витрати на сировину	тис. грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	641314,28	≤	641314,28
7. Попит													
max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114			
min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72			
Товарна продукція	тис. грн.	143,154	229,596	153,12	189,66	172,263	195,217	161,717	178,814	180,065	1603,61	≥	1603,61

Below the table is another table for 'Річна продуктивність ліній':

Лінія	Апельсин	Фрукт.-ягідний	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т	Напрямок	Базовий варіант
Лінія 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	748,5	≤	4230

The 'Поиск решения' (Solver) dialog box is open, showing the following settings:

- Установити цільову ячейку: $\$M\9
- Равной: максимальному значению значению: 0
- Изменяя ячейки: $\$D\$6:\$L\6
- Ограничения: (empty list)
- Buttons: Выполнить, Закреть, Параметры, Добавить, Изменить, Удалить, Восстановить, Справка

Рис. 1.9. Обчислення

3. У поле «**Установить целевую ячейку**» введіть адресу або ім'я комірки, в якій знаходиться формула функції, що досліджується на екстремум. В нашому випадку ввести **\$M\$9**.

Щоб максимізувати значення цільової комірки шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач «**Равной**» у положення **максимальному значенню (Max)**.

Щоб мінімізувати значення цільової комірки шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач у положення **мінімальному значенню (Min)**.

Щоб знайти значення в цільовій комірці, яке дорівнює деякому числу шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач у положення «**значенню**» і введіть у відповідне поле необхідне число.

В нашому випадку встановлюємо перемикач у положення **максимальному значенню (Max)**.

4. У поле «**Изменяя ячейки**» введіть імена чи адреси комірок шуканих невідомих змінних, розділяючи їх комами або за допомогою мишки вказати необхідні комірки. Допускається встановлення до 200 змінюваних комірок. В нашому випадку введемо **\$D\$6:\$L\$6**. Щоб автоматично знайти всі комірки, що впливають на цільову функцію, натисніть кнопку «**Предположить**».

5. У поле «**Ограничения**» введіть всі обмеження, що накладаються на пошук розв'язку. Для цього натисніть кнопку «**Добавить**». Відкриється вікно «**Добавление ограничения**» (рис. 1.10).

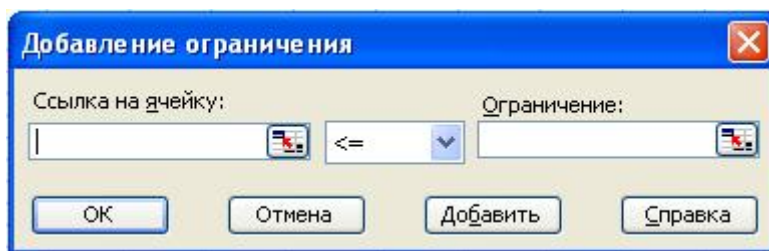


Рис. 1.10. Обмеження

У поле «**Ссылка на ячейку**» ввести комірку чи діапазон, на значення яких необхідно накласти обмеження. Поле «**Ограничение**» служить для завдання умови, що накладається на значення комірки чи діапазону, зазначеного в полі «**Ссылка на ячейку**». Виберіть необхідний умовний оператор (\leq , $=$, \geq , цел або двоич) (рис. 1.11).

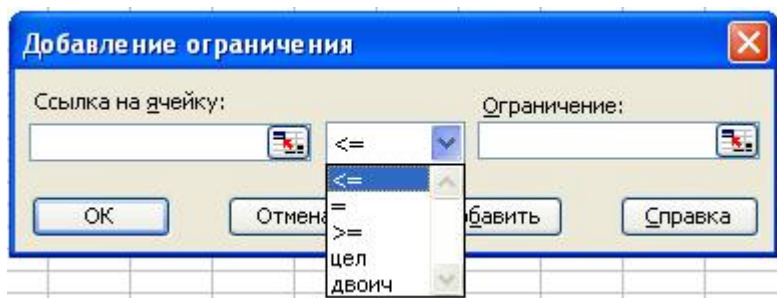


Рис. 1.11. Завдання умови обмежень

Введіть обмеження – число, формулу, посилання на діапазон – у поле праворуч від списку, що розкривається. Натисніть на кнопку «Добавить», щоб, не повертаючись у вікно діалогу «Параметры поиска решения», накласти нову умову на пошук розв'язку задачі. В нашому випадку потрібно ввести (рис. 1.12):

- \$D\$13<=\$D\$6,
- \$D\$6 <=\$D\$12,
- \$E\$13<=\$E\$6,
- \$E\$6<=\$E\$12,
- \$F\$13<=\$F\$6,
- \$F\$6<=\$F\$12,
- \$G\$13<=\$G\$6,
- \$G\$6<=\$G\$12,
- \$H\$13<=\$H\$6,
- \$H\$6<=\$H\$12,
- \$I\$13<=\$I\$6,
- \$I\$6<=\$I\$12,
- \$J\$13<=\$J\$6,
- \$J\$6<=\$J\$12,
- \$K\$13<=\$K\$6,
- \$K\$6<=\$K\$12,
- \$L\$13<=\$L\$6,
- \$L\$6 <=\$L\$12,
- \$M\$10<=\$O\$10,
- \$M\$14<=\$O\$14,
- \$M\$18<=\$O\$18,
- \$M\$6<=\$O\$6,
- \$M\$8<=\$O\$8.

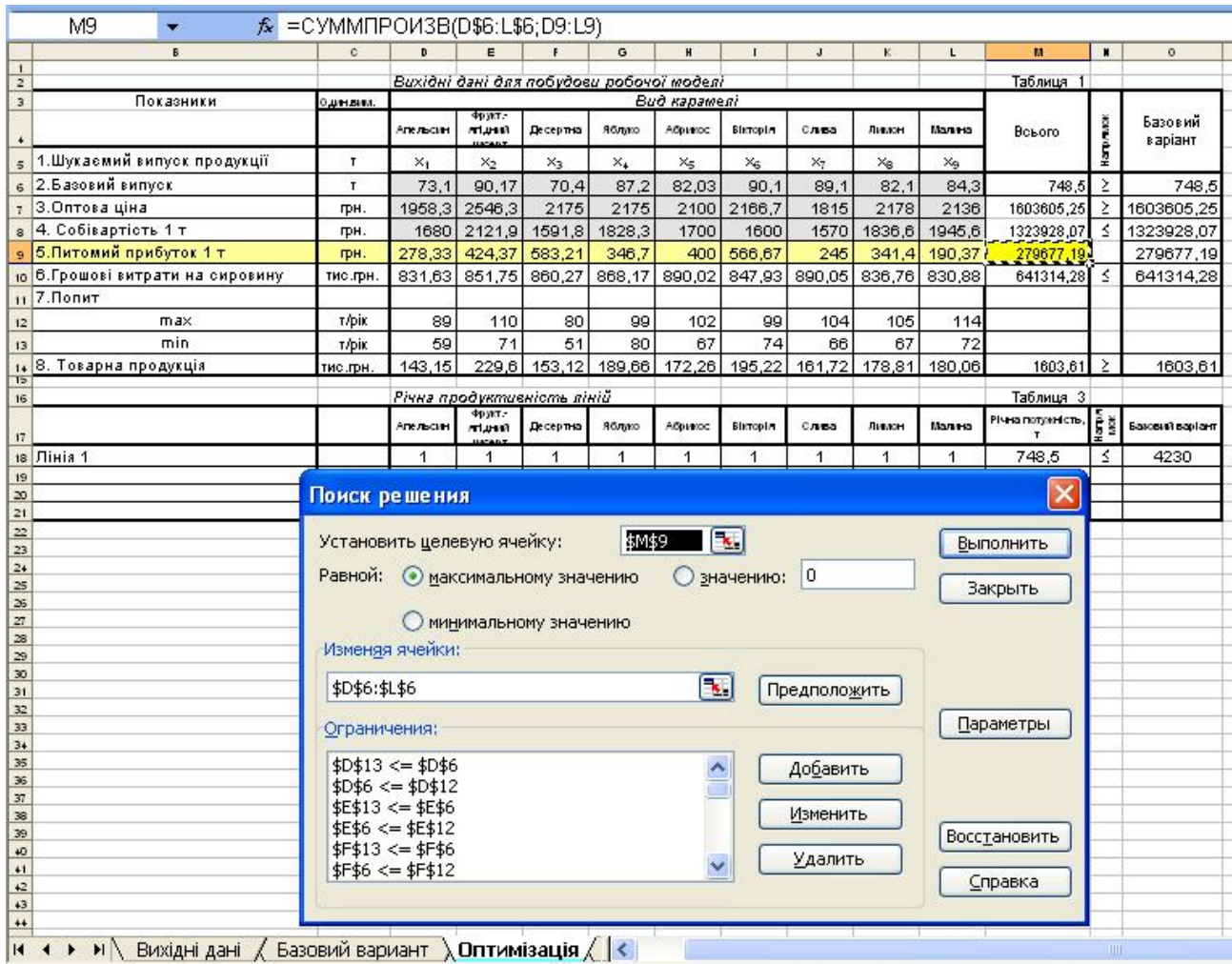


Рис. 1.12. Завдання обмежень

6. Натисніть кнопку «**Выполнить**».

7. В результаті виконання програми повинно з'явитися повідомлення про коректність моделі і правильності розрахунків.

За допомогою цього діалогового вікна можна викликати звіти трьох типів: «**Результаты**», «**Устойчивость**», «**Пределы**» (рис. 1.13).

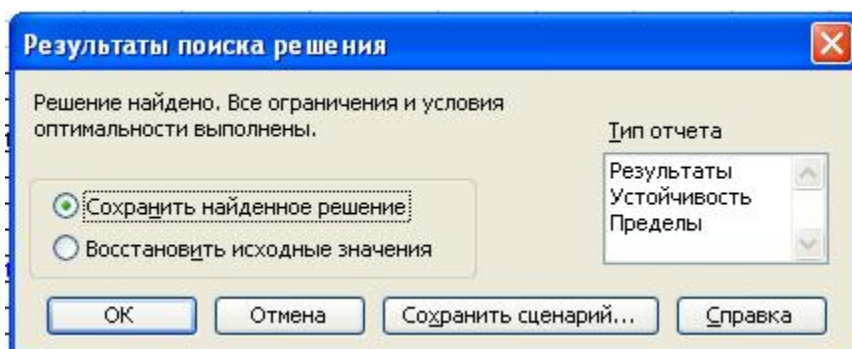


Рис. 1.13. Результаты выполнения программы

8. Щоб зберегти знайдений розв'язок, встановіть перемикач у діалоговому вікні «Результаты поиска решения» в положення «Сохранить найденное решение».

9. Отже, оптимальний розв'язок лінійної задачі програмування має вигляд:

$$x_1=59; x_2=89,87; x_3=80; x_4=80; x_5=100,65; x_6=99; \\ x_7=66; x_8=101,98; x_9=72; F(x)_{\max} = 290005,44.$$

10. Більш детальну інформацію по результатам оптимізації дозволяють отримати звіт по результатам, звіт по стійкості, звіт по границям.

Звіт за результатами

Звіт складається із трьох таблиць (рис. 1.14):

Таблиця 1 наводить відомості про цільову функцію.

У колонці «Исходно» наведені значення цільової функції до початку обчислень.

Таблиця 2 наводить значення шуканих змінних, отриманих в результаті рішення задачі.

Таблиця 3 показує результати оптимального рішення для обмежень і для граничних умов.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам						
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат			
\$M\$9	грн. Всего	279677,19	290005,44			
Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат			
\$D\$6	т x1	73,1	59			
\$E\$6	т x2	90,17	89,87000085			
\$F\$6	т x3	70,4	80			
\$G\$6	т x4	87,2	80			
\$H\$6	т x5	82,03	100,651583			
\$I\$6	т x6	90,1	99			
\$J\$6	т x7	89,1	66			
\$K\$6	т x8	82,1	101,9784161			
\$L\$6	т x9	84,3	72			
Ограничения						
Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница	
\$M\$6	т Всего	748,5	\$M\$6 >=\$D\$6	связанное	0	
\$M\$8	грн. Всего	1323928,07	\$M\$8 <=\$O\$8	связанное	0	
\$M\$10	тис.грн. Всего	641314,28	\$M\$10 <=\$P\$10	связанное	0	
\$M\$14	тис.грн. Всего	1613,93	\$M\$14 >=\$Q\$14	не связан	10,33	
\$M\$18	Линия 1 Річна потужність,	748,5	\$M\$18 <=\$R\$18	не связан	3481,5	
\$D\$13	т/рік x1	59	\$D\$13 <=\$D\$6	связанное	0	
\$E\$13	т/рік x2	71	\$E\$13 <=\$E\$6	не связан	18,8700009	
\$F\$13	т/рік x3	51	\$F\$13 <=\$F\$6	не связан	29	
\$G\$13	т/рік x4	80	\$G\$13 <=\$G\$6	связанное	0	
\$H\$13	т/рік x5	67	\$H\$13 <=\$H\$6	не связан	33,651583	
\$I\$13	т/рік x6	74	\$I\$13 <=\$I\$6	не связан	25	
\$J\$13	т/рік x7	66	\$J\$13 <=\$J\$6	связанное	0	
\$K\$13	т/рік x8	67	\$K\$13 <=\$K\$6	не связан	34,9784161	
\$L\$13	т/рік x9	72	\$L\$13 <=\$L\$6	связанное	0	
\$D\$6	т x1	59	\$D\$6 <=\$D\$12	не связан	30	
\$E\$6	т x2	89,87000085	\$E\$6 <=\$E\$12	не связан	20,1299991	
\$F\$6	т x3	80	\$F\$6 <=\$F\$12	связанное	0	
\$G\$6	т x4	80	\$G\$6 <=\$G\$12	не связан	19	
\$H\$6	т x5	100,651583	\$H\$6 <=\$H\$12	не связан	1,34841695	
\$I\$6	т x6	99	\$I\$6 <=\$I\$12	связанное	0	
\$J\$6	т x7	66	\$J\$6 <=\$J\$12	не связан	38	
\$K\$6	т x8	101,9784161	\$K\$6 <=\$K\$12	не связан	3,0215839	
\$L\$6	т x9	72	\$L\$6 <=\$L\$12	не связан	42	

Рис. 1.14. Звіт за результатами

Для **Обмежень** у графі «**Формула**» наведені залежності, які були введені в діалогове вікно «**Поиск решения**»; у графі «**Значение**» наведені величини використаного ресурсу; у графі «**Разница**» показана кількість невикористаного ресурсу. Якщо ресурс використовується повністю, то в графі «**Статус**» вказується «зв'язане»; при неповному використанні ресурсу в цій графі вказується «не зв'язаний».

Для **Граничних умов** приводяться аналогічні величини з тією лише різницею, що замість величини невикористаного ресурсу показана різниця між значенням змінної в знайденому оптимальному рішенні й заданим для неї граничною умовою.

Отже, у звіті по результатах порівнюються базовий і оптимальний обсяги виробництва. Тут вказані коефіцієнти цільової функції загалом до і після оптимізації, а також обмеження. Навпроти кожного обмеження є статус. Якщо статус зв'язаний, то це означає що ресурс вже використаний повністю і немає можливості збільшити його. Якщо статус не зв'язаний, то це означає що відповідного показника є більше, ніж потрібно, частина його не використана.

Звіт по стійкості

Звіт по стійкості (рис. 1.15) складається із двох таблиць.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости							
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
\$D\$6	т x1	59	0	278,33	22,5601936	1E+30	
\$E\$6	т x2	89,8700009	0	424,37	43,0207005	66,48370401	
\$F\$6	т x3	80	253,840877	583,21	1E+30	253,8408773	
\$G\$6	т x4	80	0	346,7	44,0964108	1E+30	
\$H\$6	т x5	100,651583	0	400	236,314152	83,68737167	
\$I\$6	т x6	99	255,688705	566,67	1E+30	255,6887046	
\$J\$6	т x7	66	0	245	128,348705	5,83915E+17	
\$K\$6	т x8	101,978416	0	341,4	54,6793853	15,31363159	
\$L\$6	т x9	72	0	190,37	163,845444	1E+30	

Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$M\$6	т Всего	748,5	-1397,18	748,5	0,1182513	0,110080135
\$M\$8	грн. Всего	1323928,07	0,21	1323928,066	6516,49364	1361,065582
\$M\$10	тис.грн. Всего	641314,28	1,63	641314,2785	81,4922932	123,4850292
\$M\$14	тис.грн. Всего	1613,93	0,00	1603,605254	10,3282488	1E+30
\$M\$18	Лінія 1 Річна потужність, т	748,5	0	4230	1E+30	3481,5
\$D\$13	т/рік x1	59	22,5601936	0	2,05102063	23,74299558
\$E\$13	т/рік x2	71	0	0	1E+30	18,87000085
\$F\$13	т/рік x3	51	0	0	1E+30	29
\$G\$13	т/рік x4	80	44,0964108	0	2,55906249	19
\$H\$13	т/рік x5	67	0	0	1E+30	33,65158305
\$I\$13	т/рік x6	74	0	0	1E+30	25
\$J\$13	т/рік x7	66	128,348705	0	1,21101491	30,22252784
\$K\$13	т/рік x8	67	0	0	1E+30	34,9784161
\$L\$13	т/рік x9	72	163,845444	0	3,34994814	7,017564743

Рис. 1.15. Звіт по стійкості

У **таблиці 1** приводяться наступні значення для змінних:
результат рішення задачі;
нормована вартість, тобто додаткові двоїсті змінні V_j , які, показують, наскільки змінюється цільова функція при примусовому включенні одиниці цієї продукції в оптимальне рішення;
коефіцієнти цільової функції;
граничні значення приросту коефіцієнтів Δc_j цільової функції, при яких зберігається набір змінних, які входять в оптимальне рішення.

У **таблиці 2** приводяться аналогічні значення для обмежень:
величина використаних ресурсів;
тіньова ціна, тобто двоїсті оцінки z_i , які показують, як зміниться цільова функція при зміні ресурсів на одиницю;
значення приросту ресурсів Δb_j , при яких зберігається оптимальний набір змінних, які входять в оптимальне рішення.
Задачі аналізу, які можна вирішувати за допомогою приведених величин Δc_j й Δb_j .

Показник «Нормована вартість», показує як зміниться цільова функція при примусовому випуску одиниці j -го виду продукції. Цей звіт показує, яка продукція є вигідною.

В нашому випадку є вигідним збільшення обсягів виробництва карамелі «Десертна» і «Вікторія».

Звіт по границям

Цей звіт наведений на рис. 1.16. У ньому показано, у яких межах може змінюватися випуск продукції, що увійшла в оптимальне рішення, при збереженні структури оптимального рішення:

- приводяться значення x_j в оптимальному рішенні;
- приводяться нижні межі зміни значень x_j .

Целевое			
Ячейка	Имя	Значение	
\$M\$9	грн. Всего	290005,44	

Изменяемое			Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
Ячейка	Имя	Значение				
\$D\$6	т x1	59	59	290005,437	59	290005,437
\$E\$6	т x2	89,8700009	89,8700009	290005,437	89,8700009	290005,437
\$F\$6	т x3	80	80	290005,437	80	290005,437
\$G\$6	т x4	80	80	290005,437	80	290005,437
\$H\$6	т x5	100,651583	100,651583	290005,437	100,651583	290005,437
\$I\$6	т x6	99	99	290005,437	99	290005,437
\$J\$6	т x7	66	66	290005,437	66	290005,437
\$K\$6	т x8	101,978416	101,978416	290005,437	101,978416	290005,437
\$L\$6	т x9	72	72	290005,437	72	290005,437

Рис. 1.16. Звіт по границям

Крім цього, у звіті зазначені значення цільової функції при випуску даного типу продукції на нижній межі. Так, що

$$F = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 + c_5 X_5 + c_6 X_6 + c_7 X_7 + c_8 X_8 + c_9 X_9 = 290005,437$$

Далі приводяться верхні межі зміни X_j і значення цільової функції при випуску продукції, що ввійшла в оптимальне рішення на верхніх межах.

На цьому ми закінчуємо опис звітів аналізу оптимального рішення.

Контрольні запитання

1. Записати математичну модель загальної задачі лінійного програмування.
2. Яка задача лінійного програмування називається основною?
3. Сформулювати задачу оптимального розподілу завдань з випуску однорідної продукції.
4. Що в задачі оптимального випуску продукції визначає цільова функція?
5. Що в задачі оптимального випуску продукції визначають обмеження на змінні?
6. Що в задачі оптимального випуску продукції визначають умови невід'ємності змінних?
7. Записати економіко-математичну модель задачі оптимального розподілу завдань з випуску однорідної продукції.

Література: [1, с. 371-377; 2, с. 117-190; 4, с. 251; 5, с. 45-50, 6, с.41-47].

Тема № 2. МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЗАВАНТАЖЕННЯ ОБЛАДНАННЯ

Лабораторна робота № 2 «Модель оптимального використання потужності»

Задача. Виробнича дільниця має в наявності три види взаємозв'язаного обладнання (M_1, M_2 і M_3). Фонд робочого часу відповідно становить A_i годин на місяць. Дільниці встановлено план випуску п'яти видів продукції (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) механізованим способом в обсязі B_j тонн.

Норми витрат часу за видами продукції і обладнання a_{ij} год. на тону подано в додатку 7 (i – індекс виду обладнання, j – індекс виду продукції).

Собівартість одиниці виробленої продукції відповідним видом обладнання C_{ij} гривень наведено в додатку 7.

Потрібно знайти оптимальний план розподілу продукції по видах обладнання, який забезпечить мінімальні витрати на виробництво.

Види продукції, за якими будується модель задається за варіантом із додатку 7.

Фонд робочого часу i -го обладнання (A_i) і завдання по випуску j -го виду продукції (B_j) визначаються із додатка 8.

Приклад виконання лабораторної роботи

Задача. Будівельна дільниця має в наявності три групи взаємопов'язаних механізмів (M_1, M_2, M_3). Фонд робочого часу відповідно становить 800, 900 і 600 машино-змін за місяць. Дільниці встановлено план виконання п'яти видів робіт (P_1, P_1, P_3, P_4, P_5) в такому обсязі 450,320,640,520 і 280 м³. Норми витрат часу за видами робіт і групами механізмів наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Норми витрат часу на одиницю виконаної роботи

Група механізмів	Норми витрат часу на одиницю виконаної роботи відповідним механізмом, машино-змін				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M_1	0,2	0,3	0,5	0,25	0,4
M_2	0,4	0,45	0,56	0,6	0,5
M_3	0,41	0,65	0,56	0,45	0,3

Собівартість одиниці роботи, виконаної відповідною групою механізмів наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Собівартість одиниці виконаної роботи

Група механізмів	Собівартість одиниці виконаної роботи відповідним механізмом, грн.				
	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅
M ₁	20	30	40	35	45
M ₂	30	25	35	40	40
M ₃	35	20	30	30	55

Знайти оптимальний план завантаження будівельних механізмів, який забезпечить мінімальні витрати.

Розв'язок

Для побудови моделі введемо невідому величину x_{ij} – обсяг i -го виду роботи ($j = 1, 2, \dots, 5$), яка виконується i -им механізмом ($i = 1, 2, 3$).

Цільова функція мінімуму витрат набуде вигляду:

$$F(x) = 20x_{11} + 30x_{12} + 40x_{13} + 35x_{14} + 45x_{15} + 30x_{21} + \dots + 55x_{35} \rightarrow \min.$$

За такими обмеженнями:

1) по використанню наявного фонду робочого часу механізмів:

$$M_1: 0,2x_{11} + 0,3x_{12} + 0,5x_{13} + 0,25x_{14} + 0,4x_{15} \leq 800;$$

$$M_2: 0,4x_{21} + 0,45x_{22} + 0,56x_{23} + 0,6x_{24} + 0,5x_{25} \leq 900;$$

$$M_3: 0,41x_{31} + 0,65x_{32} + 0,56x_{33} + 0,45x_{34} + 0,3x_{35} \leq 600;$$

2) по виконанню гарантованого плану відповідних механізованих робіт:

$$P_1: x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 450;$$

$$P_2: x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 320;$$

$$P_3: x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 640;$$

$$P_4: x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 520;$$

$$P_5: x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 280;$$

3) умова невід'ємності змінних:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3,4,5.$$

Розв'язавши дану задачу, бачимо, що всі будівельні роботи будуть виконані в запланованих обсягах.

Висновок. Оптимальний план завантаження механізмів буде такий:

$$[X_{ij}] = \begin{bmatrix} 450 & 0 & 0 & 0 & 280 \\ 0 & 308,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11,7 & 640 & 520 & 0 \end{bmatrix}$$

Це свідчить про те, що для того щоб загальна собівартість робіт була мінімальною потрібно:

на першому механізмі виконувати роботу P_1 в обсязі 450 одиниць і роботу P_5 в обсязі 280 одиниць;

на другому механізмі – роботу P_2 – 308,3 одиниць;

на третьому механізмі – роботу P_2 – 11,7; P_3 – 640 і P_4 – 520 одиниць продукції.

Контрольні запитання

1. Сформулювати задачу оптимального використання потужностей.
2. Що в задачі оптимального використання потужностей визначає цільова функція?
3. Що в задачі оптимального використання потужностей визначають обмеження на зміні?
4. Що в задачі оптимального використання потужностей визначають умови невід'ємності змінних?
5. Записати економіко-математичну модель оптимального використання потужностей.

Література: [1, с. 358-361; 2, с. 93-116; 3, с. 66; 4, с. 30-32, 45-54; 5, с.45-48, 51-52; 6, с.8, 31].

Тема № 3. МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИРОБНИЧОЇ ПРОГРАМИ ПІДПРИЄМСТВА

Лабораторна робота № 3 «Оптимізація виробничої програми хлібозаводу»

Задача. На хлібозаводі випускається 10 сортів хлібобулочних виробів. Види продукції визначаються за варіантом з додатку 9. Кількість печей порахувати за варіантом (додаток 9). Річна продуктивність печей за варіантом (додаток 10). Ціни на сировину – в додатку 11. Витрати сировини на 1 т хлібобулочних виробів (рецептура за асортиментом) – в додатку 12.

Згідно варіанту потрібно:

1. Розрахувати обсяг ресурсів на свій асортимент
2. Побудувати модель оптимального річного плану підприємства у загальному вигляді по критерію оптимізації – **максимальний прибуток**.
3. За допомогою отриманих нерівностей чи рівнянь побудувати та записати матрицю коефіцієнтів і функцію цілі.
4. Вирішити задачу за допомогою програми SIMPL.EXE або функції "Поиск решения".
5. Зробити економічний аналіз отриманих результатів.

Приклад виконання лабораторної роботи

Робоча модель задачі.

Цільова функція – отримати оптимальний випуск хлібобулочних виробів, що забезпечить **максимальний прибуток** при певних обмеженнях по продуктивності ліній, попиту, ресурсах.

$$F(x) = \sum P_j X_j \rightarrow \max,$$

де P_j – прибуток по j -му виду хлібобулочних виробів, тис. грн.

X_j – оптимальний випуск j -го виду хлібобулочних виробів.

$$P_j = D_j - C_j,$$

де D_j - оптова ціна 1 т j -го виду виробів, грн.

C_j - собівартість 1 т j -го виду виробів, грн.

Оптимальні випуски, т:

X_1 – Батон степовий;

X_2 – Батон соціальний;

X_3 – Хліб новий пш.ф. I гат.;

X_4 – Хліб білий соціальний ф.;

X_5 – Хліб Дарницький подов.;

X_6 – Хліб селянський ф.;

X₇ – Хліб Дарницький подов. соц. 0,7;

X₈ – Хліб висівковий 0,3;

X₉ – Булка апетитна 0,3;

X₁₀ – Булка смачна 0,5;

X₁₁ – Булка калорійна 0,4;

X₁₂ – Булка калорійна 0,4.

Хліб білий соціальний формовий – збитковий.

Вихідні дані до складання моделі оптимального плану наведені в таблицях 3.1, 3.2.

Таблиця 3.1

№	Види продукції	Обсяг виробництва	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Прибуток	Попит, т			№ печі
						Мінім.	Максим.	Серед.	
1	Батон степовий	99	3690	2760	930	50	200	125	3
2	Батон соціальний	13,2	3090	2760	330	10	100	55	3
3	Хліб новий пш.ф. I гат.	495	1970	1533	437	100	550	400	1
4	Хліб білий соціальний ф.	23,76	1530	1558	-28	20	30	25	1
5	Хліб Дарницький подов.	102,3	1830	1632	198	80	150	125	2
6	Хліб селянський ф.	204,6	1845	1532	313	150	200	225	2
7	Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	16,5	1750	1642	108	15	50	22,5	2
8	Хліб висівковий 0,3	18,0	3600	2830	770	10	50	22,5	3
9	Булка апетитна 0,3	29,0	4200	3796	404	10	50	32,5	3
10	Булка смачна 0,4	133,0	6600	4666	1934	10	200	140	3
11	Булка смачна 0,5	40,0	6600	4707	1893	15	100	42,5	3
12	Булка калорійна 0,4	52,0	7300	6216	1084	50	80	55	3

Таблиця 3.2

Річна продуктивність печей	
Піч № 1	3900
Піч № 2	3400
Піч № 3	2400

Використовуючи дані таблиці 3.1, визначимо прибуток по кожному виду:

$$P_1 = 930 \text{ грн.}$$

$$P_2 = 330 \text{ грн.}$$

$$P_3 = 437 \text{ грн.}$$

$$P_4 = -28 \text{ грн.}$$

$$P_5 = 198 \text{ грн.}$$

$$P_6 = 313 \text{ грн.}$$

$$P_7 = 108 \text{ грн.}$$

$$P_8 = 770 \text{ грн.}$$

$$P_9 = 404 \text{ грн.}$$

$$P_{10} = 1934 \text{ грн.}$$

$$P_{11} = 1893 \text{ грн.}$$

$$P_{12} = 1084 \text{ грн.}$$

Тоді **цільова функція** моделі оптимізації прийме наступний вигляд:

$$930 X_1 + 330 X_2 + 437 X_3 - 28 X_4 + 198 X_5 + 313 X_6 + \\ + 108 X_7 + 770 X_8 + 404 X_9 + 1934 X_{10} + 1893 X_{11} + 1084 X_{12} \rightarrow \max.$$

Обмеження:

- **по попиту:**

$$T_j \min < X_j < T_j \max,$$

де $T_j \min$, $T_j \max$ – мінімальний та максимальний попит на j -й вид продукції.

- **по продуктивності ліній:**

$$\sum_{j=1}^n X_j \cdot K_j \leq R_y,$$

де K_j – коефіцієнт використання потужності j -го виду продукції;
 R_y – річна продуктивність y -тої лінії для кожного j .

- **по витратах на сировину:**

$$B_0 \leq B$$

B , B_0 – вартість сировини в базовому і оптимальному варіанті.

Таблиця 3.3

ЗМІННІ ВЕЛИЧИНИ

	Батон стеловий	Батон соціальний	Хліб новий пш. ф. I гат.	Хліб білий соціальний ф.	Хліб Дарницький подовий	Хліб селянський ф.	Хліб Дарницький подовий соціальний 0,7	Хліб висівковий 0,3	Булка апетитна 0,3	Булка смачна 0,4	Булка смачна 0,5	Булка калорійна 0,4	Загалом	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
Обсяг виробництва	99	13,2	495	23,76	102,3	204,6	16,5	18	29	133	40,00	52,00	1226,36	тонн
Нижня межа попиту	50	10	100	20	80	150	15	10	10	10	15	50		тонн
Верхня межа попиту	200	100	550	30	150	200	50	50	50	200	100	80		тонн
Коефіцієнти цільової функції	930,00	330,00	437,00	-28,00	198,00	313,00	108,00	770,00	404,00	1934,00	1893,00	1084,00	813038,92	тис.грн.
Оптова ціна 1 т	3690,00	3090,00	1970,00	1530,00	1830,00	1845,00	1750,00	3600,00	4200,00	6600,00	6600,00	7300,00	3719171,8	тис.грн.
Собівартість випуску 1 т	2760,00	2760,00	1533,00	1558,00	1632,00	1532,00	1642,00	2830,00	3796,00	4666,00	4707,00	6216,00	2906132,88	тис.грн.

Продовження таблиці 3.3

ОБМЕЖЕННЯ ПО СИРОВИННІ													<u>Ліва</u> <u>частина</u>	<u>Нап</u> <u>рям</u> <u>ок</u>	Вартість борошна	<u>Ціна</u> <u>за 1 т</u>	<u>Вартість</u>
Вихід продукції, кг	135,5	146,0	134,0	134,0	148,0	150,0	148,0	124,6	136,0	148,8	135,0	135,5					
Борошно 1 гатунку	100	100	0	0	0	0	0	0	100	100	100	100					
<i>К-ть борошна вищ. гат.</i>	73,06	9,04	0	0	0	0	0	0	21,32	89,38	29,63	38,38	260,815	←		1300	339059,62
Борошно 1 гат.	0	0	100	100	40	40	40	88	0	0	0	0					
<i>К-ть борошна I гат.</i>	0	0	369,4	17,73	27,65	54,56	4,46	12,71	0	0	0	0	486,515			1700	827075,70
Борошно житнє	0	0	0	0	60	60	60	0	0	0	0	0					
<i>К-ть борошна житнього</i>	0	0	0	0	41,47	81,84	6,69	0	0	0	0	0	130,002	←		1600	208003,46
Висівки	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0					
<i>К-ть висівоків</i>	0	0	0	0	0	0	0	1,7335	0	0	0	0	1,734	←		340	589,41
Загальна кількість борошна	73,06	9,04	369,4	17,73	69,12	136,4	11,15	14,45	21,32	89,38	29,63	38,38	879,1	←	1374728		
Сіль	1,3	1,5	1,5	1,5	1,3	1,3	1,5	1,3	1	1,4	1	1	12,06	←		1,2	14,48
Дріжджі конц.	1	2	1,2	1,2	0,8	0	1,2	1,6	1,2	4	1,3	3,2	11,92	←		5,6	66,75
Цукор	0	1	0	0	0	2	10	0	28	17	17	16	36,28	←		6,5	235,79
Маргарин	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	9	12	8,43	←		8,3	69,95
Яйце	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	5	5	7,87	←		16,25	127,88
Ванілін	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	1,73	←		97	168,15
Ізюм	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	4,61	←		17	78,29
Часник	0	0	0	0	0	0	0	0	2,3	0	0	0	0,49	←		20	9,81
Олія	0	3	1,7	0	0	0	2,1	0,85	0	2	0	0	1197,05	←		6,5	7780,83
Загальна вартість сировини	94986,78	12012,59	633486,3	30144,79	113363,6	223715,9	18517,21	22479,68	27770,89	118118,15	38599,98	50084,24	1383280		1383280	сума =	1383280
Витрати сировини на 1 т хлібобулочних виробів	959,46	910,04	1279,77	1268,72	1108,15	1093,43	1122,25	1248,87	957,62	888,11	965,00	963,16	1127,96				

Закінчення таблиці 3.3

ПРОДУКТИВНІСТЬ ЛІНІЙ

Піч № 1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	518,76	←	3900
Піч № 2	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	323,4	←	3400
Піч № 3	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	384,2	←	2400

БАЗОВИЙ ВАРІАНТ

В базовому варіанті визначаються обсяги закупівлі сировинних ресурсів у вартісному виразі для забезпечення виробництва продукції в запланованих обсягах та одночасно розраховуються техніко-економічні показники: обсяг товарної продукції, витрати на виробництво, загальний прибуток, рентабельність, витрати на 1 грн. товарної продукції.

Вихідні дані представлені в таблиці 3.3.

При переході до оптимізаційного варіанту необхідно скопіювати вихідні дані з базового варіанту, при цьому в першій таблиці будуть вказані такі величини: оптимальний обсяг виробництва, нижня та верхня межа попиту, коефіцієнт цільової функції, оптова ціна 1т, собівартість 1 т продукції.

Друга таблиця – це обмеження, які ми вводимо. В нашому варіанті встановлені такі обмеження: по продуктивності ліній, по попиту на кожний вид продукції, по витратах на сировину.

Пакет EXCEL дозволяє обрахувати оптимізаційний варіант, коли введені всі обмеження. Ми заходимо в меню “Сервіс”, далі “Пошук рішення”. На моніторі з’являється діалогове вікно з трьома рамками. В першій рамці розміщуються адреси клітинок цільової функції, в другій – оптимального випуску продукції, в третій – наших обмежень. Після перевірки правильності адрес наших показників, запускаємо програму на виконання.

В результаті виконання програми повинно з’явитися повідомлення про коректність моделі і правильності розрахунків. Це повідомлення міститься у вікні, яке дозволяє додатково обрахувати три звіти: по результатам, по границям, по стійкості.

В результаті проведеної оптимізації підприємство отримає можливість збільшити випуск продукції на 86,7 т, або на 6,61 %.

Відбудуться зміни по асортименту (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

Показники	Одиниця виміру	До оптим.	Після оптим.	+ –	%
1	2	3	4	5	6
1. Випуск продукції – всього	тонн	1226,4	1313,1	86,7	6,61%
в тому числі в асортименті:					
Батон степовий	т	99	200,0	101,0	50,5%
Батон соціальний	т	13,2	100,0	86,8	86,8%
Хліб новий пш.ф. І гат.	т	495	283,1	-211,9	-74,8%
Хліб білий соціальний ф.	т	23,76	10,0	-13,8	-137,6%
Хліб Дарницький подов.	т	102,3	80,0	-22,3	-27,9%
Хліб селянський ф.	т	204,6	150,0	-54,6	-36,4%
Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	т	16,5	10,0	-6,5	-65,0%

Закінчення таблиці 3.4

1	2	3	4	5	6
Хліб висівковий 0,3	т	18	50,0	32,0	64,0%
Булка апетитна 0,3	т	29	50,0	21,0	42,0%
Булка смачна 0,4	т	133	200,0	67,0	33,5%
Булка смачна 0,5	т	40	100	60,0	60,0%
Булка калорійна 0,4	т	52	80	28,0	35,0%
2. Обсяг товарної продукції	тис. грн.	3719,2	5014,7	1295,5	25,8%
3. Витрати на виробництво	тис. грн.	2906,1	3886,8	980,7	25,2%
4. Загальний прибуток	тис. грн.	813,0	1127,8	314,8	27,9%
5. Рентабельність продукції	%	28,0%	29,0%	1,04%	
6. Витрати на 1 грн. товарної продукції	коп.	78,1	77,5	-0,63	-0,8%
6. Потреба у сировині :					
потреба у борошні					
Борошно вищого гатунку	т	260,8	520,4	259,57	49,9%
Борошно 1 гатунку	т	486,5	318,4	-168,14	-52,8%
Борошно житнє	т	130,0	96,5	-33,52	-34,7%
Висівки	т	12,1	12,4	0,37	3,0%
Сіль	кг	11,9	15,3	3,38	22,08%
Дріжджі конц.	кг	36,3	58,5	22,27	38,0%
Цукор	кг	8,4	17,0	8,53	50,3%
Маргарин	кг	7,9	13,4	5,51	41,2%
Яйце	л	1,7	4,8	3,08	64,0%
Ванілін	кг	4,6	7,1	2,48	35,0%
Ізюм	кг	0,5	0,8	0,36	42,0%
Часник	кг	1197,1	1244,8	47,73	3,8%
Олія	кг	1383,3	1383,3	0,0	0%
8. Загальна потреба у коштах	тис. грн.	1226,4	1313,1	86,7	6,61%

Після оптимізації асортименту збільшиться випуск на наступні види продукції: Батон степовий – на 50,5%, Батон соціальний – на 86,8%, Хліб висівковий 0,3 – на 64,0%, Булка апетитна 0,3 – на 42,0%, Булка смачна 0,4 – на 33,5%, Булка смачна 0,5 – на 60,0%, Булка калорійна 0,4 – на 35,0%.

Зменшиться випуск на наступні види продукції: Хліб новий пшеничний формовий I гатунку, Хліб білий соціальний формовий, Хліб Дарницький подовий, Хліб селянський формовий, Хліб Дарницький подовий соціальний 0,7.

Потреба у ресурсах теж зазнає певних змін. Збільшиться потреба у борошні вищого гатунку на 259,57 т (49,9%); у висівках на 0,37 т (3,0%).

Зменшиться потреба в борошні 1 гатунку на 168,14 т (-52,8%); у борошні житньому на 33,52 т (-4,7%).

З'явиться потреба у додатковій сировині.

Всі ці зміни пов'язані з тим, що програма оптимізації для досягнення

мети – отримання максимального прибутку збільшує обсяги випуску більш рентабельних видів продукції та зменшує обсяги випуску менш рентабельних видів продукції. За рахунок цього відбудеться покращення основних техніко-економічних показників:

- обсяг товарної продукції зріс на 1295,5 тис. грн. (25,8%);
- збільшиться рентабельність продукції на 1,04%;
- зменшаться витрати на 1 грн. товарної продукції на 0,63 коп. (–0,8%).

Витрати на виробництво збільшаться за рахунок збільшення обсягу виробництва та за рахунок використання додаткової сировини на 86,7 тис. грн. (6,61%).

Більш детальну інформацію по результатам оптимізації дозволяють отримати звіт по результатам, звіт по границям, звіт по стійкості.

В звіті по результатах порівнюються базовий і оптимальний обсяги виробництва. Тут вказані коефіцієнти цільової функції загалом до і після оптимізації, а також обмеження. Навпроти кожного обмеження є статус. Якщо статус зв'язаний, то це означає що ресурс вже використаний повністю і немає можливості збільшити його. Якщо статус не зв'язаний, то це означає що відповідного показника є більше, ніж потрібно, частина його не використана (рис. 3.1).

A1						
Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам						
A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам					
2	Рабочий лист: [Коннова (асорт. 12) .xls]Оптимізація					
3	Отчет создан: 10.10.2010 2:36:34					
4						
5						
6	Целевая ячейка (Максимум)					
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
8	\$N\$7	Коефіцієнти цільової функції Загалом	1127826,632	1127826,632		
9						
10						
11	Изменяемые ячейки					
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
13	\$B\$4	Обсяг виробництва Батон степовий	200	200		
14	\$C\$4	Обсяг виробництва Батон соціальний	100	100		
15	\$D\$4	Обсяг виробництва Хліб новий пш.ф. I гат.	283,1044202	283,1044202		
16	\$E\$4	Обсяг виробництва Хліб білий соціальний ф.	10	10		
17	\$F\$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.	80	80		
18	\$G\$4	Обсяг виробництва Хліб селянський ф.	150	150		
19	\$H\$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.соц. 0	10	10		
20	\$I\$4	Обсяг виробництва Хліб висівковий 0,3	50	50		
21	\$J\$4	Обсяг виробництва Булка апетитна 0,3	50	50		
22	\$K\$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,4	200	200		
23	\$L\$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,5	100,00	100,00		
24	\$M\$4	Обсяг виробництва Булка калорійна 0,4	80,00	80,00		
25						
26						
27	Ограничения					
28	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
29	\$B\$5	Нижня межа попиту Батон степовий	50	\$B\$5<=\$B\$4	не связан.	150
30	\$C\$5	Нижня межа попиту Батон соціальний	10	\$C\$5<=\$C\$4	не связан.	90
31	\$D\$5	Нижня межа попиту Хліб новий пш.ф. I гат.	100	\$D\$5<=\$D\$4	не связан.	183,10442
32	\$E\$5	Нижня межа попиту Хліб білий соціальний ф.	10	\$E\$5<=\$E\$4	связанное	0
33	\$F\$5	Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.	80	\$F\$5<=\$F\$4	связанное	0
34	\$G\$5	Нижня межа попиту Хліб селянський ф.	150	\$G\$5<=\$G\$4	связанное	0
35	\$H\$5	Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0	10	\$H\$5<=\$H\$4	связанное	0
36	\$I\$5	Нижня межа попиту Хліб висівковий 0,3	10	\$I\$5<=\$I\$4	не связан.	40
37	\$J\$5	Нижня межа попиту Булка апетитна 0,3	10	\$J\$5<=\$J\$4	не связан.	40
38	\$K\$5	Нижня межа попиту Булка смачна 0,4	10	\$K\$5<=\$K\$4	не связан.	190
39	\$L\$5	Нижня межа попиту Булка смачна 0,5	15	\$L\$5<=\$L\$4	не связан.	85
40	\$M\$5	Нижня межа попиту Булка калорійна 0,4	50	\$M\$5<=\$M\$4	не связан.	30
41	\$B\$6	Верхня межа попиту Батон степовий	200	\$B\$6>=\$B\$4	связанное	0
42	\$C\$6	Верхня межа попиту Батон соціальний	100	\$C\$6>=\$C\$4	связанное	0
43	\$D\$6	Верхня межа попиту Хліб новий пш.ф. I гат.	550	\$D\$6>=\$D\$4	не связан.	266,89558
44	\$E\$6	Верхня межа попиту Хліб білий соціальний ф.	30	\$E\$6>=\$E\$4	не связан.	20
45	\$F\$6	Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.	150	\$F\$6>=\$F\$4	не связан.	70
46	\$G\$6	Верхня межа попиту Хліб селянський ф.	250	\$G\$6>=\$G\$4	не связан.	100
47	\$H\$6	Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0	50	\$H\$6>=\$H\$4	не связан.	40
48	\$I\$6	Верхня межа попиту Хліб висівковий 0,3	50	\$I\$6>=\$I\$4	связанное	0
49	\$J\$6	Верхня межа попиту Булка апетитна 0,3	50	\$J\$6>=\$J\$4	связанное	0
50	\$K\$6	Верхня межа попиту Булка смачна 0,4	200	\$K\$6>=\$K\$4	связанное	0
51	\$L\$6	Верхня межа попиту Булка смачна 0,5	100	\$L\$6>=\$L\$4	связанное	0
52	\$M\$6	Верхня межа попиту Булка калорійна 0,4	80	\$M\$6>=\$M\$4	связанное	0
53	\$N\$37	Піч № 1 Ліва частина	293,1044202	\$N\$37<=\$P\$37	не связан.	3606,89558
54	\$N\$38	Піч № 2 Ліва частина	240	\$N\$38<=\$P\$38	не связан.	3160
55	\$N\$39	Піч № 3 Ліва частина	780	\$N\$39<=\$P\$39	не связан.	1620
56	\$R\$33	сумма= Вартість	1383280,10	\$R\$33<=\$P\$33	связанное	0

Рис. 3.1. Звіт по результатам

В звіті по стійкості важливим показником є нормована вартість, яка показує як зміниться цільова функція при примусовому випуску одиниці j-го виду продукції. Цей звіт показує, яка продукція є вигідною (рис. 3.2).

A1								Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости							
A	B	C	D	E	F	G	H	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости														
2	Рабочий лист: [Коннова (асорт. 12) .xls]Оптимізація														
3	Отчет создан: 10.10.2010 2:36:34														
4															
5															
6	Изменяемые ячейки														
7															
8	Ячейка		Имя		Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое						
9	SBS4		Обсяг виробництва Батон степовий		200	0	930	1E+30	602,3747342						
10	SCS4		Обсяг виробництва Батон соціальний		100	0	330	1E+30	19,24934737						
11	SDS4		Обсяг виробництва Хліб новий пш.ф. I гат.		283,10442	0	437	27,0698218	70,65925857						
12	SES4		Обсяг виробництва Хліб білий соціальний ф.		10	0	-27,99999993	461,226784	1E+30						
13	SFS4		Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.		80	0	198	180,396872	1E+30						
14	SGS4		Обсяг виробництва Хліб селянський ф.		150	0	313	60,3709755	1E+30						
15	SHS4		Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.соц. 0,7		10	0	108	275,213594	1E+30						
16	SIS4		Обсяг виробництва Хліб висівковий 0,3		50	0	770	1E+30	343,5510841						
17	SJS4		Обсяг виробництва Булка апетитна 0,3		50	0	404	1E+30	77,00487033						
18	SKS4		Обсяг виробництва Булка смачна 0,4		200	0	1934	1E+30	1630,740508						
19	SLS4		Обсяг виробництва Булка смачна 0,5		100,00	0,00	1893	1E+30	1563,484013						
20	SMS4		Обсяг виробництва Булка калорійна 0,4		80,00	0,00	1084	1E+30	755,1126651						
21															
22	Ограничения														
23															
24	Ячейка		Имя		Результ.	Теневая	Ограничение	Допустимое	Допустимое						
25	SBS5		Нижня межа попиту Батон степовий		50	0	0	1E+30	150						
26	SCS5		Нижня межа попиту Батон соціальний		10	0	0	1E+30	90						
27	SDS5		Нижня межа попиту Хліб новий пш.ф. I гат.		100	0	0	1E+30	183,1044202						
28	SES5		Нижня межа попиту Хліб білий соціальний ф.		10	461,226784	0	10	20						
29	SFS5		Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.		80	180,396872	0	80	70						
30	SGS5		Нижня межа попиту Хліб селянський ф.		150	60,3709755	0	150	100						
31	SHS5		Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0,7		10	275,213594	0	10	40						
32	SIS5		Нижня межа попиту Хліб висівковий 0,3		10	0	0	1E+30	40						
33	SJS5		Нижня межа попиту Булка апетитна 0,3		10	0	0	1E+30	40						
34	SKS5		Нижня межа попиту Булка смачна 0,4		10	0	0	1E+30	190						
35	SLS5		Нижня межа попиту Булка смачна 0,5		15	0	0	1E+30	85						
36	SMS5		Нижня межа попиту Булка калорійна 0,4		50	0	0	1E+30	30						
37	SBS6		Верхня межа попиту Батон степовий		200	-602,374734	0	150	244,2321761						
38	SCS6		Верхня межа попиту Батон соціальний		100	-19,2493474	0	90	257,4946535						
39	SDS6		Верхня межа попиту Хліб новий пш.ф. I гат.		550	0	0	266,89558	1E+30						
40	SES6		Верхня межа попиту Хліб білий соціальний ф.		30	0	0	20	1E+30						
41	SFS6		Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.		150	0	0	70	1E+30						
42	SGS6		Верхня межа попиту Хліб селянський ф.		250	0	0	100	1E+30						
43	SHS6		Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0,7		50	0	0	40	1E+30						
44	SIS6		Верхня межа попиту Хліб висівковий 0,3		50	-343,551084	0	40	187,6347404						
45	SJS6		Верхня межа попиту Булка апетитна 0,3		50	-77,0048703	0	40	244,7028239						
46	SKS6		Верхня межа попиту Булка смачна 0,4		200	-1630,74051	0	190	263,8553248						
47	SLS6		Верхня межа попиту Булка смачна 0,5		100	-1563,48401	0	85	242,8308025						
48	SMS6		Верхня межа попиту Булка калорійна 0,4		80	-755,112665	0	30	243,294962						
49	SNS37		Піч № 1 Ліва частина		293,10442	0	3900	1E+30	3606,89558						
50	SNS38		Піч № 2 Ліва частина		240	0	3400	1E+30	3160						
51	SNS39		Піч № 3 Ліва частина		780	0	2400	1E+30	1620						
52	SRS33		сумма= Вартість		1383280,10	0,34	1383280,1	341565,036	234331,5985						

Рис. 3.2. Звіт по стійкості

В нашому випадку може бути вигідним збільшення обсягів виробництва Хліб новий пшеничний формовий I гатунку, Булка смачна 0,5 та Хліб селянський формовий.

Звіт по границям дає змогу проаналізувати, в яких межах будуть дійсні рекомендації по структурі випуску. Наприклад, якщо підприємство буде випускати Батон степовий в обсязі 50 тонн, то отриманий прибуток буде 988 тис. грн., а якщо 200 тонн – 1127,8 тис. грн. (рис. 3.3).

Microsoft Excel 12.0 Отчет по пределам										
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Microsoft Excel 12.0 Отчет по пределам									
2	Рабочий лист: [Коннова (асорт. 12) .xls]Отчет по пределам 1									
3	Отчет создан: 10.10.2010 2:36:34									
4										
5										
6	Целевое									
7	Ячейка	Имя	Значение							
8	\$N\$7	Коэффициенты целевой функции Загалом	1127826,632							
9										
10										
11	Изменяемое									
12	Ячейка	Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат			
13	\$B\$4	Обсяг виробництва Батон степовий	200	50	988326,6316	200	1127826,632			
14	\$C\$4	Обсяг виробництва Батон соціальний	100	10	1098126,632	99,99999997	1127826,632			
15	\$D\$4	Обсяг виробництва Хліб новий пш.ф. I гат.	283,1044202	100	1047810	283,1044202	1127826,632			
16	\$E\$4	Обсяг виробництва Хліб білий соціальний ф.	10	10	1127826,632	10	1127826,632			
17	\$F\$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.	80	80	1127826,632	80	1127826,632			
18	\$G\$4	Обсяг виробництва Хліб селянський ф.	150	150	1127826,632	150	1127826,632			
19	\$H\$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	10	10	1127826,632	10	1127826,632			
20	\$I\$4	Обсяг виробництва Хліб висівковий 0,3	50	10	1097026,632	50	1127826,632			
21	\$J\$4	Обсяг виробництва Булка апетитна 0,3	50	10	1111666,632	50	1127826,632			
22	\$K\$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,4	200	10	760366,6316	199,9999999	1127826,631			
23	\$L\$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,5	100,00	15,00	966921,63	100,00	1127826,63			
24	\$M\$4	Обсяг виробництва Булка калорійна 0,4	80,00	50,00	1095306,63	80,00	1127826,63			

Рис. 3.3. Звіт по границям

Висновок: оптимізація асортименту продукції та обсягів її випуску дозволила поліпшити основні економічні показники без додаткових витрат на сировину. Так, обсяг випуску зріс в цілому на 86,7 тонн, або на 6,61%, товарна продукція зросла на 1295,5 тис. грн., або на 25,8%, збільшився прибуток від реалізації на 314,8 тис. грн. (на 27,9%), витрати на 1 грн. товарної продукції в оптимальному варіанті знизилась на 0,63 копійки (на 0,8%), рентабельність продукції зросла на 1,04%.

Таким чином, оптимізація виробничої програми виробництва на хлібозаводі дозволить поліпшити економічні показники його роботи та збільшити економічну ефективність виробництва.

Тема № 4. МЕТОДИ ВИРІШЕННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ТА ЇЇ МОДЕЛІ

Лабораторна робота № 4 «Оптимізація витрат на перевезення вантажу»

На практиці при перевезенні вантажів може виникнути одна з трьох ситуацій.

I.

Метою транспортної задачі є таке планування перевезень вантажу від постачальників до споживачів, щоб забезпечити мінімальні транспортні витрати.

Введемо позначення:

x_{ij} – змінні, які підлягають розшуку та виражають кількість вантажу, який перевозиться від i -го постачальника до j -го споживача ($i=1\dots m, j=1\dots n$);

c_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу від i -го постачальника до j -го споживача;

a_i – кількість одиниць вантажу у i -го постачальника;

b_j – кількість одиниць вантажу, яка потрібна j -му споживачу.

Транспортна задача може бути сформульована як частковий випадок задачі лінійного програмування і вирішена симплекс-методом.

Кількість одиниць вантажу у постачальників відповідає попиту з боку споживачів, що відображається в умові балансу

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n b_j . \quad (4.1)$$

Така економіко-математична модель транспортної задачі називається **закритою** та з урахуванням умови (8.1) вона має вид:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ; \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i (i = 1\dots m); \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j (j = 1\dots n); \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = 1\dots m, j = 1\dots n) . \quad (4.4)$$

Дана транспортна задача є **збалансованою**.

У наведених виразах формула (4.2) відповідає цільовій функції з мінімізації транспортних витрат. Формули (4.3) є обмеженнями задачі:

перша формула характеризує те, що весь вантаж від постачальників має бути вивезеним;

друга формула відтворює той факт, що попит споживачів задоволений.

Формула (4.4) є умовою невід'ємності змінних.

II.

Кількість вантажу у постачальників більше попиту у ньому з боку споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \quad (4.5)$$

Це означатиме, що частина вантажу у постачальників залишиться, а споживачі отримають весь потрібний їм вантаж. Тому знак у першому обмеженні (4.3) зміниться з "=" на ">=". Інші формули розглянутої моделі (4.2)–(4.4) залишаться такими ж.

III.

Кількість вантажу у постачальників менше попиту в ньому у споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j \quad (4.6)$$

Це означатиме, що кожен постачальник увесь свій вантаж вивезе, а частина споживачів отримає вантажу менше відповідної кількості. Тому друге обмеження у формулах (4.3) буде мати знак "<=". Інші формули моделі (4.2)–(4.4) залишаться без зміни.

Економіко-математичні моделі у ситуаціях II і III називаються **відкритими**, а самі задачі – **незбалансованими**.

У всіх трьох розглянутих моделях кількість основних змінних складає $m \times n$, а кількість обмежень – $(m+n)$.

Найбільш простою, яка часто використовується, є замкнута модель (4.2)–(4.4). З особливостями реалізації відкритих моделей можна познайомитися у спеціальній літературі.

1. Постановка транспортної задачі

Визначити, чи є дана транспортна задача **збалансованою** або **незбалансованою**.

Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі, якщо задані витрати на перевезення одиниці вантажу від постачальників A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 до споживачів B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 .

Витрати на перевезення одиниці вантажу, запаси постачальників і потреби споживачів визначаються за даними додатку 13.

2. Приклад рішення транспортної задачі за допомогою електронних таблиць

Задача. В Київській області 3 цукрових заводи (В) отримують від 5 сільськогосподарських підприємств (А) сировину. Скласти такий план перевезень від постачальників до споживачів, щоб вартість перевезень була

мінімальною, вантаж від постачальників був вивезеним, а потреби заводів у сировині були задоволені (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Вихідні дані для транспортної задачі

Витрати на перевезення одиниці вантажу														
A ₁			A ₂			A ₃			A ₄			A ₅		
B ₁	B ₂	B ₃	B ₁	B ₂	B ₃	B ₁	B ₂	B ₃	B ₁	B ₂	B ₃	B ₁	B ₂	B ₃
20	15	35	25	20	35	30	25	25	20	30	30	15	20	25

Продовження таблиці 4.2

Запаси постачальників					Потреби споживачів		
A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	B ₁	B ₂	B ₃
100	220	110	170	120	220	240	260

Розглянемо загальну схему розміщення даних в середовищі Excel для рішення транспортної задачі (рис. 4.1).

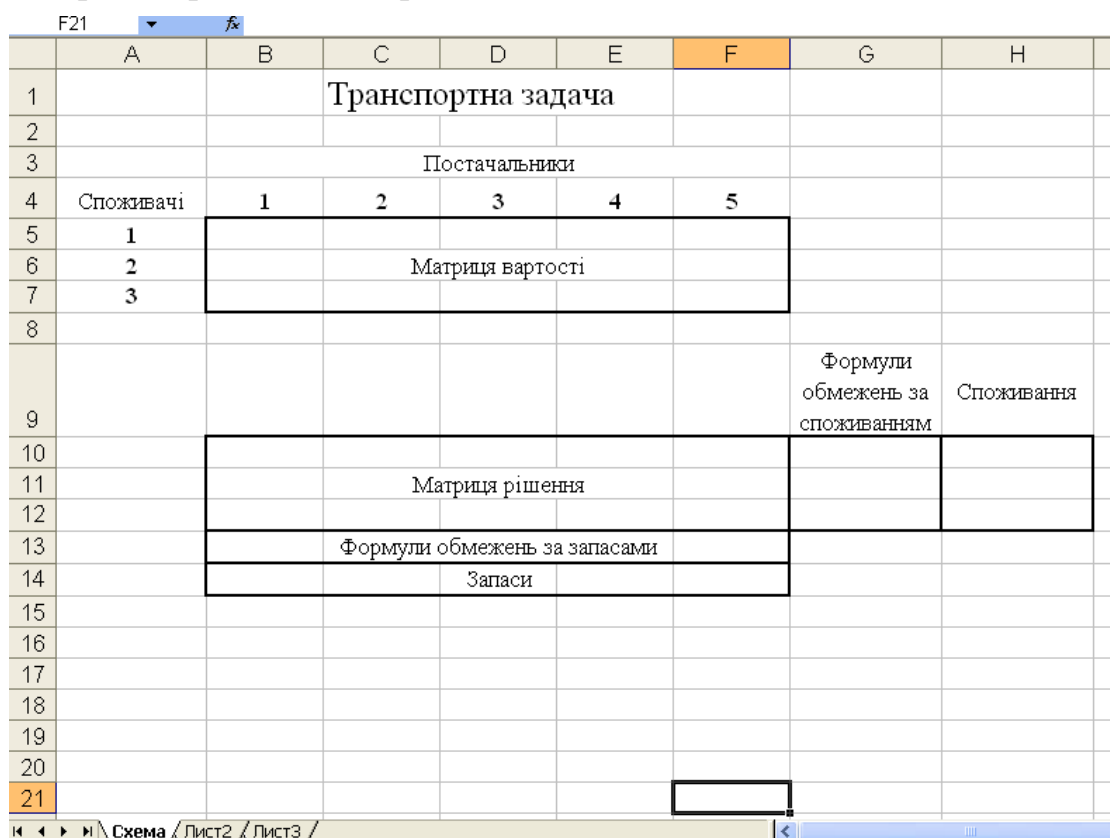


Рис. 4.1. Макет задачі

Рішення транспортної задачі на ПК проводиться за таким алгоритмом:

1. Заповнюємо шапку та заготовки рядків і стовпців як на рис. 4.2.
2. Заповнюємо електронну таблицю: блоки «Запаси», «Споживання» та «Матрицю вартості».
3. Записуємо економіко-математичну модель згідно з похідними даними:

Цільова функція (критерій оптимальності):

$$F(x) = 20x_{11} + 25x_{12} + 30x_{13} + 20x_{14} + 15x_{15} + \\ + 15x_{21} + 20x_{22} + 25x_{23} + 30x_{24} + 20x_{25} + \\ + 35x_{31} + 35x_{32} + 25x_{33} + 30x_{34} + 25x_{35} \rightarrow \min;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 220, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 240, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 260, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 110, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 170, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 120; \\ x_j \geq 0 \quad (i=1\dots 5; j=1\dots 3). \end{array} \right.$$

4. В клітинку G16 за допомогою **Майстра функцій** записуємо формулу цільової функції **=СУММПРОИЗВ(B5:F7;B10:F12)**.

5. У клітинки D13÷F13 записуються формули сумування змінних по стовпцям, що відповідає запасам постачальників **=СУММ(B10:B12)**.

6. У клітинки G10÷G12 записуються формули сумування змінних по рядках, що відповідає потребі споживачів **=СУММ(B10:F10)** (рис. 4.2).

		A	B	C	D	E	F	G	H	
1		Транспортна задача								
2										
3		Постачальники								
4	Споживачі	1	2	3	4	5				
5	Завод № 1	20	25	30	20	15				
6	Завод № 2	15	20	25	30	20				
7	Завод № 3	35	35	25	30	25				
8								Формули обмежень за споживанням	Споживання	
9										
10								=СУММ(B10:F10)	220	
11								0	240	
12								0	260	
13	Сума поставок сировини	=СУММ(B10:B12)	0	0	0	0				
14	Запаси	100	220	110	170	120				
15										
16								0		
17								=СУММПРОИЗВ(B5:F7;B10:F12)		
18										
19										
20										
21										
22										
23										
24										
25										
26										
27										

Рис. 4.2. Заповнення електронної таблиці

7. Відмітити клітинку G16 (цільова функція) та активізувати режим Севис/Поиск решения (рис. 4.3).

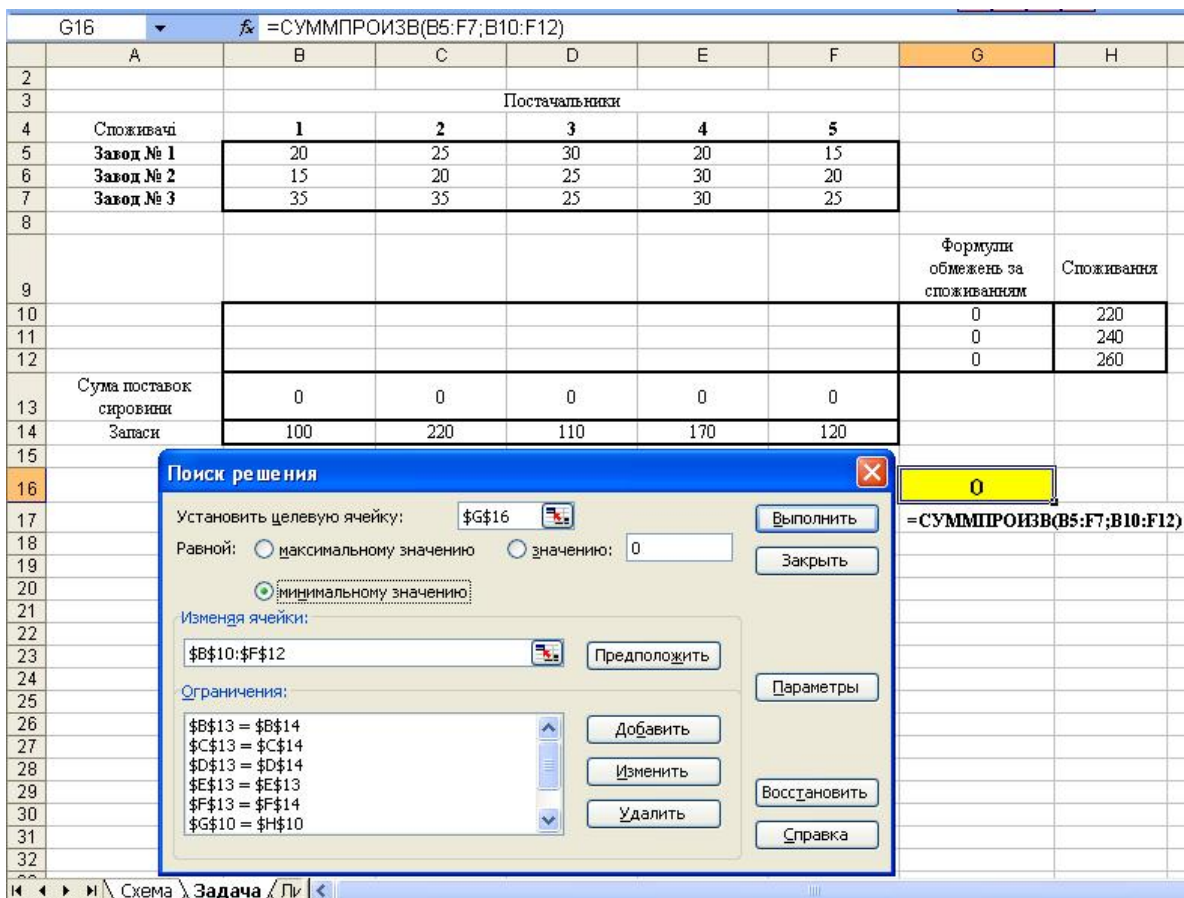


Рис. 4.3. Активізація режиму «Севис/Поиск решения»

8. Заповнити рядок Установить целевую ячейку.

9. Включити один з варіантів оптимізації. Для нашої задачі – **Мінімальному значенню**.

10. Заповнити рядок Изменяя ячейки посиланням на блок B10:F12.

11. Заповнити вікно Ограничения обмеженнями за рядками і стовпцями змінних, що відповідає запасам постачальників та потребам споживачів (рис. 4.4).

12. У рядку Знак вибрати знак « = ».

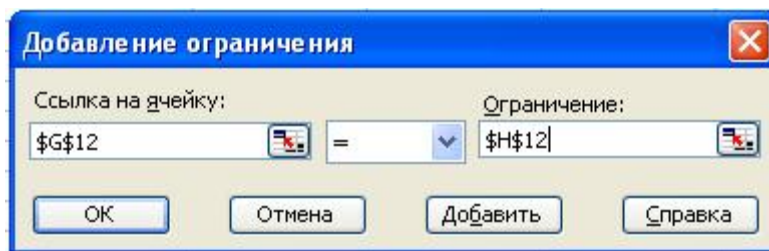


Рис. 4.4. Заповнення обмежень, вибір знаку

13. Заповнення рядків вікна **Добавить** закінчити натиском кнопки ОК.

14. Натиснути кнопку **Параметры** та вибрати режим **Линейная модель** і **Неотрицательные значения**, натиснути кнопку ОК (рис. 4.5).

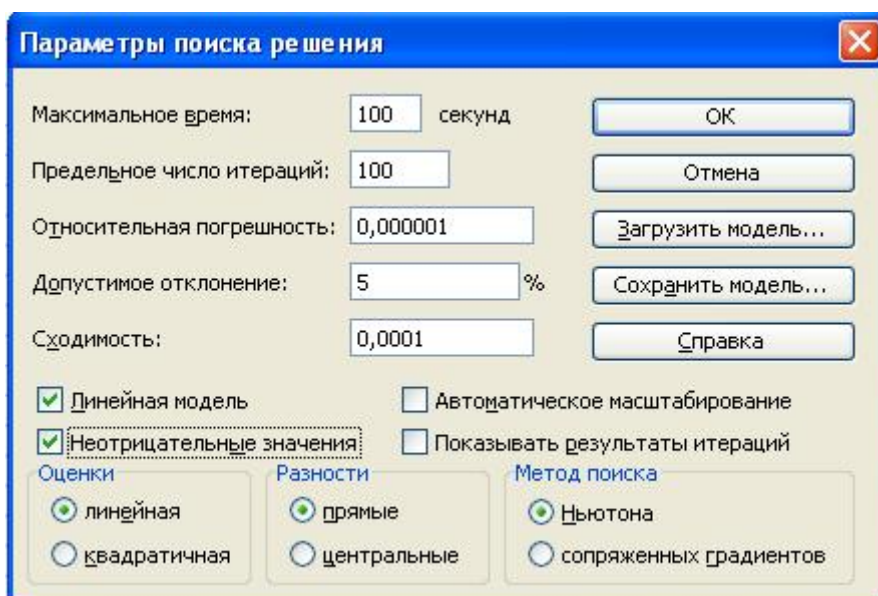


Рис. 4.5. Вибір режиму параметрах

15. Далі натискаємо кнопку **Выполнить**.

16. Після виконання обчислень на екрані з'явиться вікно **Результаты поиска решений**, в ньому відображено результат роботи: «Решение найдено Все ограничения и условия оптимальности выполнены» (рис. 4.6).

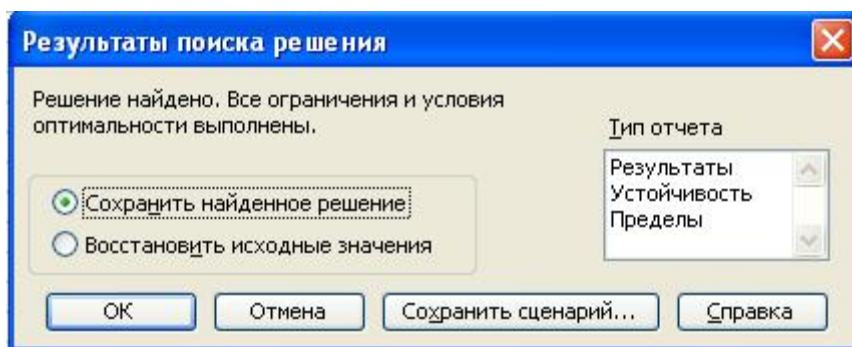


Рис. 4.6. Результаты пошуку рішень

Рішення транспортної задачі має вигляд (рис. 4.7):

	A	B	Строка формул	D	E	F	G	H	
1			Транспортна задача						
2									
3			Постачальники						
4	Споживачі	1	2	3	4	5			
5	Завод № 1	20	25	30	20	15			
6	Завод № 2	15	20	25	30	20			
7	Завод № 3	35	35	25	30	25			
8									
9							Формули обмежень за споживанням	Споживання	
10		0	80	0	140	0	220	220	
11		100	140	0	0	0	240	240	
12		0	0	110	30	120	260	260	
13	Сума поставок сировини	100	220	110	170	120			
14	Запаси	100	220	110	170	120			
15									
16				Цільова функція $F(x) \rightarrow \min$			15750		
17							=СУММПРОИЗВ(B5:F7;B10:F12)		
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									

Рис. 4.7. Рішення задачі

3. Економічна інтерпретація математичного розв'язку транспортної задачі

Мінімальна вартість перевезень від постачальників до споживачів (15750 грн.) буде отримана за умови, якщо буде перевезено сировину:

На завод № 1

від господарства № 2 – 80 одиниць,
від господарства № 4 – 140 одиниць.

На завод № 2

від господарства № 1 – 100 одиниць,
від господарства № 2 – 140 одиниць.

На завод № 3

від господарства № 3 – 110 одиниць,
від господарства № 4 – 30 одиниць,
від господарства № 5 – 120 одиниць.

У звіті по результатам (рис. 4.8) порівнюються базовий і оптимальний обсяги виробництва. Тут вказані коефіцієнти цільової функції загалом до і після

оптимізації, а також обмеження. Навпроти кожного обмеження є статус. Якщо статус зв'язаний, то це означає що ресурс вже використаний повністю і немає можливості збільшити його. Якщо статус не зв'язаний, то це означає що відповідного показника є більше, ніж потрібно, частина його не використана.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам						
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат			
Целевая ячейка (Минимум)						
\$G\$16	Целевая функция F(x) @ min	Формулы обмежень за споживання	0	15750		
Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат			
\$B\$10	Постачальники	0	0			
\$C\$10	Транспортна задача	0	80			
\$D\$10		0	0			
\$E\$10		0	140			
\$F\$10		0	0			
\$B\$11	Постачальники	0	100			
\$C\$11	Транспортна задача	0	140			
\$D\$11		0	0			
\$E\$11		0	0			
\$F\$11		0	0			
\$B\$12	Постачальники	0	0			
\$C\$12	Транспортна задача	0	0			
\$D\$12		0	110			
\$E\$12		0	30			
\$F\$12		0	120			
Ограничения						
Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница	
\$B\$13	Сума поставок сировини Постачальники	100	\$B\$13=\$B\$14 не связан.		0	
\$C\$13	Сума поставок сировини Транспортна задача	220	\$C\$13=\$C\$14 не связан.		0	
\$D\$13	Сума поставок сировини	110	\$D\$13=\$D\$14 не связан.		0	
\$E\$13	Сума поставок сировини	170	\$E\$13=\$E\$14 не связан.		0	
\$F\$13	Сума поставок сировини	120	\$F\$13=\$F\$14 не связан.		0	
\$G\$10	Формулы обмежень за споживанням	220	\$G\$10=\$H\$10 не связан.		0	
\$G\$11	Формулы обмежень за споживанням	240	\$G\$11=\$H\$11 не связан.		0	
\$G\$12	Формулы обмежень за споживанням	260	\$G\$12=\$H\$12 не связан.		0	

Рис. 4.8. Звіт по результатам

Коротко за звітом по стійкості (рис. 4.9).

Показник нормована вартість, показує як зміниться цільова функція при примусовому збільшенні на одиницю j-го виду споживання. Цей звіт показує, що транспортування сировини на завод № 1 та на завод № 2 є вигідним.

A1		Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости						
A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости							
2	Рабочий лист: [8. Лабораторна № Транспортна задача.xls]Задача							
3	Отчет создан: 17.05.2007 23:24:18							
4								
5								
6	Изменяемые ячейки							
7								
8	Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
9	\$B\$10	Постачальники	0	0	20	1E+30	0	
10	\$C\$10	Транспортна задача	80	0	25	0	10	
11	\$D\$10		0	15	30	1E+30	15	
12	\$E\$10		140	0	20	0	0	
13	\$F\$10		0	0	15	1E+30	0	
14	\$B\$11	Постачальники	100	0	15	0	1E+30	
15	\$C\$11	Транспортна задача	140	0	20	10	0	
16	\$D\$11		0	15	25	1E+30	15	
17	\$E\$11		0	15	30	1E+30	15	
18	\$F\$11		0	10	20	1E+30	10	
19	\$B\$12	Постачальники	0	5	35	1E+30	5	
20	\$C\$12	Транспортна задача	0	0	35	1E+30	0	
21	\$D\$12		110	0	25	15	1E+30	
22	\$E\$12		30	0	30	0	0	
23	\$F\$12		120	0	25	0	1E+30	
24								
25	Ограничения							
26								
27	Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
28	\$B\$13	Сума поставок сировини Постачальники	100	0	100	140	0	
29	\$C\$13	Сума поставок сировини Транспортна зад.	220	5	220	140	0	
30	\$D\$13	Сума поставок сировини	110	-5	110	30	0	
31	\$E\$13	Сума поставок сировини	170	0	170	0	1E+30	
32	\$F\$13	Сума поставок сировини	120	-5	120	30	0	
33	\$G\$10	Формули обмежень за споживанням	220	20	220	0	140	
34	\$G\$11	Формули обмежень за споживанням	240	15	240	0	140	
35	\$G\$12	Формули обмежень за споживанням	260	30	260	0	30	
36								
37								
38								
39								
40								
41								
И ← → И \ Схема / Отчет по результатам 1 \ Отчет по устойчивости 1 / Отчет по пределам 1 / Зада								

Рис. 4.9. Звіт по стійкості

Звіт по границям (рис. 4.10).

У ньому показано, у яких межах може змінюватися постачання сировини, що увійшла в оптимальне рішення, при збереженні структури оптимального рішення:

Целевое		
Ячейка	Имя	Значение
\$G\$16	Цільова функція F(x) @ min Формули обмежень за споживанням	15750

Изменяемое		Нижний Целевой		Верхний Целевой		
Ячейка	Имя	Значение	предел	предел	результат	
\$B\$10	Постачальники	0	0	15750	0	15750
\$C\$10	Транспортна задача	80	80	15750	80	15750
\$D\$10		0	0	15750	0	15750
\$E\$10		140	140	15750	140	15750
\$F\$10		0	0	15750	0	15750
\$B\$11	Постачальники	100	100	15750	100	15750
\$C\$11	Транспортна задача	140	140	15750	140	15750
\$D\$11		0	0	15750	0	15750
\$E\$11		0	0	15750	0	15750
\$F\$11		0	0	15750	0	15750
\$B\$12	Постачальники	0	0	15750	0	15750
\$C\$12	Транспортна задача	0	0	15750	0	15750
\$D\$12		110	110	15750	110	15750
\$E\$12		30	30	15750	30	15750
\$F\$12		120	120	15750	120	15750

Рис. 4.10. Звіт по границям

Контрольні запитання

1. Які методи існують при вирішенні задач лінійного програмування?
2. Сформулюйте економічну постановку задачі розрахунку оптимальної виробничої програми підприємства.
3. Побудуйте математичну модель задачі оптимальної виробничої програми.
4. Що в задачі оптимального випуску продукції визначає цільова функція?
5. Що в задачі оптимального випуску продукції визначають обмеження на змінні?
6. Що в задачі оптимального випуску продукції визначають умови невід'ємності змінних?
7. Який план вважається оптимальним на підприємстві?
8. Записати економіко-математичну модель задачі оптимального розподілу завдань з випуску однорідної продукції.
9. Наведіть порядок визначення оптимальної виробничої програми підприємства із застосуванням електронних таблиць Excel.

10. Пояснити суть транспортної задачі.
11. Записати економіко-математичну модель транспортної задачі.
12. Яка модель транспортної задачі називається закритою?
13. Яка модель транспортної задачі називається відкритою?
14. Назвіть методи реалізації транспортної задачі.
15. Наведіть порядок рішення транспортної задачі із застосуванням електронних таблиць Excel

Література: [1, с. 354-377, 385-392, 436-455; 2, с. 69-72, 117-190; 6, с. 120-137; 7, с. 102-128, 251; 9, с. 45-58, 53-54, 59, 63-65; 13, с. 9-11, 31-39, 41-47, 60-63, 75-87].

Тема № 5. НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Взаємозв'язки між економічними показниками досить часто носять нелінійний характер і побудована лінійна модель в такому випадку буде неадекватна реальній дійсності. Нелінійне програмування використовується для задач планування виробництва, управління ресурсами, контролю якості продукції.

В загальному випадку задача нелінійного програмування має вигляд:

$$\begin{aligned}
 F &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min); \\
 g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_i (i = 1 \dots m); \\
 x_j &\geq 0 (j = 1 \dots n).
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

де $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – нелінійні залежності цільової функції та обмежень.

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів та обчислювальних алгоритмів, які в основному ґрунтуються на теорії диференціального числення, і вибір їх залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

До нелінійних методів знаходження оптимізаційних рішень відносяться: класичний метод оптимізації (за допомогою множників Лагранжа); метод прямого пошуку (градієнтний метод); випукле (квадратичне) програмування; метод Куна-Такера, та ін.

Часто задачу нелінійного програмування намагаються привести до лінійного виду, але заміна функції призводить до значних похибок, що зображено на рис. 5.1.

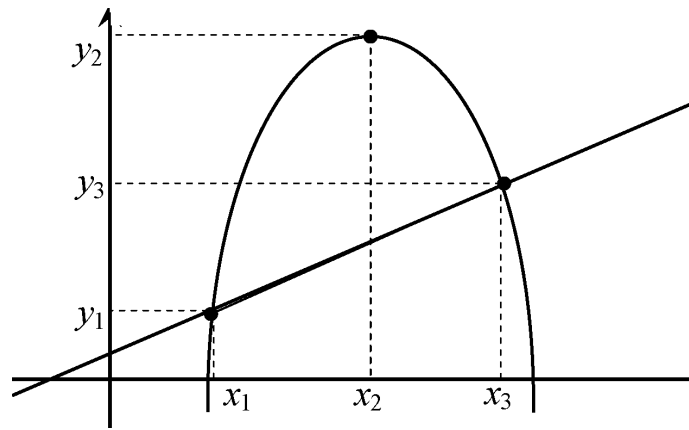


Рис. 5.1. Приклад випуклої функції.

В точках x_1 та x_3 значення обох функцій співпадають, а в точці x_2 відрізняються значною мірою.

Ми бачимо, що лінеаризація нелінійних процесів не завжди себе виправдовує і в загальному випадку є досить складною математичною задачею.

При розв'язуванні нелінійних задач використовують наближені методи, більшість яких дають змогу знаходити локальні оптимуми, а вже знайшовши всі локальні оптимуми, методом порівняння значень цільової функції у кожній з точок локального оптимуму можна знайти глобальний. Наприклад, на рис. 5.2 маємо на деякому відрізку локальні оптимуми в точках $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9$ та x_{10} , а глобальні – в точках x_3 та x_8 . Проте для практичних розрахунків такий метод не завжди ефективний, тому що часто наближені методи не «вловлюють» глобального оптимуму, особливо коли глобальний оптимум лежить досить близько до локального.

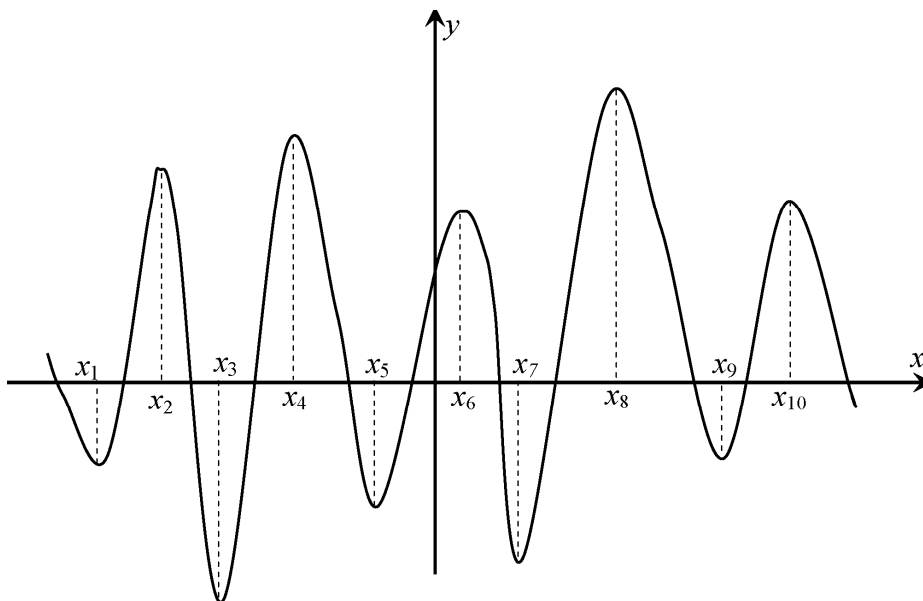


Рис. 5.2. Приклад нелінійної функції.

У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною, а в нелінійних вона може бути або граничною, або такою, що міститься всередині допустимої області розв'язків.

Контрольні запитання

1. Записати математичну модель загальної задачі нелінійного програмування.
2. В яких випадках використовуються нелінійні методи знаходження оптимізаційних рішень?
3. Які існують методи нелінійного програмування?
4. Сформулювати задачу випуклого (квадратичного) програмування.
5. Яка функція називається випуклою?
6. Який вигляд має функція Лагранжа?

Література: [1, с. 468–491; 5, с. 186-211; 7, с. 139-147; 9, с. 69-70].

Тема № 6. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Динамічне програмування використовується для розв'язання таких задач: розподіл дефіцитних капітальних вкладень між новими напрямками їх використання; розробка сценаріїв управління попитом чи запасами; розробка принципів календарного планування виробництва і вирівнювання зайнятості в умовах нестабільного попиту на продукцію; складання календарних планів поточного та капітального ремонту устаткування та його заміни; формування послідовності розвитку комерційної операції і т.д.

Лабораторна робота № 5

«Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами»

Для збільшення випуску продукції фірма може виділити інвестиції розміром X (млн. грн.) своїм чотирьом підприємствам на певний період. Приріст продукції, який може отримати кожне підприємство при виділенні йому відповідних інвестицій. Відповідно до варіанту (додаток 14) потрібно знайти оптимальний варіант вкладів інвестицій і дати економічний аналіз ефективності проведених заходів.

Приклад виконання

Задача. Для збільшення випуску продукції фірма може виділити інвестиції розміром $X=200$ млн. грн. своїм чотирьом підприємствам на певний період. Приріст продукції, який може отримати кожне підприємство при виділенні йому відповідних інвестицій, представлений у таблиці 5.1. Знайти оптимальний варіант вкладів інвестицій і дати економічний аналіз ефективності проведених заходів.

Таблиця 5.1

Розмір інвестицій млн. грн., x	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	45	60	55	70
100	110	90	85	105
150	160	165	170	155
200	210	215	225	230

Розв'язування

Для знаходження оптимального варіанта розподілу наявних інвестицій використаємо функціональне рівняння: (7.7).

$$F_k(x) = \max [f_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k)]$$

$$0 \leq x_k \leq x$$

Розрахунки проведемо в чотири етапи. Насамперед знайдемо умовно оптимальне значення варіанта розподілу виділених інвестицій для першого підприємства. Вважаємо, що підприємство – це окремий проект.

Оскільки $F_1(x) = \max [f_1(x_1) + F_1(x - x_1)]$, то переходимо до визначення умовно оптимального значення розподілу інвестицій, виділених двом першим підприємствам разом. Для цього використаємо формулу:

$$F_2(x) = \max [f_2(x_2) + F_1(x - x_2)]$$

$$0 \leq x_2 \leq x$$

у якій надамо x_2 усіх можливих значень (0; 50; 100; 150; 200).

$$F_2(0) = 0.$$

Розглянемо випадок розподілу інвестицій розміром 50 млн. грн. Отримаємо:

$$F_2(50) = \max \frac{f_2(0) + F_1(50) = 0 + 45 = 45}{f_2(50) + F_1(0) = 60 + 0 = 60} = 60$$

Максимальне значення приросту продукції від вкладення 50 млн. грн. в перших два підприємства одержано за рахунок другого члена, тобто $f_2(50) + F_1(0)$. Це означає, що другому підприємству слід виділити 50 млн. грн., а першому не надавати коштів.

Аналогічно проводимо обчислення $F_2(x)$ для інших значень вкладень (100; 150; 200).

Так, при виділенні першим двом підприємствам 100 млн. грн. маємо:

$$F_2(100) = \max \frac{f_2(0) + F_1(100) = 0 + 110 = 110}{f_2(50) + F_1(50) = 60 + 45 = 105} = 110$$

$$f_2(100) + F_1(0) = 90 + 0 = 90$$

Одержаний результат показує, що першому підприємству інвестиції потрібно виділити розміром 100 млн. грн., а другому – коштів не давати. Приріст продукції при цьому буде 110 млн. грн.

$$f_2(0) + F_1(150) = 0 + 160 = 160$$

$$f_2(50) + F_1(100) = 60 + 110 = 170$$

$$F_2(150) = \max f_2(100) + F_1(50) = 90 + 45 = 135 = 170$$

$$f_2(150) + F_1(0) = 165 + 0 = 165$$

При розподілі 150 млн. грн. доцільно 100 млн. грн. дати першому підприємству, а 50 – другому.

Проведемо аналогічні міркування для розподілу 200 млн. грн. Записуємо:

$$f_2(0) + F_1(200) = 0 + 210 = 210$$

$$f_2(50) + F_1(150) = 60 + 160 = 220$$

$$F_2(200) = \max f_2(100) + F_1(100) = 90 + 110 = 200 = 220$$

$$f_2(150) + F_1(50) = 165 + 45 = 210$$

$$f_2(200) + F_1(0) = 215 + 0 = 215$$

Згідно з виразом $f_2(50) + F_1(150)$, який забезпечує максимальний приріст абсягом 220 млн. грн., необхідно 150 млн. грн. віддати першому підприємству, а 50 млн. грн. – другому.

Перейдемо до третього етапу, в якому потрібно визначити оптимальний варіант розподілу інвестицій першим трьом підприємствам разом. Для розрахунку значень $F_3(x)$ використаємо формулу:

$$F_3(x) = \max_{0 \leq x_3 \leq x} [f_3(x_3) + F_2(x - x_3)]$$

Надаючи $x_3 = (0; 100; 200; 300; 400; 500)$, відповідно одержимо:

$$F_3(0) = 0.$$

$$F_3(50) = \max \frac{f_3(0) + F_2(50) = 0 + 60 = 60}{f_3(50) + F_2(0) = 55 + 0 = 55} = 60$$

Бачимо, що вигідно всі 50 млн. грн. віддати першим двом підприємствам, а третьому не давати коштів. Максимальний приріст продукції буде 60 млн. грн.

Виконаємо відповідні обчислення при $x_3 = 100$:

$$F_3(100) = \max \frac{f_3(0) + F_2(100) = 0 + 110 = 110}{f_3(50) + F_2(50) = 55 + 60 = 115} = 115$$

$$f_3(100) + F_2(0) = 85 + 0 = 85$$

Максимальний ефект дає вираз $f_3(50)+F_2(50)$, а це означає, що 100 млн. грн. між першими трьома підприємствами потрібно розподілити таким чином: першим двом підприємствам віддати 50 млн. грн. і третьому 50 млн. грн. Приріст продукції становитиме 115 млн. грн. Обчислимо $F_3(150)$:

$$F_3(0)+F_2(150)=0+170=170$$

$$f_3(50)+F_2(100)=55+110=165$$

$$F_3(150) = \max f_3(100)+F_2(50)=85+60=145 = 170$$

$$f_2(150)+F_2(0)=170+0=170$$

При розподілі 150 млн. грн. ми отримали два оптимальних варіанти:

1) між першими двома підприємствами розподілити 150 млн. грн., а третьому не надавати коштів;

2) 150 млн. грн. віддати третьому підприємству, а першим двом не надавати коштів.

В обох випадках максимальний приріст продукції становитиме 170 млн. грн.

На завершення цього етапу проведемо аналіз розподілу 200 млн. грн. між першими трьома підприємствами:

$$f_3(0)+F_2(200)=0+220=220$$

$$f_3(50)+F_2(150)=55+170=225$$

$$F_3(200) = \max f_3(100)+F_2(100)=85+110=295 = 230$$

$$f_3(150)+F_2(50)=170+60=230$$

$$f_3(200)+F_2(0)=225+0=225$$

Ми бачимо, що найбільший приріст продукції 230 млн. грн. отримаємо, якщо 50 млн. грн. розподілимо між першими двома підприємствами, а в третє інвестуємо 150 млн. грн.

Переходимо до четвертого етапу, в якому необхідно проаналізувати ефективність розподілу наявних інвестицій уже між чотирма підприємствами фірми.

Поклавши $k=4$, маємо рекурентне рівняння:

$$F_4 x = \max [f_4(x_4) + F_3(x - x_4)]$$

$$0 \leq x_4 \leq x$$

Оскільки описуваний етап є завершальним і розраховувати значення $F_4(0)$, $F_4(50)$, $F_4(100)$ та $F_4(150)$ не має змісту, тому доцільно перейти відразу до визначення $F_4(200)$.

$$f_4(0)+F_3(200)=0+230=230$$

$$f_4(50)+F_3(150)=70+170=240$$

$$F_4(200) = \max f_4(100)+F_3(100)=105+115=220 = 240$$

$$f_4(200)+F_3(0)=230+0=230$$

Максимальний ефект розміром 240 млн. грн. забезпечує другий член $f_4(50)+F_3(150)$. Аналіз одержаних розрахунків показує, що оптимальним варіантом буде виділення четвертому підприємству інвестицій розміром 50 млн. грн., а першим трьом разом – 150 млн. грн. Щоб дізнатись, який оптимальний варіант розподілу 150 млн. грн. між першими трьома підприємствами, повернемося до $F_3(150)$. Бачимо, що 150 млн. грн. оптимально можна розділити за двома варіантами:

- $f_3(0)+F_2(150)$, тобто третьому підприємству кошти не виділяти, а віддати першим двом 150 млн. грн. Щоб визначити оптимальний варіант розподілу 150 млн. грн. між першими двома підприємствами, повернемося до $F_2(150)$. Бачимо, що цей варіант розподілу отримуємо з виразу $f_2(50)+F_1(100)$, тобто другому підприємству даємо 50 млн. грн., а першому – 100 млн. грн.

- $f_3(150)+F_2(0)$, який означає, що в третє підприємство вигідно інвестувати 150 млн. грн., а першим двом кошти не виділяти.

Таблиця 5.2

Результати розрахунків

Розмір інвестицій млн. грн., x	Значення приросту продукції, млн. грн.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	-
50	45	60	60	-
100	110	110	115	-
150	160	170	170	-
200	210	220	230	240

Отже, ми отримали два оптимальні плани розподілу 200 млн. грн. між чотирма підприємствами фірми:

І варіант розподілу		ІІ варіант розподілу	
Підприємство	Розмір інвестицій	Підприємство	Розмір інвестицій
Перше	100 млн. грн.	Перше	0 млн. грн.
Друге	50 млн. грн.	Друге	0 млн. грн.
Третє	0 млн. грн.	Третє	150 млн. грн.
Четверте	50 млн. грн.	Четверте	50 млн. грн.

При розподілі коштів за кожним з двох варіантів отримаємо максимальний приріст продукції розміром 240 млн. грн.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу динамічного програмування.
2. Наведіть приклади економічних задач, що розв'язуються методами динамічного програмування.
3. Сформулюйте характерні особливості математичної моделі динамічного програмування.
4. Зобразіть схематично процес керування в задачах динамічного програмування.
5. Дайте визначення принципу оптимальності Белмана.
6. Опишіть економічну і математичну постановку задачі оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами.
7. Сформулюйте дефініцію моделі оптимальної заміни устаткування.

Література: [20; 25]

Тема № 7. КОРЕЛЯЦІЯ ДВОХ ЗМІННИХ

Лабораторна робота № 6

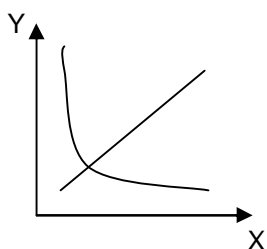
«Модель парної лінійної кореляційної залежності»

Економетрична модель – різновид економіко-математичної моделі, параметри якої оцінюються за допомогою методів математичної статистики.

Одним з основних підходів у вимірі зв'язку між досліджуваними показниками в економетричній моделі є кореляційно-регресивний аналіз. Він являє собою комплекс методів, за допомогою яких визначається вид рівняння для досліджуваних показників та розрахунок їх параметрів (регресивний аналіз), а також встановлення тісноти та значимості зв'язку між змінними у рівнянні або рівняннях (кореляційний аналіз).

Варто відрізнити кореляційний зв'язок від функціонального. Для вивчення кореляційних зв'язків використовуються методи кореляційного і регресійного аналізу. Кореляційні методи застосовуються для опису взаємодії випадкових величин; методи регресійного аналізу – при дослідженні зв'язку між випадковими значеннями функції і не випадкових значень аргументів. Кореляційна залежність виявляє тенденцію у відношенні Y та X .

Функціональний зв'язок – це такий зв'язок, при якому кожному значенню незалежної перемінної (аргументу) відповідає строго визначена величина залежної перемінної (функції). Функціональний зв'язок часто називають повним зв'язком, оскільки в ній відбивається вся безліч причинно-наслідкових відношень, що існують між розглянутими ознаками.



Y – вартість;

X – кількість одиниць.

Кореляційний зв'язок є неповним статистичним зв'язком. При кореляційній взаємодії на показник-функцію впливають не тільки фактори-аргументи, відібрані в процесі дослідження, але й безліч інших ознак, що не піддаються вивченню в силу недосконалості статистичного обліку, труднощі обчислення і т.п.

При кореляційному зв'язку кожному значенню незалежної перемінної можуть відповідати декілька значень (статистичний розподіл) функції.



Зміст змінних і рівнянь в економетричній моделі

В регресійному аналізі розрізняють рівняння парної (простої) та множинної (багатофакторної) регресії.

Коли зв'язок із залежною змінною Y здійснюється з одним видом незалежних змінних X , то рівняння регресії є найпростішим і має назву рівняння парної регресії (проста модель). Якщо залежна змінна y пов'язана з декількома видами незалежних змінних X_j ($j=1...m$), то така залежність має назву рівняння множинної регресії.

У загальному вигляді проста вибіркова регресійна модель запишеться так:

$$Y = f(X) + u,$$

де X – незалежна змінна,
 Y – залежна змінна,
 u – випадкова складова.

Незалежні фактичні змінні X найчастіше бувають детермінованими і вони є наперед заданими змінними, або вхідними показниками.

Випадкові складові u називають ще стохастичними складовими, помилками або частіше залишками. Вони є наслідками помилок спостережень, містять у собі вплив усіх випадкових факторів, а також факторів, які не входять у модель.

Прості лінійні регресійні моделі встановлюють лінійну залежність між двома змінними. При цьому одна із змінних вважається залежною змінною (Y) та розглядається як функція від незалежної змінної (X).

У загальному вигляді проста вибіркова регресійна модель запишеться так:

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

де Y – вектор спостережень за залежною змінною;

X – вектор спостережень за незалежною змінною;
 a_0, a_1 – невідомі параметри регресійної моделі;
 u – вектор випадкових величин (помилки).

У загальному матричному вигляді економетрична модель записується так:

$$Y=AX+u,$$

де A – матриця параметрів моделі розміром $m \times n$ (m – кількість незалежних змінних, n – число спостережень);
 Y – матриця значень залежної змінної;
 X – матриця незалежних змінних;
 u – матриця випадкової складової.

Регресійна модель називається лінійною, якщо вона лінійна за своїми параметрами.

Французький математик Лежандром у XIX ст. запропонував метод знаходження теоретичної лінії, наближеної до фактичних даних як мінімальну суму (S) квадратів відхилення їх ординат Y_i від теоретичних значень Y :

$$S = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y - Y_i)^2 = \min$$

Назва цього методу – метод найменших квадратів (або скорочено МНК).

Задача.

Згідно з варіантом (додаток 15) потрібно побудувати лінійну модель виду $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$. Вибірка даних характеризує роботу підприємства. У вибірці кожному значенню залежної змінної Y відповідає значення незалежної змінної X . Оцінити міру впливу на досліджуваний результативний показник (Y) незалежного фактора (X).

Потрібно: знайти параметри моделі; оцінити тісноту та значимість зв'язку між змінними моделі; проаналізувати достовірність моделі та її параметрів. Побудувати модель в декартових координатах. Застосувати модель для прогнозування розвитку економічних процесів. Виконати економічний аналіз отриманих результатів.

Приклад виконання лабораторної роботи

Задача. Маємо вибірку даних, які характеризують роботу підприємства за останні 8 місяців. Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$ об'єму реалізації підприємства (Y), тис. грн., в залежності від витрат на впровадження інновацій в попередньому періоді (X), тис грн.

Для аналізу необхідно розрахувати:

- 1) коефіцієнт детермінації;
- 4) коефіцієнт кореляції;
- 5) стандартні похибки оцінок параметрів моделі порівняти з величиною

оцінок;

- б) перевірити значущість змінної за t-критерієм Стьюдента;
- 7) знайти інтервали надійності для оцінок параметрів моделі;
- 8) відобразити модель на графіку;
- 9) знайти прогнозні значення матриці залежних змінних $Y_{пр}$, які відповідають **очікуваним значенням** матриці незалежних змінних $X_{пр}$.
- 10) зробити економічний висновок.

Вихідні дані для розрахунку в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Спостереження	Об'єм реалізації, тис. грн.	Витрати на впровадження інновацій в попередньому періоді, тис. грн.
	Y	X
1	862,3	27,1
2	804,9	25,2
3	804,9	25,0
4	559,5	14,3
5	592,3	14,2
6	583,1	11,5
7	832,1	24,3
8	851,7	21,5
Середнє значення	736,35	

Для спрощення розрахунків використаємо вбудовані електронні таблиці Microsoft Excel статистичну функцію ЛИНЕЙН. Ця функція застосовує метод найменших квадратів, щоб визначити оцінки параметрів лінійної регресії.

Суть методу найменших квадратів, полягає у наступному: сума квадратів відхилень ординат точки, що спостерігається, (X_i, Y_i) від відповідної ординати точки, що лежить на регресійній прямій, повинна бути найменшою

$$S = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2 = \min .$$

Результат застосування статистичної функції ЛИНЕЙН – це оцінка параметрів лінійної регресії та регресійна статистика:

20,45	319,44
3,033	64,203
0,883	48,935
45,47	6
108879,7	14367,5

$$\beta_0 = 319,44; \quad \beta_1 = 20,45$$

Можна побудувати рівняння регресії: $Y_{\text{розн}} = 319,44 + 20,45 X$.

Коефіцієнт регресії $\beta_1 = 20,45$ говорить про те, що збільшення витрат на впровадження інновацій на 1 тис. грн. збільшить об'єм реалізації на 20,45 тис. грн.

Для визначення статистичних коефіцієнтів та подальших розрахунків знаходимо відхилення (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

$Y_{\text{факт}}$	$Y_{\text{розн}}$	$(Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розн}})^2$	$(Y_{\text{факт}} - Y_{\text{сеп}})^2$	$(Y_{\text{розн}} - Y_{\text{сеп}})^2$
1	2	3	4	5
862,3	873,62	128,05	18842,0	18841,98
804,9	834,76	891,76	9685,0	9685,00
804,9	830,67	664,22	8896,7	8896,74
559,5	611,86	2742,07	15496,6	15496,58
592,3	609,82	306,94	16009,9	16009,89
583,1	554,61	811,87	33030,7	33030,65
832,1	816,36	247,81	6401,3	6401,28
851,7	759,10	8574,78	517,6	517,56
		14367,5	108879,7	108879,7

Статистична функція ЛИНЕЙН обчислює додаткову регресійну статистику:

$$\sum (Y_{\text{розн}} - \bar{Y})^2 - \text{сума квадратів відхилення, що пояснюється регресією}$$

(колонка 5 з табл. 6.2);

$$\sum (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розн}})^2 - \text{сума квадратів відхилення, що пояснюється}$$

похибкою u (колонка 3 з табл. 6.2);

$\sum (Y_{\text{факт}} - \bar{Y})^2$ – загальну суму квадратів відхилень розраховуємо (колонка 4 табл. 6.2).

Оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними моделі

Тісноту зв'язку між залежною змінною Y та незалежною змінною X оцінюють за допомогою статистичних характеристик: **коефіцієнта детермінації**, **коефіцієнта кореляції**. За допомогою цих коефіцієнтів перевіряється відповідність побудованої регресійної моделі (теоретичної) фактичним даним. **Значимість зв'язку** визначається за допомогою F -критерію Фішера.

Коефіцієнт детермінації

Розраховується за формулою:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{\text{розн}} - Y_{\text{сер}})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{сер}})^2} = 0,883 \quad (6.1)$$

Коефіцієнт кореляції (індекс кореляції)

Дає кількісну оцінку зв'язку між двома показниками і розраховується за такою формулою:

$$R = \pm \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розн}})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{сер}})^2}} = 0,9399 \quad (6.2)$$

Іноді для спрощення розрахунків тісноту кореляційного зв'язку характеризують коефіцієнтом кореляції, який розраховується за формулою:

$$R = \sqrt{R^2} = 0,94 \quad (6.3)$$

F-критерій Фішера

Тестування значимості змінної X , або адекватності моделі проводиться за критерієм Фішера.

$$F_{\text{розн}} = \frac{\sum (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{сер}})^2}{\sum (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розн}})^2} = 8,58 \quad (6.4)$$

Розрахунковий критерій Фішера з урахуванням ступенів вільності обчислюємо за формулою:

$$F_{\text{розр}} = \frac{\sum (Y_{\text{розр}} - Y_{\text{сеп}})^2 / m}{\sum (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{сеп}})^2 / (n - m - 1)} = 45,47 \quad (6.5)$$

де m , $(n-m-1)$ – число ступенів вільності відповідно чисельника та знаменника залежності;

n – кількість спостережень;

m – кількість незалежних змінних.

$$F_{\text{розр}} = 8,58$$

$F_{\text{табл}}^{0,05}$ визначаємо за допомогою статистичної функції ФРАСПОБР(0,05;6;7) для рівня надійності $\alpha=0,05$ і ступенів вільності відповідно $f_1 = (n-m-1) = 8-1-1=6$ та $f_2 = (n-1) = 8-1=7$:

$$F_{\text{табл}}^{0,05} = 3,87$$

$F_{\text{розр}} > F_{\text{табл}}^{0,05}$, робимо висновок про адекватність побудованої моделі – припускаємо присутність лінійного зв'язку.

Оцінка точності моделі

Визначаємо стандартні похибки оцінок параметрів моделі з урахуванням дисперсії залишків:

$$S_{\beta_j} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{kj}} \quad (6.6)$$

де σ_u^2 – дисперсія залишків:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{n - m_1} \quad (6.7)$$

c_{kj} – елемент матриці похибок C (матриця, обернена до матриці коефіцієнтів системи нормальних рівнянь);

m_1 – кількість параметрів моделі.

$$S_{\beta_0^*} = 64,2 < 319,44$$

$$S_{\beta_1^*} = 3,03 < 20,45$$

Порівняємо стандартні похибки оцінки з величиною оцінки: $\frac{S_{\beta_j}}{\beta_j} 100$.

$$S_{\beta_0^*} = S_{\beta_0^*} / \beta_0^* * 100 = 64,2 / 319,44 * 100 = 20,1\%$$

$$S_{\beta_1^*} = S_{\beta_1^*} / \beta_1^* * 100 = 3,03 / 20,45 * 100 = 14,83\%$$

Визначається також середньоквадратичне відхилення (похибка)

$$S_{yx} = \pm \sqrt{\frac{\sum (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розн}})^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{14367,5}{8-1}} = \pm 45,3 \quad (6.8)$$

Відносна похибка

$$\sigma = \frac{S_{yx}}{Y_{\text{сер}}} \cdot 100 = \frac{45,3}{736,35} \cdot 100 = 6,2\% \quad (6.9)$$

Перевірка значущості та довірчі інтервали

Перевірка значущості коефіцієнта детермінації

Для перевірки статистичної значущості коефіцієнта детермінації R^2 висувається нульова гіпотеза

$$H_0: R^2=0.$$

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0.$$

Альтернативною до неї є

$$H_A: \beta_j \neq 0$$

Для перевірки цих обчислюють експериментальне значення F-статистики:

$$F_{\text{експ}} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = 15,45 \quad (6.10)$$

$$F_{\text{табл}}^{0.05} = 3,87$$

$$F_{\text{експ}} > F_{\text{табл}}^{0.05}$$

Нульова гіпотеза відхиляється, тобто існує такий коефіцієнт у регресійному рівнянні, який суттєво відрізняється від нуля, а відповідний фактор виливає на досліджувану змінну. Відхилення нуль-гіпотези свідчить про адекватність побудованої моделі.

Перевірка значущості коефіцієнта кореляції

Коефіцієнт кореляції перевіряється на значущість за допомогою t-критерію Ст'юдента. Фактичне значення t-статистики обчислюється за формулою

$$t_{\text{експ}} = \frac{R\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-R^2}} = 6,74 \quad (6.11)$$
$$t_{\text{табл.}} = 2,45$$
$$|t_{\text{експ}}| > t_{\text{табл.}}$$

Можна зробити висновок, що коефіцієнт кореляції достовірний (значущий), а зв'язок між залежною змінною та всіма незалежними факторами суттєвий.

Оцінка статистичної значущості параметрів моделі

Статистичну значущість кожного параметра моделі можна перевірити за допомогою t-критерію. При цьому нульова гіпотеза має вигляд

$$H_0: \beta_j = 0,$$

альтернативна

$$H_A: \beta_j \neq 0.$$

Експериментальне значення t-статистики для кожного параметра моделі обчислюється за формулою

$$t_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{\sigma_u^2 \cdot c_{jj}}} = \frac{\beta_j}{S_{\beta_j}} \quad (6.12)$$

де C_{jj} – діагональний елемент матриці $(X'X)^{-1}$;

S_{β_j} – стандартна похибка оцінки параметра моделі:

$$S_{\beta_j} = \sigma_u \sqrt{c_{jj}} \quad (6.13)$$

$$t_1 = 6,74; \quad t_0 = 4,98$$

$$t_{\text{табл}} = 2,45$$

$$|t_{\text{експ}}| > t_{\text{табл.}}$$

Значення t-статистики потрапляє до критичної області (за абсолютним значенням перевищує $t_{\text{табл}}$), приймається альтернативна гіпотеза про значущість параметрів.

Знайдемо інтервали надійності для кожного окремого параметра за формулою:

$$P\{b_j^* - t \cdot S_{b_j} < b_j < b_j^* + t \cdot S_{b_j}\} = 1 - \alpha$$

Оскільки оцінки параметрів моделі β_j^* , $t_{\text{спос}}$ і стандартні похибки параметрів моделі S_{β_j} обчислені нами у попередніх пунктах, достатньо просто скористатися формулою для знаходження інтервалів:

$$= 319,44 - 2,4469 \cdot 64,2 < \beta_0 < 319,44 + 2,4469 \cdot 64,2$$

$$= 20,45 - 2,4469 \cdot 3,03 < \beta_1 < 20,45 + 2,4469 \cdot 3,03$$

$$P(0162,34 < \beta_0 < 476,54) = 0,95$$

$$P(13,03 < \beta_1 < 27,87) = 0,95$$

Розрахуємо коефіцієнт еластичності за формулою:

$$E_i = \frac{X}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{A_i \cdot X_{i \text{ сеп}}}{Y_{p \text{ сеп}}} = \frac{20,45 \cdot 20,39}{736,35} = 0,566.$$

Коефіцієнт еластичності говорить про те, що збільшення витрат на впровадження інновацій на 1% , збільшить об'єм реалізації на 0,566%.

Зобразимо побудовану кореляційно-регресійну модель на графіку (рис.6.1).

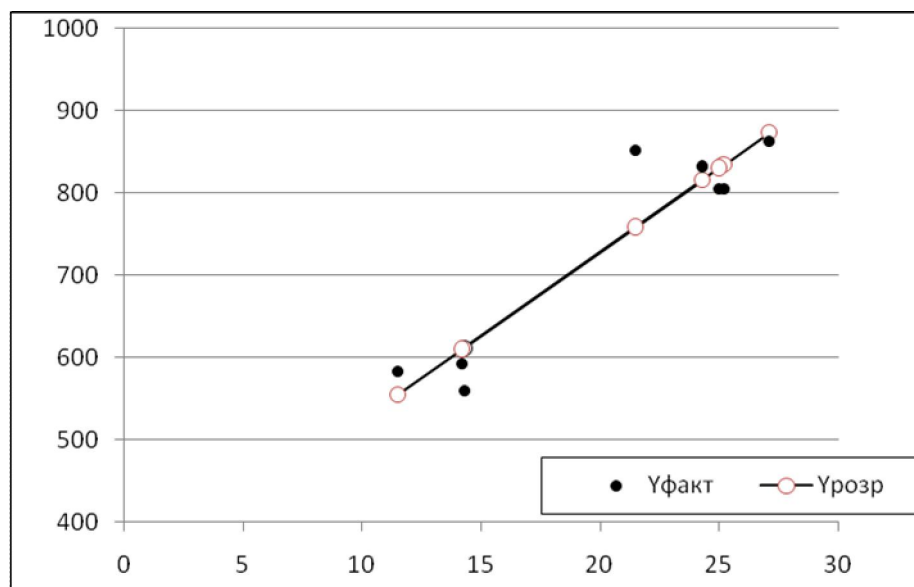


Рис. 6.1. Кореляційно-регресійна модель

Прогнозування за лінійною моделлю

Побудована модель адекватна за F-критерієм, то її можна застосувати для прогнозування залежної змінної.

На підставі побудованої моделі можна знайти прогнозні значення матриці залежних змінних $Y_{\text{пр}}$, які відповідають очікуваним значенням матриці незалежних змінних $X_{\text{пр}}$.

Прогноз на перспективу буває двох видів: точковий та інтервальний.

Незміщена оцінка точкового прогнозу може розглядатися як точкова оцінка математичного сподівання прогнозного значення $Y_{\text{пр}}$

$$M[Y_{\text{пр}}(X_{\text{пр}})] = BX_{\text{пр}} \quad (6.14)$$

а також як індивідуальне значення $Y_{\text{пр}}$ для матриці незалежних змінних $X_{\text{пр}}$, що лежать за межами базового періоду $Y_{\text{пр}} = BX_{\text{пр}}$.

У рівняння $Y_{\text{розн}} = 319,44 + 20,45 X$ підставимо прогнозні значення фактору $X_{\text{пр}} = 27,1$ що лежить за межами базового періоду (точковий прогноз):

$$Y_{\text{пр}} = 319,44 - 20,45 \cdot 27,1 = 873,616$$

Дисперсія похибки прогнозу дорівнює

$$y_n^2 = y_u^2 X'_{\text{пр}} (X'X)^{-1} X_{\text{пр}} = X'_{\text{пр}} \text{var}(B) X_{\text{пр}} \quad (6.15)$$

де σ_u^2 – дисперсія залишків u , яка розраховується за формулою (3.7);
 $\text{var}(B)$ – дисперсійно-коваріаційна матриця, яка записується у вигляді:

$$\text{var}(B) = \begin{vmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \sigma_{\beta_1\beta_2} & \dots & \sigma_{\beta_1\beta_m} \\ \sigma_{\beta_2\beta_1} & \sigma_{\beta_2}^2 & \dots & \sigma_{\beta_2\beta_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\beta_m\beta_1} & \sigma_{\beta_m\beta_2} & \dots & \sigma_{\beta_m}^2 \end{vmatrix} \quad (6.16)$$

Матриця похибок:

$$(X' * X)^{-1} = \begin{vmatrix} 1,72139 & -0,0783024 \\ -0,07830 & 0,0038407 \end{vmatrix}$$

Елементи на головній діагоналі матриці $\sigma_{\beta_j}^2$ та за її межами $\sigma_{\beta_j\beta_k}$ розраховуються за формулами:

$$\sigma_{\beta_j}^2 = \sigma_u^2 c_{jj} \quad (6.17)$$

$$\sigma_{\beta_0}^2 = \sigma_u^2 c_{00} = 2394,6 \cdot 1,72139 = 4122,016$$

$$\sigma_{\beta_1}^2 = \sigma_u^2 c_{11} = 2394,6 \cdot 0,0038407 = 9,1969$$

$$\sigma_{\beta_j \beta_k} = \sigma_u^2 c_{jk} \quad (6.18)$$

$$\sigma_{\beta_0 \beta_1} = \sigma_u^2 c_{01} = 2394,6 \cdot (-0,0783) = -187,5018$$

де c_{ij} , c_{jk} – елементи матриці похибок $(X'X)^{-1}$.

$$\text{var}(B) = \begin{vmatrix} 4122,016 & -187,5018 \\ -187,5018 & 9,19690 \end{vmatrix}$$

Тоді дисперсія прогнозу буде:

$$y_n^2 = X'_{np} \text{var}(B) X_{np} \quad (6.19)$$

$$X_{np} = \begin{vmatrix} 1 \\ 27,1 \end{vmatrix}$$

$$X'_{np} = \begin{vmatrix} 1 & 27,1 \end{vmatrix}$$

$$X'_{np} * \text{var}(A) = \begin{vmatrix} -959,2827488 & 61,73419732 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_n^2 = X'_{pr} \text{var}(B) X_{pr} = 713,714$$

Середньоквадратична (стандартна) похибка прогнозу:

$$y_n = \sqrt{y_n^2} = 26,71543 \quad (6.20)$$

Довірчий інтервал для прогнозних значень:

$$Y_{np} - t_\alpha \sigma_u \sqrt{X'_{np} (X'X)^{-1} X_{np}} \leq M(Y_{np}) \leq Y_{np} + t_\alpha \sigma_u \sqrt{X'_{np} (X'X)^{-1} X_{np}} \quad (6.21)$$

Інтервальний прогноз математичного сподівання $M(Y_{np})$ буде в межах:

$$Y_{np} - t_\sigma \sigma_n \leq M(Y_{np}) \leq Y_{np} + t_\sigma \sigma_n \quad (6.22)$$

$$873,616 - 2,4469 \cdot 26,71543 \leq M(Y_{np}) \leq 873,616 + 2,4469 \cdot 26,71543$$

$$808,2458 \leq M(Y_{np}) \leq 938,9864$$

Визначення інтервального прогнозу індивідуального значення $Y_{\text{пр}}$ базується на знаходженні середньоквадратичної помилки прогнозу:

$$\sigma_{n(i)}^2 = \sigma_u^2 + \sigma_n^2 = \sigma_u^2 + \sigma_u^2 X'_{\text{пр}} (X'X)^{-1} X_{\text{пр}} = \sigma_u \sqrt{1 + X'_{\text{пр}} (X'X)^{-1} X_{\text{пр}}} \quad (6.23)$$

Обчислимо дисперсію та стандартну помилку прогнозу індивідуального значення $Y_{\text{пр}}$:

$$\sigma_{n(i)}^2 = \sigma_u^2 + \sigma_n^2 = 2394,6 + 713,714 = 3108,3$$

$$\sqrt{\sigma_{n(i)}^2} = \sqrt{3108,3} = 55,7521$$

Тоді інтервальний прогноз індивідуального значення буде відповідати такому довірчому інтервалу:

$$Y_{\text{пр}} - t_{\alpha} \sigma_{n(i)} \leq Y_{\text{пр}} \leq Y_{\text{пр}} + t_{\alpha} \sigma_{n(i)} \quad (6.24)$$

$$873,616 - 2,4469 \cdot 55,7521 \leq Y_{\text{пр}} \leq 873,616 + 2,4469 \cdot 55,7521$$

$$737,1956 \leq Y_{\text{пр}} \leq 1010,0366$$

Висновки.

Згідно з обчисленими характеристиками можна сказати, що об'єм реалізації продукції підприємства на 88,3% залежить від витрат на впровадження інновацій в попередньому періоді, а на 11,7% від неврахованих в задачі чинників. Зв'язок між залежною змінною Y та незалежною X (об'ємом реалізації продукції та витратами на впровадження інновацій в попередньому періоді) досить високий (коефіцієнт кореляції дорівнює 0,94).

Перевірено значимість зв'язку між змінними моделі $F_{\text{розрах}} > F_{\text{табл}}^{0,05}$ ($8,58 > 3,87$) для рівня надійності $\alpha=0,05$. З 5%-ним ризиком помилитися припускаємо присутність лінійного зв'язку.

Стандартні помилки параметрів S_{β_j} не перевищують абсолютні значення цих параметрів:

$$S_{\beta_0^*} = 64,2 < 319,44$$

$$S_{\beta_1^*} = 3,03 < 20,45$$

Це означає, що оцінки параметрів є незміщеними відносно їх істотних значень.

Середньоквадратичне відхилення (похибка)

$$S_{yx} = \pm \sqrt{\frac{\sum (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розрах}})^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{14367,5}{8-1}} = \pm 45,3$$

свідчить про те, що фактичні значення Y відхиляються від розрахункових його значень на $\pm 45,3$ тис. грн.

Відносна похибка $\sigma = \frac{S_{yx}}{Y_{сер}} \cdot 100 = \frac{45,3}{736,35} \cdot 100 = 6,2\%$ – це характеризує

модель з хорошої сторони.

Проведена перевірка значущості коефіцієнта детермінації за F-критерієм Фішера. $F^{0,05}_{табл} < F_{експ} (3,87 < 15,45)$. Коефіцієнт детермінації значущий.

Перевірена значимість коефіцієнта кореляції за t-критерієм Ст'юдента. $t_{табл} < |t_{експ}| (2,45 < 6,74)$. Коефіцієнт кореляції достовірний (значущий) і зв'язок між залежною змінною та всіма незалежними факторами суттєвий.

Дана оцінка значимості кожного параметра моделі за допомогою t-критерію Ст'юдента: $|t_{експ}| > t_{табл}$ – параметри моделі є значущими.

Отже, модель є достовірною та відображає тісний кількісний взаємозв'язок між залежним та незалежним показниками і може бути використана для практичного економічного висновку.

На даному підприємстві збільшення об'єму реалізації продукції обумовлюється збільшенням витрати на впровадження інновацій у попередньому періоді. Так, на кожні 10 тис. грн. збільшення витрат на впровадження інновацій, можливе підвищення об'єму реалізації продукції підприємства на 204,57 тис. грн., за умови незмінної дії інших чинників.

Були обчислені прогнозні значення $Y_{пр}$ для $X_{пр} = |1; 27,1|$:

$$Y_{пр} = 319,44 + 20,45 \cdot 27,1 = 873,616 \text{ тис. грн.}$$

Так, при ймовірності $P=0,95$ ($\alpha=0,05$), прогноз математичного сподівання $M(Y_{пр})$ потрапляє в інтервал $[808,2458; 938,9864]$, а прогноз індивідуального значення $Y_{пр}$ – в інтервал $[737,1956; 1010,03]$.

В економічній інтерпретації це означає, що при прогнозних значеннях збільшення витрат на впровадження інновацій 27,1 тис. грн. об'єм реалізації продукції підприємства потрапляє в інтервал:

$$808,2458 \leq M(Y_{пр}) \leq 938,9864$$

Водночас окремі (інтервальні) значення об'єму реалізації продукції підприємства містяться в інтервалі:

$$737,1956 \leq Y_{пр} \leq 1010,0366$$

Контрольні запитання

1. У чому суть методу найменших квадратів?
2. Які основні причини наявності в регресійній моделі випадкового відхилення?
3. Як розрахувати невідомі параметри лінійної моделі?
4. Пояснити сутність поняття "тіснота зв'язку".
5. Пояснити сутність поняття "значимість зв'язку".
6. За допомогою яких характеристик перевіряються тіснота зв'язку між змінними моделі?
7. За допомогою якої характеристики перевіряються значимість зв'язку між змінними моделі?
8. Що показує коефіцієнт детермінації і в яких межах він приймає значення?
9. Що показує коефіцієнт кореляції?
10. Запишіть формулу дисперсії залишків.
11. З якою ціллю розраховуються стандартні похибки оцінок параметрів?
12. За якими характеристиками вибирається табличне значення критерію Фішера?
13. Як визначити коефіцієнт детермінації у парній регресійній моделі?
14. Як визначити коефіцієнт кореляції у парній регресійній моделі?
15. У чому відмінність між точковим і інтервальним прогнозом?

Література: [3, с. 233-263; 5, с. 415-463; 8, с. 25-38; 9, с. 43-46, 96-106, 111-130; 10, с. 44-60, 63-65, 102; 11, с. 23-29, 113-120, 127-140; 12, с. 41-58].

Тема № 8. ФУНКЦІЇ І ГРАФІКИ В ЕКОНОМЕТРИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Лабораторна робота № 7

«Пошук взаємозалежності між економічними процесами»

Постановка задачі.

Результатом спостережень, або вимірювань показників є таблиця значень цих показників. Розробити емпіричну (дослідну) модель залежності Y від X , яка мінімально відрізняється від дослідних даних.

Згідно варіанту (додаток 16) дослідити залежність одного економічного показника (Y) від іншого (X). Передбачається, що залежність між Y та X може бути:

Лінійна

$$Y = a_0 + a_1x$$

Гіперболічна

$$Y = a_0 + \frac{a_1}{x}$$

Параболічна	$Y = a_0 + a_1x^2$
Ступінна	$Y = a_0x^{a_1}$
Експоненціальна	$Y = ae^{bx}$
Проста модифікована експоненціальна	$Y = a \cdot e^x + b$

Мета роботи:

1. Визначити аналітичну залежність між дослідними даними.
2. Знайти параметри моделі.
3. Провести оцінку тісноти на значимості зв'язку між показниками моделі (Y, X).
4. Провести оцінку точності отриманої моделі.
5. Обчислити прогнозні значення $Y_{пр}$ (точковий прогноз).
6. Представити модель на графіку.

Алгоритми побудови моделей

Модель лінійної регресії (лінійне рівняння) є найпоширенішим видом залежності між економічними змінними. Skorистаймося методом найменших квадратів, суть якого полягає у наступному: сума квадратів відхилень ординат точки, що спостерігається (X_i, Y_i) від відповідної ординати точки, що лежить на регресійній прямій, повинна бути найменшою

$$S = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2 = \min .$$

Використання 1МНК для оцінки теоретичних параметрів моделі парної регресії приводить до таких систем нормальних рівнянь:

1) лінійна залежність $Y = a_0 + a_1X$.

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n X = \sum_{i=1}^n Y \\ a_0 \sum_{i=1}^n X + a_1 \sum_{i=1}^n X^2 = \sum_{i=1}^n YX \end{cases}$$

Побудоване лінійне рівняння може слугувати початковою точкою в разі складних (суттєво нелінійних) залежностей.

Нелінійні зв'язки, як правило, певними перетвореннями (заміною змінних чи логарифмуванням) зводять до лінійного вигляду або апроксимують (наближують) лінійними функціями.

2) **гіперболічна залежність** $Y = a_0 + a_1 \frac{1}{X}$. Замінюємо $\frac{1}{X} = x'_i$

отримаємо лінійну модель $Y = a_0 + a_1 x'$.

Для оцінки теоретичних параметрів моделі складаємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x' = \sum_{i=1}^n Y \\ a_0 \sum_{i=1}^n x' + a_1 \sum_{i=1}^n (x')^2 = \sum_{i=1}^n Yx' \end{cases}$$

3) **параболічна залежність** $Y = a_0 + a_1 x^2$. Замінюємо $x^2 = x'$ і отримаємо лінійну модель $Y = a_0 + a_1 x'$.

Для оцінки теоретичних параметрів моделі складаємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x' = \sum_{i=1}^n Y \\ a_0 \sum_{i=1}^n x' + a_1 \sum_{i=1}^n (x')^2 = \sum_{i=1}^n Yx' \end{cases}$$

4) **степенева залежність** $Y = a_0 x^{a_1}$.

Логарифмуємо функцію $\ln Y = \ln a_0 + a_1 \cdot \ln X$.

Замінюємо логарифми $\ln Y = Y'$, $\ln X = X'$, $\ln a_0 = a'$.

Одержуємо лінійну модель $Y' = a' + a_1 \cdot X'$.

Складаємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na' + a_1 \sum_{i=1}^n x' = \sum_{i=1}^n Y' \\ a' \sum_{i=1}^n x' + a_1 \sum_{i=1}^n (x')^2 = \sum_{i=1}^n Y'x' \end{cases}$$

5) **експоненціальна** $Y = ae^{bx}$.

Для оцінки теоретичних параметрів зводимо модель до лінійного вигляду.

Логарифмуємо функцію $\ln Y = \ln a + bx$

Замінюємо логарифми $\ln Y = Y'$; $\ln a = a'$

Одержуємо лінійну модель $Y' = a' + bx$

б) проста модифікована експоненціальна $Y = a \cdot e^x + b$

Методом заміни зводимо модель до лінійного вигляду:

$$Y = ae^x + b$$

$$e^x = x'$$

$$Y = ax' + b$$

Результати розрахунків зводимо до таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	R^2	<i>F</i>	R
Модель 1						
Модель 2						
Модель 3						
Модель 4						
Модель 5						
Модель 6						
				<i>max</i>		

В економічних розрахунках вважається прийнятним такий зв'язок між факторами, при якому $R^2 > 0,7$. Всі інші фактори можуть не включатися в подальші розрахунки рівнянь регресії.

Припустимо, що для опису одного економічного процесу придатні дві моделі. Обидві адекватні за F-критерієм Фішера. Перевагу надають моделі з більшим коефіцієнтом детермінації.

Контрольні запитання

1. Дати поняття функції в економічних дослідженнях.
2. Способи завдання функцій.
3. Типи функцій та їх характері точки.
4. Які види рівнянь регресії описують економічні процеси?
5. Функції однієї змінної в задачах з економіки.
6. Основні етапи побудови лінійних моделей.
7. Класифікація економіко-математичних методів і моделей.
8. Етапи моделювання економічних процесів.
9. Записати рівняння парної лінійної регресії.
10. Записати рівняння парної регресії при параболічній залежності.
11. Записати рівняння парної регресії при гіперболічній залежності.
12. Показати на графіку залежності, які використовують в економіці.

Література: [1, с. 169-193; 5, с. 538-598; 9, с. 179-200; 10, с. 138-150; 12, с. 66-73].

Тема № 9. ОДНОВИМІРНІ ЧАСОВІ РЯДИ ТА ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ

Елементи часового ряду.

У дослідженні економічних показників важливе місце належить часовим або динамічним рядам, що представляють собою сукупність числових даних, які характеризують зміну деякого показника в часі.

Розрізняють інтервальні і моментні ряди.

Прикладом **інтервального** ряду може служити сукупність показників, що характеризують випуск однорідної продукції за кілька років.

Типовим **моментним** рядом є безліч числових значень, що відбивають вартість залишків готових виробів на складі підприємства за станом на кінець кожного дня.

Кожен член (рівень) часового ряду (Y_t) можна в найпростішому випадку представити як суму двох складових:

$$Y_t = \bar{Y}_t + \gamma,$$

де Y_t – значення ознаки, що впливає із закономірної зміни показника в часі;
 γ – випадковий компонент.

Виокремлюють три основні систематичні компоненти часового ряду:

- тренд;
- сезонність;
- циклічність.

Тренд (тенденція) часового ряду (T_t) – це систематична лінійна чи нелінійна компонента, яка плавно змінюється з часом. Вона описує чистий вплив довготривалих факторів (наприклад, зростання чисельності населення, змінювання промислового виробництва тощо).

Сезонна компонента (S_t) – це періодичні коливання рівнів часового ряду протягом не дуже тривалого періоду (тижня, місяця, максимум – року). Сезонність відбиває повторюваність економічних процесів у межах одного року (наприклад, обсяг продажу певної групи товарів у різні пори року).

Циклічність (C_t) – це періодичні коливання, що виходять за межі одного року. Проміжок часу між двома сусідніми "вершинами" (найбільшими значеннями) чи "западинами" (найменшими значеннями) є довжиною циклу. Циклічність відбиває повторюваність економічних процесів протягом тривалих періодів (наприклад, фазовий процес розвитку економіки).

Рівні часового ряду можуть одночасно містити всі систематичні компоненти або лише деякі з них.

Випадкова складова γ відбиває різкі й несподівані впливи, що найсильніше позначаються на основній тенденції ряду, а також вплив поточних чинників, пов'язаних, наприклад, з похибками вимірювань.

Для визначення основної тенденції (тренда) в рівнях часового ряду зазвичай застосовують методи механічного або аналітичного вирівнювання.

Однак перш ніж будувати трендове рівняння, необхідно перевірити гіпотезу про існування тенденції часового ряду.

Найчастіше для перевірки такої гіпотези застосовують:

- 1) порівняння середніх рівнів фрагментів ряду;
- 2) критерій "зростаючих і спадних" серій;
- 3) метод Фостера-Стюарта тощо.

Перевірка гіпотези про існування тенденції

Під *тенденцією* розуміють деякий загальний напрям розвитку, довготривалу еволюцію. Тенденцію ряду динаміки зображають у вигляді гладкої кривої (траєкторії) як функцію часу і називають трендом. *Тренд* характеризує основну закономірність розвитку економічного явища в часі, вільну в основному (але не цілковито) від випадкових впливів.

Здебільшого отриману траєкторію пов'язують виключно з часом. Припускають, що, розглядаючи будь-яке явище як функцію часу, можна виявити спільний вплив усіх основних чинників, не визначаючи впливу кожного з них в явному вигляді. У зв'язку з цим під трендом зазвичай розуміють регресію на час.

На практиці зручніше користуватися загальним поняттям, згідно з яким тренд – це детермінована складова динаміки розвитку, зумовлена впливом постійно діючих факторів. При цьому окремі рівні часового ряду не збігаються із загальною тенденцією, а мають певні випадкові відхилення від неї, які характеризують випадкові впливи. Отже, рівняння, що описує процес у часі, має випадкову складову – відхилення від тренда. Тому рівні часового ряду описують рівнянням

$$y_t = f(t) + u$$

де $f(t)$ – систематична складова, яка характеризує основну тенденцію явища в часі;

u – випадкова складова.

У часових рядах можна спостерігати тенденції трьох видів: середнього рівня; дисперсії; автокореляції.

Тенденцію середнього рівня наочно можна представити графіком часового ряду. Він має вигляд функції $f(t)$, навколо якої варіюють фактичні значення явища, що вивчається.

Тенденція дисперсії – це зміни відхилень емпіричних значень часового ряду від значень, обчислених за рівнянням тренда.

Тенденція автокореляції – це тенденція зміни зв'язку між окремими рівнями часового ряду.

Для опису і детального вивчення часових рядів застосовують різні математичні моделі, які дають змогу виявити їх основні компоненти.

При різних поєднаннях систематичних складових ряду залежність його рівнів

від часу може набувати різних форм.

На рис. 9.1 показано компоненти гіпотетичного часового ряду, що ілюструє зростаючу тенденцію (а) і гіпотетичний часовий ряд, що містить лише сезонну компоненту (б).

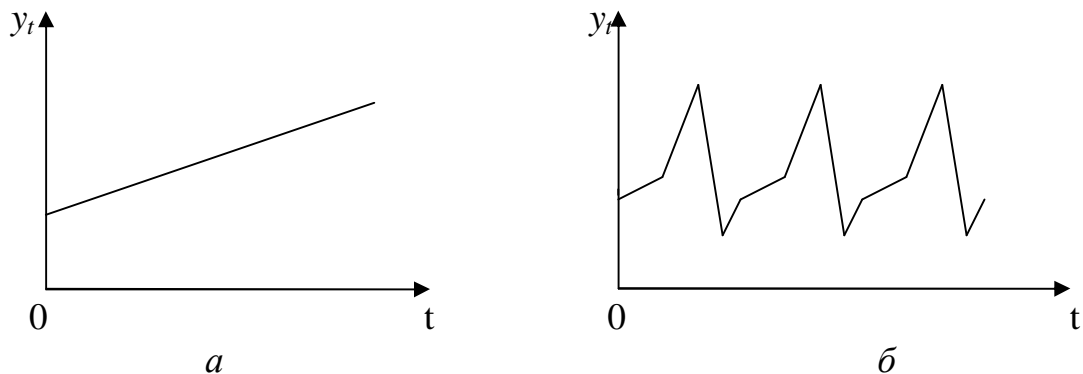


Рис. 9.1. Часові ряди: (а) ілюструє зростаючу тенденцію; (б) містить лише сезонну компоненту.

Деякі часові ряди не містять тенденції й циклічної компоненти, а кожен наступний їх рівень утворюється як сума середнього рівня ряду та деякої (додатної чи від'ємної) випадкової компоненти. Приклад ряду, що містить лише випадкову компоненту, наведено на рис. 9.2.

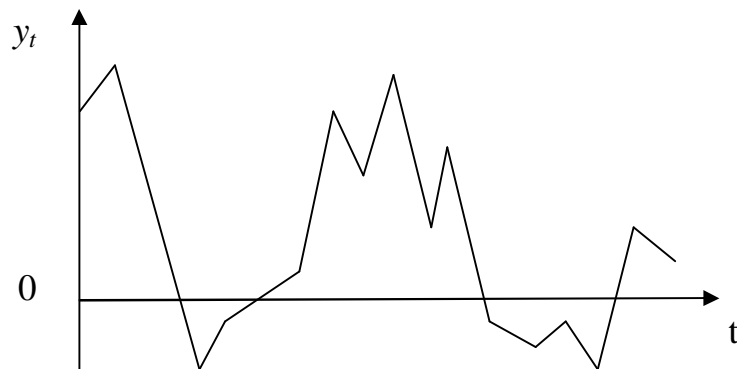


Рис. 9.2. Часовий ряд, що містить лише випадкову компоненту

Для аналізу часових рядів існує декілька методів:

- методи кореляційного аналізу, які дають можливість виявити найбільш суттєві періодичні залежності та їх лаги (затримки) в одному процесі (автокореляція) або між декількома процесами (кроскореляція);
- методи спектрального аналізу дозволяють знаходити періодичні та квазіперіодичні залежності в даних;
- методи згладжування та фільтрації призначені для перетворення часових рядів з метою усунення з них високоякісних або сезонних коливань;
- методи авторегресії та ковзного середнього є особливо корисними для опису та прогнозування процесів, які виявляють однорідні коливання навколо середнього значення.

Перевірка наявності тенденції середнього рівня

Один із способів перевірки наявності тенденції заснований на порівнянні середніх рівнів ряду: часовий ряд розбивають на дві приблизно рівні частини, кожна з яких розглядають як деяку самостійну вибірку сукупність, що має нормальний розподіл. Якщо часовий ряд має тенденцію до змінювання, то середні значення, обчислені для кожної сукупності, мають істотно (значно) різнитися між собою. Якщо розбіжність буде незначною (неістотною, випадковою), це означатиме, що часовий ряд не має тенденції.

Отже, перевірка наявності тренда в досліджуваному ряді зводиться до перевірки гіпотези про рівність середніх двох нормально розподілених сукупностей.

Обчислення за цим методом складається з наступних етапів:

1) вхідний часовий ряд $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ розбивають на дві приблизно рівні частини обсягом $n_1 \approx n_2$, де $(n_1 + n_2 = n)$;

2) для кожної з частин обчислюють середні значення та дисперсії:

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1}; \quad \sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \bar{y}_1)^2}{n_1 - 1};$$
$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_2} y_t}{n_2}; \quad \sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_2} (y_t - \bar{y}_2)^2}{n_2 - 1};$$

3) висувають основну гіпотезу про рівність середніх значень:

$H_0: \bar{y}_1 = \bar{y}_2$ проти альтернативної $H_A: \bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$ і допоміжну гіпотезу про рівність дисперсій $H_0^{\text{дон}}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ проти альтернативної $H_{1A}^{\text{дон}}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$;

4) перевіряють допоміжну гіпотезу за допомогою F-критерію Фішера. Для цього порівнюють розрахункове (експериментальне) значення критерію:

$$F_{\text{експ}} = \begin{cases} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, & \text{якщо } \sigma_1^2 > \sigma_2^2, \\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}, & \text{якщо } \sigma_1^2 < \sigma_2^2, \end{cases}$$

з табличним (критичним) значенням розподілу Фішера $F_{\text{табл}} = F(a, k_1, k_2)$, де a – заданий рівень значущості, $k_i = n_i - 1$ – степені вільності, $i = 1, 2$.

Якщо за критерієм Фішера дисперсії виявляться нерівними ($F_{\text{експ}} > F_{\text{табл}}$), то основну гіпотезу не перевіряють. Інакше переходять до наступного пункту;

5) основну гіпотезу про відсутність тренда перевіряють за допомогою t-критерію Стьюдента. Для цього обчислюють вибірку статистику –

розрахункове значення критерію Стьюдента за формулою

$$t_{\text{експ}} = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

де σ – середньоквадратичне відхилення різниці середніх;

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Якщо розрахункове значення $t_{\text{експ}}$ менше від табличного значення розподілу Стьюдента ($t_{\text{експ}} < t_{\text{табл}}$), де $t_{\text{табл}} = t(a, (n-2))$, то основна гіпотеза H_0 приймається, тобто середні значення рівні, отже, ряд не має тренда.

Якщо H_0 відхиляється, то ряд має тенденцію до змінювання (тренд ϵ).

Лабораторна робота № 8 «Перевірка наявності тенденції середнього рівня»

Згідно варіанту (додаток 17) записати постановку задачі.

Дослідити часовий ряд на наявність тренду (тенденції).

Всі варіанти мають часовий ряд (t). Для постановки задачі використати величину часового ряду згідно варіанту та верхню строчку (додаток 17).

Приклад 1. Перевірка наявності тенденції

Дослідити часовий ряд на наявність тренду (тенденції). Умовні дані про витрати на впровадження інновацій в попередньому періоді, тис грн. (Y).

Вхідні дані та обчислення оформимо у таблиці (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

t (рік)	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Витрати на впровадження інновацій в попередньому періоді, тис грн.	Y	3,52	9,7	8,9	9,8	10,1	13,9	19,9	14,3	11,5	19,5	14,2
	$y_t - \bar{y}_{\text{середнє}}$	-9,52	-3,34	-4,14	-3,24	-2,94	0,86	6,86	1,26	-1,54	6,46	1,16
	$(y_t - \bar{y}_{\text{середнє}})^2$	90,63	11,16	17,14	10,50	8,64	0,74	47,06	1,59	2,37	90,63	11,16

Продовження таблиці 8.1

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
14	20,2	22,7	28,2	25,2	25	24,3	21,5	27,1	36,3	34,1	34,1	35,2	44,5
0,96	7,16	-7,15	-1,65	-4,65	-4,85	-5,55	-8,35	-2,75	6,45	4,25	4,25	5,35	14,65

$$\bar{y}_1 = 13,04$$

$$\bar{y}_2 = 29,85$$

41,73	1,35	0,92	51,27	51,12	2,72	21,62	23,52	30,80	69,72	7,56	41,60	18,06	18,06
-------	------	------	-------	-------	------	-------	-------	-------	-------	------	-------	-------	-------

$$\sum_1^{13} (y_t - \bar{y}_1)^2 = 285,09$$

$$\sum_{14}^{25} (y_t - \bar{y}_2)^2 = 528,05$$

Обчислення:

Крок 1. Вхідний часовий ряд $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ розбиваємо на дві приблизно рівні частини обсягом $n_1 \approx n_2$: $n_1 = 13$, $n_2 = 12$, ($n_1 + n_2 = n$);

Крок 2. Для кожної з частин обчислюють середні значення та дисперсії:

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1} = 13,04;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_2} y_t}{n_2} = 29,85;$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \bar{y}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{285,09}{13 - 1} = 23,76;$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_2} (y_t - \bar{y}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{528,05}{12 - 1} = 48,0.$$

Крок 3. Висуваємо основну гіпотезу про рівність середніх значень:

$$H_0: \bar{y}_1 = \bar{y}_2$$

проти альтернативної

$$H_A: \bar{y}_1 \neq \bar{y}_2.$$

Нульову гіпотезу відхиляємо: $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$.

Та допоміжну гіпотезу про рівність дисперсій

$$H_0^{\text{доп}}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

проти альтернативної

$$H_A^{\text{доп}}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Допоміжну нульову гіпотезу про рівність дисперсій відхиляємо: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Крок 4. Перевіряємо допоміжну гіпотезу за допомогою F-критерію Фішера. Для цього порівнюємо розрахункове (експериментальне) значення критерію з табличним (критичним) значенням розподілу Фішера:

$$\sigma_1^2 < \sigma_2^2, \quad \text{тому } F_{\text{експ}} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 2,02$$

$$F_{табл} = F(a, k_1, k_2) = 2,79,$$

при $a=0,05$ – заданий рівень значущості, $k_1 = n_1 - 1 = 13 - 1 = 12$, $k_2 = n_2 - 1 = 12 - 1 = 11$.

За критерієм Фішера $F_{експ} < F_{табл}$. Переходимо до наступного пункту.

Крок 5. Основну гіпотезу про відсутність тренда перевіряють за допомогою t-критерію Стьюдента. Обчислимо вибірку статистику – розрахункове значення критерію Стьюдента за формулою

$$t_{експ} = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{|-16,81|}{5,95 \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{12}}} = 7,06$$

де σ – середньоквадратичне відхилення різниці середніх;

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{(13 - 1)23,76 + (12 - 1)48,0}{13 + 12 - 2}} = 5,95$$

$$t_{табл} = 2,18,$$

де $t_{табл} = t(a, (n-2))$.

Розрахункове значення $t_{експ} > t_{табл}$. Основна гіпотеза H_0 відхиляється. Отже, ряд має тренд.

Висновок. Нульова гіпотеза (H_0) відхиляється, ряд має тенденцію до змінювання (тренд є).

Метод ковзної середньої

Метод ковзної середньої є найбільш простим способом згладжування емпіричних кривих. Суть цього методу складається в заміні фактичних значень показника їхніми усередненими величинами, що мають значно меншу варіацію, чим вихідні рівні ряду.

Залежно від періоду усереднення розрізняють ковзні середні, розраховані для непарного й парного числа інтервалів часу. Розглянемо порядок побудови ковзної середньої з непарним числом членів.

Є динамічний ряд, що складається з рівнів $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Для визначення ковзної середньої послідовно розраховують суми m елементів ряду (де m – непарне число), поступово переходячи від перших членів $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ до наступних груп рівнів: y_2, y_3, \dots, y_{m+1} ; y_3, y_4, \dots, y_{m+2} ; y_4, y_5, \dots, y_{m+3} ; і т.д.

По окремих сумах визначають середні арифметичні, кожна з яких міняє свою величину («ковзає») у міру збільшення параметра t . Із середніх арифметичних формується новий динамічний ряд, елементи якого в значній мірі вільні від випадкових зовнішніх впливів на прогнозований показник. Вважається, що ковзні середні більш точно характеризують тенденцію зміни

ознаки, чим рівні вихідного тимчасового ряду. Найбільше часто на практиці застосовуються трьох- і п'ятичленні середні.

Їхній розрахунок ведеться по формулах

$$y_t' = (y_{t-1} + y_t + y_{t+1})/3, \quad t=2,3,\dots,(n-1);$$
$$14y_t' = (y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2})/5, \quad t=3,4,\dots,(n-2),$$

де y_t' – ковзна середня.

Більш складна обчислювальна схема використовується в тих випадках, коли ковзна середня визначається по парному числу елементів. При парному періоді згладжування проста середня арифметична має один істотний недолік – вона не може бути приписана жодному реальному значенню t , оскільки доводиться на проміжок часу між двома роками. Наприклад, при $t = 4$ середня арифметична буде ставитися до проміжку між другим і третім роком; при $m=6$ – до проміжку між третім і четвертим роком і т.д.

При виконанні реальних розрахунків ковзну середню з парним періодом вирівнювання визначають у два етапи. Спочатку знаходять середні для проміжків часу ($t-1$ й t , t й $t+1$), а потім отримані величини підсумують і знову використовують для розрахунку середньої.

З ковзних середніх з парним числом елементів найчастіше використовується згладжування по чотирьох рівнях динамічного ряду. Обчислення чотиричленної ковзної середньої здійснюється по формулі

$$y_t' = \frac{1}{2} [(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1})/4 + (y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2})/4],$$
$$t=3,4,\dots,(n-2),$$

Застосування ковзних середніх дозволяє «вирівняти» контури вхідної кривої, що створює умови для більш точного відтворення динаміки зміни показника.

Лабораторна робота № 9

«Згладжування емпіричних кривих (метод ковзної середньої)»

Провести вирівнювання за методом трьох- чотирьох- та п'ятичленної ковзної середньої.

Нанести вихідні дані на графік.

Всі варіанти мають часовий ряд (t). Для постановки задачі використати величину часового ряду згідно варіанту та верхню строчку (додаток 17).

Приклад 2. Згладжування емпіричних кривих.

Провести вирівнювання за методом трьох- чотирьох- та п'ятичленної ковзної середньої.

Нижче представлена інформація про розміри балансового прибутку (у млн. грн.), отриманою групою заводів первинного виноробства за період з 1996 по 2008 р. Нанести вихідні дані на графік.

Всі обчислення оформимо у вигляді таблиці (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

Рік (t)	Розмір балансового прибутку y_t , млн. грн.	Тричленні суми	Тричленні ковзні середні y'_t	Чотиричленні суми	Проміжні середні	Чотирьох-членні ковзні середні	П'ятичленні суми	П'ятичленні ковзні середні y'_t
1996	235							
1997	340	823	274,3					
1998	248	988	329,3	1223	305,75			314,4
1999	400	997	332,3	1337	334,25	320,0	1740	348
2000	349	1152	384,0	1400	350,00	342,1	1781	356,2
2001	403	1133	377,7	1533	383,25	366,6	1995	399
2002	381	1246	415,3	1595	398,75	391,0	2012	402,4
2003	462	1260	420,0	1663	415,75	407,3	2088	417,6
2004	417	1304	434,7	1685	421,25	418,5	2118	423,6
2005	425	1275	425,0	1737	434,25	427,8	2178	435,6
2006	433	1299	433,0	1716	429,00	431,6	2139	427,8
2007	441	1297	432,3	1722	430,50	429,8		
2008	423							

Нанесемо вихідні дані на графік (рис. 9.1). Як видно з малюнка, розмір балансового прибутку коливається в значному діапазоні. Зробимо статистичне вирівнювання вихідного ряду.

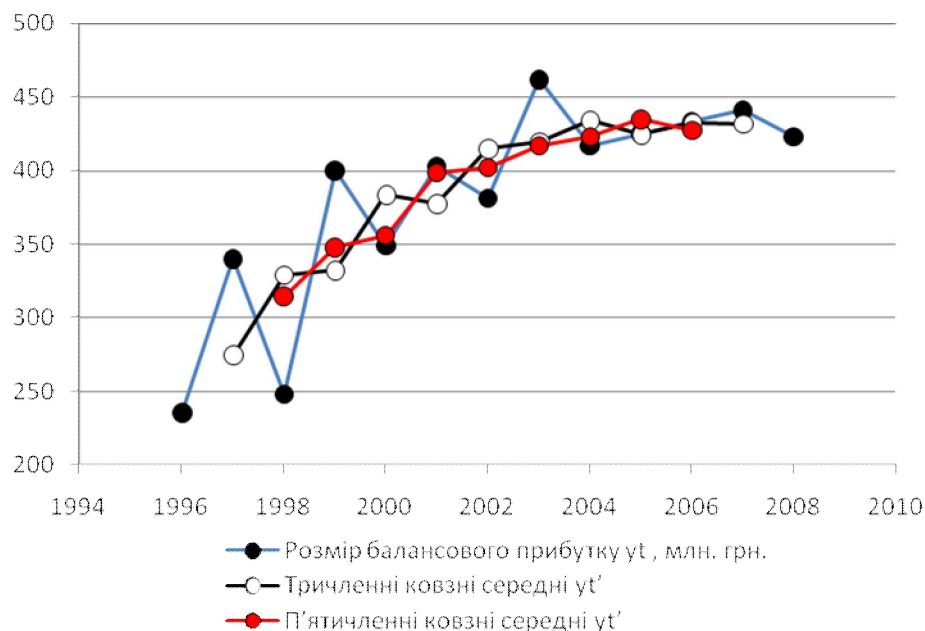


Рис. 9.1. Вхідна крива й ковзні середні

Аналіз підсумків обчислень дозволяє сформулювати наступні висновки:

- чим більший період усереднення, тим більш плавний характер здобуває лінія ковзної середньої;
- у міру збільшення інтервалу згладжування кількість елементів у ряді ковзних середніх скорочується (на два рівні при тричленному згладжуванні, на чотири рівні при чотирьох- і п'ятичленному вирівнюванні);
- значення ковзних середніх, розраховані по різних методиках, як правило, не збігаються.

Контрольні запитання

1. Що розуміється під часовим рядом?
2. Дайте визначення «тренд». Які основні види трендів?
3. Як визначають параметри ковзних середніх?
4. Етапи перевірки наявності тренда.
5. Назвіть основні аналітичні функції, які застосовують для опису динамічних рядів.
6. Суть методу ковзної середньої.
7. Застосування ковзних середніх.
8. Як впливає період усереднення на лінію ковзної середньої?
9. Охарактеризуйте процедуру прогнозування тренду.
10. Опишіть процедуру кореляційного аналізу часових рядів.
11. В чому суть методу згладжування?
12. Призначення методів згладжування та фільтрації, їх основні характеристики.

Література: [5, с. 538-598; 10, с. 138-154; 11, с. 399-440].

Тема № 10. МОДЕЛІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ

Лабораторна робота № 10 «Множинна лінійна кореляційна модель»

Множинна регресія являє собою узагальнення простої регресійної моделі для випадку, коли змінна Y залежить не від одного, а від кількох факторів (від n факторів).

Специфікація моделі множинної регресії:

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_n X_n \quad (10.1)$$

У якості незалежних змінних можуть застосовуватись різні техніко-економічні показники роботи підприємства. У рівнянні (10.1) Y – залежна змінна, якою може бути будь-який з результуючих показників діяльності підприємства. До вигляду (10.1) без особливих зусиль можна звести більшість рівнянь, що практично застосовуються в якості виробничих функцій.

У загальному матричному вигляді економетрична модель для фактичних даних записується так:

$$Y=AX+u, \quad (10.2)$$

де A – матриця параметрів моделі розміром $m \times n$ (m – кількість незалежних змінних, n – число спостережень);
 Y – матриця значень залежної змінної;
 X – матриця незалежних змінних;
 u – матриця випадкової складової.

Випадкові складові u називають ще помилками або залишками. Вони є

наслідками помилок спостережень, містять у собі вплив усіх випадкових факторів, а також факторів, які не входять у модель.

Теоретичні (розрахункові) значення залежних змінних Y для моделі (10.2) будуть представлені у вигляді:

$$Y = AX \quad (10.3)$$

де A – оцінка параметрів теоретичної моделі.

Сукупність виразів (10.2) і (10.3) для фактичних і теоретичних значень залежних змінних визначає економетричну модель загального виду:

$$(X'X)A = X'Y \quad (10.4)$$

Це система нормальних рівнянь.

Розв'язок системи нормальних рівнянь в матричному записі буде мати вигляд:

$$A = (X'X)^{-1} X'Y \quad (10.5)$$

де A – вектор параметрів лінійної моделі,
 X' – матриця транспонована до матриці X .

Задача.

Згідно з вибіркою статистичних даних за 15 років (додаток 18), які характеризують обсяг виробленої продукції (Y), тис. т в залежності від вартості основних засобів (X_1), тис. грн. та чисельності працюючих (X_2), чол. побудувати лінійну регресійну модель виду $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$.

Потрібно: знайти параметри моделі; оцінити тісноту та значимість зв'язку між змінними моделі; проаналізувати достовірність моделі та її параметрів. Побудувати модель в декартових координатах. Застосувати модель для прогнозування розвитку економічних процесів. Виконати економічний аналіз отриманих результатів.

Розрахунки виконуються на комп'ютері.

Приклад дослідження багатофакторної моделі

У моделях множинної регресії розглядають множину даних по кожному зі змінних як вектор-стовпчик, а вільному членові відповідає вектор, що складається лише з одиниць.

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_1 = \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \\ \dots \\ X_{n2} \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \\ \dots \\ X_{n3} \end{pmatrix} \cdot \cdot \cdot ; \quad X_k = \begin{pmatrix} X_{1k} \\ X_{2k} \\ X_{3k} \\ \dots \\ X_{nk} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad \text{– вектор-стовпець залежної змінної.}$$

β^* – вектор параметрів.

Векторну оцінку параметрів теоретичної моделі (β^*) знаходять за методом найменших квадратів. Для цього треба виконати обчислення за формулою (10.6), яка в нашому випадку буде мати вигляд:

$$\beta^* = (X'X)^{-1} \cdot X'Y \quad (10.6)$$

Порядок виконання завдання

1. Знайти векторну оцінку β^* за методом найменших квадратів, для цього треба виконати обчислення за формулою (10.6)

$$\beta^* = (X'X)^{-1} \cdot X'Y$$

2. Проаналізувати достовірність моделі та її параметрів. Для аналізу необхідно розрахувати:

- коефіцієнт детермінації;
- скоригований коефіцієнт детермінації;
- множинний коефіцієнт кореляції R;
- парні коефіцієнти кореляції;
- частинні коефіцієнти кореляції;
- стандартні похибки оцінок параметрів моделі (порівняти з величиною оцінок);
- перевірити значимості коефіцієнта детермінації, коефіцієнта кореляції та оцінок параметрів моделі множинної регресії;
- знайти інтервали надійності для оцінок параметрів моделі.

3. Знайти прогнозні значення матриці залежних змінних $Y_{пр}$, які відповідають очікуваним значенням матриці незалежних змінних $X_{пр}$.

4. Графічне зображення моделі.

5. Зробити економічний висновок.

Вихідні дані для розрахунку в табл. 10.1.

Таблиця 10.1

Спостереження	Обсяг виробленої продукції, тис. т	Вартість основних засобів, тис. грн.	Чисельність працюючих, чол.
	Y	X_1	X_2
1	33	4,2	13
2	36	5,3	18
3	37	6,5	24
4	38,2	5,8	22
5	38,5	6,9	22
6	40,2	5,9	24
7	41,1	7,2	25
8	48,5	14,2	28
Середні значення	39,06	7,00	22

Ми занесли дані у відповідні стовпчики таблиці. Останні клітинки стовпчиків містять середні значення Y , X_1 та X_2 .

Рішення

1. Знайти векторну оцінку β^* за методом найменших квадратів.

Складемо матрицю X . Перший її стовпчик містить лише одиниці (він відповідає незалежній змінній X_0 – вільному членові); інші стовпчики є відповідно векторами X_1 , X_2 .

Матриця X

$$X = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 4,2 & 13 \\ & 1 & 5,3 & 18 \\ & 1 & 6,5 & 24 \\ & 1 & 5,8 & 22 \\ & 1 & 6,9 & 22 \\ & 1 & 5,9 & 24 \\ & 1 & 7,2 & 25 \\ & 1 & 14,2 & 28 \end{array}$$

Матриця Y

$$Y = \begin{vmatrix} 33 \\ 36 \\ 37 \\ 38,2 \\ 38,5 \\ 40,2 \\ 41,1 \\ 48,5 \end{vmatrix}$$

Далі виконуємо операції над матрицями відповідно формули (10.6).

=ТРАНСП(C29:E36)

$$X' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4,2 & 5,3 & 6,5 & 5,8 & 6,9 & 5,9 & 7,2 & 14,2 & \\ 13 & 18 & 24 & 22 & 22 & 24 & 25 & 28 & \end{vmatrix}$$

Транспонування матриці просто реалізувати за допомогою "майстра функцій f" (операція ТРАНСП(.)) у категорії "Ссылки и массивы". Звернення до математичних та статистичних функцій Excel.

=МУМНОЖ(B41:I43;C29:E36)

$$X' \cdot X = \begin{vmatrix} 8,0 & 56,00 & 176 \\ 56,00 & 457,52 & 1304,60 \\ 176 & 1304,60 & 4022,00 \end{vmatrix}$$

Функція Microsoft Excel МУМНОЖ(. , .) – знаходить добуток матриць.

Для цього треба:

1) відмітити поле, де буде знаходитись результат добутку матриць;
2) увійти у "майстер функцій f". У категоріях вибираємо "математичні", а в функціях – МУМНОЖ. Вводимо адреси матриць, добуток яких знаходимо;

3) для того, щоб отримати на екрані значення добутку матриць, натискаємо спершу клавішу **F2**, а потім **Ctrl+Shift+Enter**.

=МОБР(D46:F48)

Матриця похибок

$$(X' \cdot X)^{-1} = \begin{vmatrix} 3,78969 & 0,1200727 & -0,20478 \\ 0,12007 & 0,0329147 & -0,01593 \\ -0,20478 & -0,0159307 & 0,01438 \end{vmatrix}$$

Функція Microsoft Excel МОБР(.) – знаходить матрицю, обернену до квадратної матриці. Процедура знаходження оберненої матриці аналогічна процедурі МУМНОЖ.

=МУМНОЖ(B41:I43;H29:H36)

$$X' \cdot Y = \begin{vmatrix} 312,5 \\ 2278,91 \\ 7002,7 \end{vmatrix}$$

=МУМНОЖ(D51:F53;D56: D58)

$$\beta^* = \begin{vmatrix} 23,89 \\ 0,97 \\ 0,38 \end{vmatrix}$$

Отже, наша регресійна модель має вигляд:

$$Y_{\text{розн}} = 23,89 + 0,97X_1 + 0,38X_2$$

Далі знаходяться відповідні значення $Y_{\text{розн}}$ за формулою $Y = X \cdot \beta^*$ і заносяться до стовпчику "1".

=МУМНОЖ(C29:E36;D61:D63)

$Y_{\text{розн}}$	$Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розн}}$	$Y_{\text{факт}} - Y_{\text{сер}}$	$Y_{\text{розн}} - Y_{\text{сер}}$
1	2	3	4
32,92	0,08	-6,06	-6,146
35,89	0,11	-3,06	-3,175
39,33	-2,33	-2,06	0,272
37,89	0,31	-0,86	-1,169
38,97	-0,47	-0,56	-0,097
38,75	1,45	1,14	-0,312
40,40	0,70	2,04	1,334
48,36	0,14	9,44	9,294
	8,399	145,96	138

=СУММКВ(.)

Стовпчик "2" містить залишки регресії, обчислені за формулою $Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розн}}$.

Стовпчик "3" складається з елементів, що знаходяться як $Y_{\text{факт}} - Y_{\text{сер}}$.

Елементи стовпчика "4" знаходяться як $Y_{\text{розн}} - Y_{\text{сер}}$.

Реалізуємо обчислення суми квадратів елементів кожного з цих стовпчиків за допомогою процедури "майстра функцій f" СУММКВ(.), знаходимо значення суми квадратів відхилень.

2. Проаналізуємо достовірність моделі та її параметрів:

Коефіцієнт детермінації моделі обчислюється за формулою:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{\text{розн}} - Y_{\text{сер}})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{сер}})^2} = \frac{138}{145,6} = 0,94246$$

В економічних розрахунках вважається прийнятним такий зв'язок між факторами, при якому $r^2 > 0,7$.

Скоригований коефіцієнт детермінації:

$$R_{\text{скор}}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-m-1} = 1 - (1 - 0,94246) \cdot \frac{8-1}{8-2-1} = 0,93287$$

Скоригований коефіцієнт детермінації не перевищує одиниці

$$R_{\text{скор}}^2 \leq 1$$

Справедлива нерівність:

$$R_{\text{скор}}^2 \leq R^2$$

$$0,93287 < 0,94246$$

Множинний коефіцієнт кореляції R розраховується за формулою:

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,94246} = 0,971 .$$

що свідчить про вельми високий зв'язок між показниками Y та X_1, X_2 .

Парні коефіцієнти кореляції розраховують за формулою матриці коефіцієнтів парної регресії між змінними:

$$r_{xx} = X^* X^*$$

Елементи нормалізованих векторів розраховують за формулами:

$$y^* = \frac{y - \bar{y}}{\sqrt{n\sigma_y^2}},$$

$$x_k^* = \frac{x_k - \bar{x}_k}{\sqrt{n\sigma_{x_k}^2}},$$

$$x_j^* = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\sqrt{n\sigma_{x_j}^2}},$$

Дисперсії змінних мають такі значення:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{145,96}{8} = 18,24,$$

$$\sigma_{x_k}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_k)^2}{n} = \frac{65,52}{8} = 8,19;$$

$$\sigma_{x_j}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n} = \frac{150}{8} = 18,75.$$

Тоді знаменники для нормалізації кожної змінної будуть такими:

$$y^* : \quad \sqrt{n\sigma_y^2} = \sqrt{8 \cdot 18,24} = 12,08;$$

$$x_k^* : \quad \sqrt{n\sigma_{x_k}^2} = \sqrt{8 \cdot 8,19} = 8,09;$$

$$x_j^* : \quad \sqrt{n\sigma_{x_j}^2} = \sqrt{8 \cdot 18,75} = 12,25.$$

$y - \bar{y}$	$x_k - \bar{x}_k$	$x_j - \bar{x}_j$	$(y - \bar{y})^2$	$(x_k - \bar{x}_k)^2$	$(x_j - \bar{x}_j)^2$	y^*	x_k^*	x_j^*
-6,06	-2,80	-9,00	36,75	7,84	81	-0,5801	-0,3687	-1,0835
-3,06	-1,70	-4,00	9,38	2,89	16	-0,2931	-0,2238	-0,4815
-2,06	-0,50	2,00	4,25	0,25	4	-0,1974	-0,0658	0,2408
-0,86	-1,20	0,00	0,74	1,44	0	-0,0825	-0,1580	0,0000
-0,56	-0,10	0,00	0,32	0,01	0,0	-0,0538	-0,0132	0,0000
1,14	-1,10	2,00	1,29	1,21	4,0	0,1089	-0,1448	0,2408
2,04	0,20	3,00	4,15	0,04	9	0,1950	0,0263	0,3612
9,44	7,20	6,00	89,07	51,84	36	0,9031	0,9480	0,7223
Усього			145,96	65,52	150			

Матриця нормалізованих змінних:

$$X^* = \begin{vmatrix} -0,5018 & -0,3459 & -0,7348 \\ -0,2535 & -0,2100 & -0,3266 \\ -0,1707 & -0,0618 & 0,1633 \\ -0,0714 & -0,1482 & 0,0000 \\ -0,0466 & -0,0124 & 0,0000 \\ 0,0942 & -0,1359 & 0,1633 \\ 0,1686 & 0,0247 & 0,2449 \\ 0,7812 & 0,8895 & 0,4899 \end{vmatrix}$$

Матриця, транспонована до X^* :

$$X^{*'} = \begin{vmatrix} -0,5018 & -0,2535 & -0,1707 & -0,0714 & -0,0466 & 0,0942 & 0,1686 & 0,7812 \\ -0,3459 & -0,2100 & -0,0618 & -0,1482 & -0,0124 & -0,1359 & 0,0247 & 0,8895 \\ -0,7348 & -0,3266 & 0,1633 & 0,0000 & 0,0000 & 0,1633 & 0,2449 & 0,4899 \end{vmatrix}$$

Запишемо шукану кореляційну матрицю:

$$r_{xx} = \begin{vmatrix} 1 & 0,9347 & 0,8630 \\ 0,9347 & 1 & 0,7323 \\ 0,8630 & 0,7323 & 1 \end{vmatrix}$$

Кожний елемент цієї матриці характеризує тісноту зв'язку однієї змінної з іншою.

Оскільки діагональні елементи характеризують тісноту зв'язку кожної змінної з цією самою змінною, то вони дорівнюють одиниці. Решта елементів матриці r_{xx} такі:

$$r_{yx_k} = 0,9347 ;$$

$$r_{yx_j} = 0,8630 ;$$

$$r_{x_k x_j} = 0,7323 .$$

Вони є парними коефіцієнтами кореляції між змінними.

Користуючись цими коефіцієнтами, можна зробити висновок, що між змінними y та x_j – високий зв'язок; між змінними y та x_k існує досить високий кореляційний зв'язок

Частинні коефіцієнти кореляції, як і парні, характеризують тісноту зв'язку між двома змінними, але за умови, що решта змінних сталі.

Розрахунок частинних коефіцієнтів кореляції базується на оберненій матриці до матриці r_{xx} (матриця C):

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} \cdot c_{jj}}},$$

де c_{kj} – елемент матриці C , що міститься в k -му рядку і j -му стовпці; c_{kk} і c_{jj} – діагональні елементи матриці C .

Розрахуємо матрицю, обернену до матриці r_{xx} :

$$C = \begin{vmatrix} 17,379 & -11,35 & -6,69 \\ -11,345 & 9,56 & 2,79 \\ -6,69 & 2,79 & 4,73 \end{vmatrix}$$

Матриця C – симетрична, і її діагональні елементи завжди мають бути додатними.

Визначимо частинні коефіцієнти кореляції:

$$r_{yx_k} = 0,8801$$

$$r_{yx_j} = 0,7377$$

$$r_{x_k x_j} = -0,4145$$

Частинні коефіцієнти кореляції характеризують рівень тісноти зв'язку між двома змінними за умови, що решта змінних на цей зв'язок не впливає. Частинні коефіцієнти кореляції за модулем нижчі, ніж коефіцієнти парної кореляції, бо на їхній рівень не впливає решта змінних, які мають зв'язок із цими двома.

Коефіцієнт парної кореляції $r_{yx_k} = 0,88$, тому можна зробити висновок, що рівень тісноти зв'язку між двома змінними (у та x_k) високий за умови, що решта змінних на цей зв'язок не впливає.

Коефіцієнт парної кореляції $r_{yx_j} = 0,7377$ – можна зробити висновок, що рівень тісноти зв'язку між двома змінними (у та x_j) високий за умови, що решта змінних на цей зв'язок не впливає.

Перевіримо значимість зв'язку між змінними моделі:

$$F_{\text{розр}} = \frac{\sum (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{сер}})^2}{\sum (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розр}})^2} = 17,38$$

З урахуванням ступенів вільності:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{\text{розр}} - Y_{\text{сер}})^2}{m_1 - 1} \Bigg/ \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розр}})^2}{n - m_1} = \frac{138}{3-1} \Bigg/ \frac{8,399}{8-3} = 40,947$$

$$F^{0,05}_{\text{табл}} = 3,97$$

$$F^{0,05}_{\text{табл}} < F_{\text{розр}}$$

Модель приймаємо – припускаємо присутність лінійного зв'язку для рівня надійності $p = (1 - \alpha) = 0,95$.

Стандартні похибки оцінок параметрів з урахуванням дисперсії залишків:

$$S_{\beta_j} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}$$

$$y_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{n - m_1} = \frac{8,399}{8 - 3} = 1,6797$$

З матриці похибок:

$$C_{00} = 3,78969$$

$$C_{11} = 0,03291$$

$$C_{22} = 0,01438$$

$$S_{B_0} = \sqrt{y_u^2 c_{00}} = \sqrt{1,6797 \cdot 3,78969} = 2,523;$$

$$S_{B_1} = \sqrt{y_u^2 c_{11}} = \sqrt{1,6797 \cdot 0,03291} = 0,235;$$

$$S_{B_2} = \sqrt{y_u^2 c_{22}} = \sqrt{1,6797 \cdot 0,01438} = 0,155.$$

Стандартні помилки параметрів не перевищують абсолютні значення цих параметрів, то це означає, що оцінки параметрів є незміщеними відносно їх істинних значень.

Перевірка значимості коефіцієнта детермінації, коефіцієнта кореляції та оцінок параметрів моделі множинної регресії.

Перевірка значимості коефіцієнта детермінації

Висувається нульова гіпотеза $H_0: R^2=0$,
 або $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$.
 Альтернативна до неї є $H_A: (\beta_j \neq 0)$

За отриманими в моделі значеннями коефіцієнта детермінації R^2 обчислюємо експериментальне значення F-статистики:

$$F_{\text{експ}} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,94246}{1-0,94246} \cdot \frac{8-2-1}{2} = 40,95$$

Визначимо табличне значення F-критерію Фішера:

$$F_{\text{табл}} = 3,9715 \\ = \text{FRASPOBR}(0,05;5;7)$$

Порівняємо з табличним значенням розподілу Фішера при рівні значущості $\alpha = 0,05$:

$$F_{\text{експ}} > F_{\text{табл}}$$

Нульова гіпотеза відхиляється.

Відхилення нуль-гіпотези свідчить про значимість коефіцієнта детермінації.

Перевірка значимості коефіцієнта кореляції

Коефіцієнт кореляції, як вибіркова характеристика, перевіряється на значущість за допомогою t-критерію Ст'юдента.

$$t_{\text{експ}} = \frac{R\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{0,971\sqrt{8-2-1}}{\sqrt{1-0,94246}} = 9,049$$

Задамо рівень значущості $\alpha=0,05$ та визначимо табличне значення t-критерію Ст'юдента:

$$t_{\text{табл}} = 2,570581835 \\ = \text{СТЬЮДРАСПОБР}(0,05;5)$$

Величина експериментального значення t-статистики перевищує табличне:

$$|t_{\text{експ}}| > t_{\text{табл}}$$

$$9,049 > 2,57$$

Тобто можна зробити висновок, що **коефіцієнт кореляції достовірний** (значущий), а зв'язок між залежною змінною та всіма незалежними факторами суттєвий.

*Перевірка значимості оцінок параметрів моделі
множинної регресії*

Для оцінки значимості кожного параметра моделі перевіряємо їх за допомогою t-критерію Ст'юдента:

$$t_j = \frac{|B_j|}{\sqrt{y_u^2 \cdot c_{jj}}} = \frac{|B_j|}{S_{B_j}}$$

де c_{jj} – діагональний елемент матриці $(X' X)^{-1}$;

S_{B_j} – стандартна похибка оцінки параметра моделі.

Статистичну значущість кожного параметра моделі можна перевірити за допомогою t-критерію. При цьому нульова гіпотеза має вигляд:

$$H_0 : \beta_j = 0,$$

альтернативна

$$H_A : \beta_j \neq 0.$$

Будемо наслідувати відповідний алгоритм. Задамо рівень значущості $\alpha=0,05$, визначимо табличне значення t-критерію Ст'юдента ($t_{\text{табл}}=2,5058$) і розрахуємо значення t-критерію для кожного параметра.

Перевірка гіпотези $H_0: \beta_0 = 0$

$$t_{\text{спос}} = 9,4678$$

Перевірка гіпотези $H_0: \beta_1 = 0$

$$t_{\text{спос}} = 4,1439$$

Перевірка гіпотези $H_0: \beta_2 = 0$

$$t_{\text{спос}} = 2,4435$$

Якщо $|t_{\text{спос}}| < t_{\text{табл}}$, то приймаємо гіпотезу H_0 .

Якщо $|t_{\text{спос}}| > t_{\text{табл}}$, то відхиляємо гіпотезу H_0 .

Перевіряємо виконання нерівності $|t_{\text{спос}}| > t_{\text{табл}}$ робимо висновки про стійкість впливу відповідного параметру на залежну змінну Y :

для β_0 : $|9,4678| > 2,57058 \rightarrow H_0 (\beta_0=0)$ відхиляємо; змінна X_0 (вільний член) є значущою;

для β_1 : $|4,1439| > 2,57058 \rightarrow H_0 (\beta_1=0)$ відхиляємо; змінна X_1 (вартість основних засобів) є значущою;

для β_2 : $|2,4435| < 2,57058 \rightarrow H_0, (\beta_2=0)$ приймаємо; змінна X_2 , (чисельність працюючих) є незначущою.

Знайдемо **інтервали надійності** для кожного окремого параметра за формулою:

$$P\{v_j^* - t \cdot S_{v_j} < v_j < v_j^* + t \cdot S_{v_j}\} = 1 - \alpha$$

Оскільки оцінки параметрів моделі β_j^* , $t_{\text{спос}}$ і стандартні похибки параметрів моделі S_{β_j} обчислені нами у попередніх пунктах, достатньо просто скористатися формулою для знаходження інтервалів:

$$= 23,89 - 9,4678 * 2,523 < \beta_0 < 23,89 + 9,4678 * 2,523$$

$$= 0,97 - 4,1439 * 0,235 < \beta_1 < 0,97 + 4,1439 * 0,235$$

$$= 0,38 - 2,4435 * 0,155 < \beta_2 < 0,38 + 2,4435 * 0,155$$

$$P(0 < \beta_0 < 47,78) = 0,95$$

$$P(0 < \beta_1 < 1,95) = 0,95$$

$$P(0 < \beta_2 < 0,96) = 0,95$$

3. Обчислимо прогнозні значення $Y_{\text{пр}}$:

У рівняння $Y_{\text{розн}} = 23,89 + 0,97X_1 + 0,38X_2$ підставимо прогнозні значення фактору $X_{\text{пр}} = (1, 15, 35)$, що лежить за межами базового періоду (точковий прогноз):

$$Y_{\text{пр}} = 23,89 + 0,97 \cdot 15 + 0,38 \cdot 35 = 51,79$$

Тоді $M(Y_{\text{пр}})$ можна розглядати як оцінку прогнозного значення математичного сподівання та індивідуального значення обсягу виробленої продукції при відомих параметрах вартості основних засобів (X_1) та чисельності працюючих (X_2).

Визначимо дисперсію прогнозу σ_n^2 з урахуванням матриці похибок, яка для прикладу має вигляд:

$$(X' \cdot X)^{-1} = \begin{vmatrix} 3,78969 & 0,12007 & -0,20478 \\ 0,12007 & 0,03291 & -0,01593 \\ -0,20478 & -0,01593 & 0,01438 \end{vmatrix}$$

Елементи дисперсійно-ковартційної матриці, які розраховуються за формулами і мають значення:

$$y_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{n - m_1} = \frac{8,399}{8 - 3} = 1,6797.$$

$$\sigma_{\beta_j}^2 = \sigma_u^2 c_{jj}.$$

$$\sigma_{\beta_2}^2 = \sigma_u^2 c_{22} = 1,679748 \cdot 0,01438 = 0,0241$$

$$\sigma_{\beta_1}^2 = \sigma_u^2 c_{11} = 1,679748 \cdot 0,03291 = 0,0553$$

$$\sigma_{\beta_2}^2 = \sigma_u^2 c_{22} = 1,679748 \cdot 0,01438 = 0,0241$$

$$\sigma_{\beta_j \beta_k} = \sigma_u^2 c_{jk}$$

$$\sigma_{\beta_0 \beta_1} = \sigma_u^2 c_{01} = \sigma_u^2 c_{10} = 1,679748 \cdot 0,12007 = 0,201692,$$

$$\sigma_{\beta_0 \beta_2} = \sigma_u^2 c_{02} = \sigma_u^2 c_{20} = 1,679748 \cdot (-0,20478) = -0,343982$$

$$\sigma_{\beta_1 \beta_2} = \sigma_u^2 c_{12} = \sigma_u^2 c_{21} = 1,679748 \cdot (-0,01593) = -0,02676.$$

$$\text{var}(B) = \begin{vmatrix} 6,36573 & 0,20169 & -0,34398 \\ 0,20169 & 0,05529 & -0,02676 \\ -0,34398 & -0,02676 & 0,02415 \end{vmatrix}$$

$$X_{np} = \begin{vmatrix} 1 \\ 15 \\ 35 \end{vmatrix}$$

$$X'_{np} = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 35 \end{vmatrix}$$

$$X'_{np} * \text{var}(B) = \begin{vmatrix} -2,6483 & 0,0944 & 0,0999 \end{vmatrix}$$

Знайдемо дисперсію прогнозу:

$$\sigma_n^2 = X'_{np} \text{var}(B) X_{np} = 2,2638.$$

Середньоквадратична (стандартна) похибка прогнозу:

$$\sigma_n = \sqrt{X'_{np} \text{var}(B) X_{np}} = 1,5046.$$

Довірчий інтервал для прогнозних значень:

$$Y_{\text{пр}} - t_{\alpha} \sigma_u \sqrt{X'_{\text{пр}} (X'X)^{-1} X_{\text{пр}}} \leq M(Y_{\text{пр}}) \leq Y_{\text{пр}} + t_{\alpha} \sigma_u \sqrt{X'_{\text{пр}} (X'X)^{-1} X_{\text{пр}}}$$

$$47,9264 \leq M(Y_{\text{пр}}) \leq 55,6617$$

Інтервальний прогноз математичного сподівання $M(Y_{\text{пр}})$ буде в межах:

$$Y_{\text{пр}} - t_{\alpha} \sigma_n \leq M(Y_{\text{пр}}) \leq Y_{\text{пр}} + t_{\alpha} \sigma_n$$

$$51,79 - 2,57058 \cdot 1,5046 \leq M(Y_{\text{пр}}) \leq 51,79 + 2,57058 \cdot 1,5046$$

$$47,9264 \leq M(Y_{\text{пр}}) \leq 55,6617$$

Визначимо інтервальний прогноз індивідуального значення $Y_{\text{пр}}$.

Для цього обчислимо дисперсію та стандартну помилку прогнозу індивідуального значення $Y_{\text{пр}}$:

$$y_{n(i)}^2 = y_u^2 + y_n^2 = y_u \sqrt{1 + X'_{\text{пр}} (X'X)^{-1} X_{\text{пр}}} = 1,6797 + 2,2638 = 3,9435$$

$$\sqrt{\sigma_{n(i)}^2} = 1,9858$$

$$Y_{\text{пр}} - t_{\alpha} \sigma_{n(i)} \leq Y_{\text{пр}} \leq Y_{\text{пр}} + t_{\alpha} \sigma_{n(i)}$$

$$51,79 - 2,57058 \cdot 1,9858 \leq Y_{\text{пр}} \leq 51,79 + 2,57058 \cdot 1,9858$$

$$46,6893 \leq Y_{\text{пр}} \leq 56,8988$$

4. Графічне зображення моделі ґрунтується на побудові ліній регресії, в прямокутних координатах $Y - X_1$ та $Y - X_2$ (рис. 10.1).

При цьому масштаб треба обрати таким, щоб мінімальні та максимальні значення X_1 та X_2 співпадали між собою.

Лінія регресії $Y=f(X_1)$ при $X_2=\text{const}$ відображає вплив першого фактора X_1 на продуктивність праці при постійному значенні другого X_2 (середнє значення X_2).

Лінія регресії $Y=f(X_2)$ при $X_1=\text{const}$ відображає вплив другого фактора X_2 на продуктивність праці при постійному значенні X_1 (середнє значення X_1).

	X_1	X_2	$Y=f(X_1)$ при $X_2=\text{const}$	$Y=f(X_2)$ при $X_1=\text{const}$	Середні значення	
min	4,20	13,00	30,64	35,64	X_1	X_2
max	14,20	28,00	40,38	41,34	7,00	22

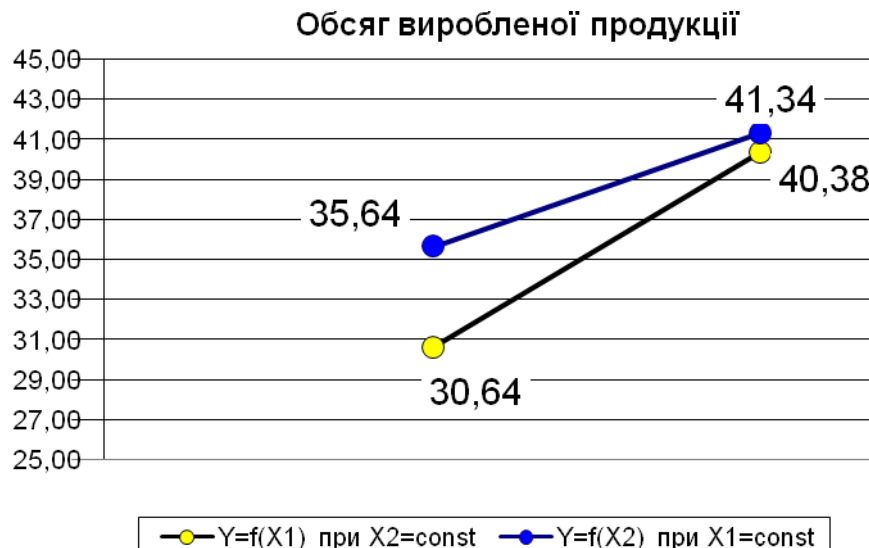


Рис. 10.1. Графічне зображення моделі

$$Y_{\text{розн}} = 23,89 + 0,97X_1 + 0,38X_2$$

5. Висновки.

Згідно з обчисленими характеристиками можна сказати, що обсяг виробленої продукції на 94,2% залежить від вартості основних засобів та чисельності працюючих, а на 5,8% від неврахованих в задачі чинників. Зв'язок між залежною змінною та незалежними (вартістю основних засобів та чисельністю працюючих) досить високий (множинний коефіцієнт кореляції дорівнює 0,971).

Перевірено значимість зв'язку між змінними моделі $F_{\text{розн}} > F^{0,05}_{\text{табл}}$ ($40,947 > 3,97$) для рівня надійності $\alpha=0,95$. З 5%-ним ризиком помилитися припускаємо присутність лінійного зв'язку.

Стандартні помилки параметрів S_{β_j} не перевищують абсолютні значення цих параметрів:

$$S_{\beta_0} = 2,523 < |23,89|$$

$$S_{\beta_1} = 0,235 < |0,97|$$

$$S_{\beta_2} = 0,155 < |0,38|$$

Це означає, що оцінки параметрів є незміщеними відносно їх істинних значень.

Середньоквадратичне відхилення (похибка)

$$S_{yx} = \pm \sqrt{\frac{\sum (Y_{\text{факт}} - Y_{\text{розра}})^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{8,399}{8-1}} = \pm 0,77$$

свідчить про те, що фактичні значення Y відхиляються від розрахункових його значень на $\pm 0,77$ тис. грн.

$$\text{Відносна похибка } \sigma = \frac{S_{yx}}{Y_{\text{сер}}} \cdot 100 = \frac{0,77}{39,06} \cdot 100 = 1,7\% \quad - \quad \text{це характеризує}$$

модель з хорошої сторони.

Проведена перевірка значущості коефіцієнта детермінації за F-критерієм Фішера. $F_{\text{табл}} < F_{\text{експ}} (2,5705 < 40,95)$. Коефіцієнт детермінації значущий.

Перевірена значимість коефіцієнта кореляції за t-критерієм Ст'юдента. $t_{\text{табл}} < |t_{\text{експ}}| (2,57 < 9,049)$. Коефіцієнт кореляції достовірний (значущий) і зв'язок між залежною змінною та всіма незалежними факторами суттєвий.

Дана оцінка значимості кожного параметра моделі за допомогою t-критерію Ст'юдента: параметри моделі є значущими.

Отже, модель є достовірною та відображає тісний кількісний взаємозв'язок між залежною та незалежними показниками і може бути використана для практичного економічного висновку.

На даному підприємстві збільшення виробництва продукції обумовлюється збільшенням вартості основних засобів та збільшенням чисельності працюючих на підприємстві. Так, на кожні 10 тис. грн. збільшення вартості основних засобів, можливе підвищення випуску продукції на 9,7 тис. грн., за умови незмінної дії інших чинників.

При збільшенні чисельності працюючих на підприємстві на 10 чол. можливе підвищення випуску продукції на 3,8 тис. грн., за умови незмінної дії інших чинників.

Були обчислені прогнози значення $Y_{\text{пр}}$ для $X_{\text{пр}} = (1, 15, 35)$:

$$Y_{\text{пр}} = 23,89 + 0,97 \cdot 15 + 0,38 \cdot 35 = 51,79 \text{ тис. грн.}$$

Так, при ймовірності $P=0,95$ ($\alpha=0,05$), прогноз математичного сподівання $M(Y_{\text{пр}})$ потрапляє в інтервал $[47,9274; 55,6617]$, а прогноз індивідуального значення $Y_{\text{пр}}$ – в інтервал $[46,6893; 56,8988]$.

В економічній інтерпретації це означає, що при прогнозних значеннях вартості основних засобів 15 тис. грн. та чисельності працюючих 35 чол. обсяг виробленої продукції потрапляє в інтервал:

$$47,9274 \leq M(Y_{\text{пр}}) \leq 55,6617$$

Водночас окремі (інтервальні) значення обсягу виробленої продукції містяться в інтервалі:

$$46,6893 \leq Y_{\text{пр}} \leq 56,8988$$

Контрольні запитання

1. Дати визначення лінійної багатофакторної регресійної моделі.
2. Суть та складові частини лінійної економетричної моделі з двома змінними?
3. Основні етапи побудови лінійних економетричних моделей?
4. Роль коефіцієнтів еластичності в кількісному аналізі лінійних економетричних моделей?
5. Характеристика системи оцінок і критеріїв для перевірки статистичної достовірності моделі?

Література [3 с.257-267; 5, с. 465-534; 8, с. 39-57, 89-100; 9, с. 96-99, 145-150; 10, с. 171-227, 249-272; 11, с. 46-68, 140-149, 46-68, 95-97, 245-265; 12, с. 93-105, 142-154]

Тема № 11. МОДЕЛІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ

Лабораторна робота № 11 «Виробнича функція Кобба-Дугласа»

Виробнича функція – це економетрична модель, яка кількісно описує зв'язок основних результативних показників виробничо-господарської діяльності з факторами, що визначають ці показники. Виробнича функція зв'язує кількість ресурсів ($X_1 - X_n$) з обсягом випуску продукції (Y).

Загальний вигляд виробничої функції такий:

$$Y = a \cdot F^\alpha \cdot L^\beta,$$

де Y – обсяг продукції; F – основний капітал; L – робоча сила; a – параметр, який визначає ефективність виробничого процесу; α , β – параметри, що характеризують ступінь однорідності виробничої функції.

В залежності від кількості змінних (X) виробничі функції поділяються на

- однофакторні $Y = f(X)$;
- двофакторні $Y = f(X_1, X_2)$.

Метод рішення

Регресійні залежності, нелінійні відносно параметрів не допускають безпосереднього застосування методу найменших квадратів. Щоб зробити це можливим, початкові дані спостережень піддають перетворенням з метою лінеаризації залежностей. У випадку, якщо задана функція має вигляд

$Y = A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2}$, можна перейти до лінійного шляхом логарифмування:

$$\ln Y = \ln A_0 + A_1 \cdot \ln X_1 + A_2 \cdot \ln X_2 .$$

Застосовуючи заміну $Y' = \ln Y$, $X_1' = \ln X_1$, $X_2' = \ln X_2$, $A'_0 = \ln A_0$, отримуємо лінійну залежність

$$Y' = A'_0 + A_1 \cdot X'_1 + A_2 \cdot X'_2$$

Для одержання коефіцієнтів регресії складемо і вирішимо систему нормальних рівнянь (на базі матриці логарифмів):

$$\begin{cases} \sum Y' = A'_0 \cdot N + A_1 \sum X'_1 + A_2 \sum X'_2 \\ \sum Y' X'_1 = A'_0 \sum X'_1 + A_1 \sum (X'_1)^2 + A_2 \sum X'_1 X'_2 \\ \sum Y' X'_2 = A'_0 \sum X'_2 + A_1 \sum X'_1 X'_2 + A_2 \sum (X'_2)^2 \end{cases}$$

У результаті розрахунку одержуємо коефіцієнти регресії A'_0 , A_1 , A_2 і будуємо рівняння зв'язку:

$$Y' = A'_0 + A_1 \cdot X'_1 + A_2 \cdot X'_2$$

Наприклад: $A'_0 = 1,11$, $A_1 = 0,124$, $A_2 = -0,365$,

Звідси: $Y' = 1,11 + 0,124 X'_1 - 0,365 X'_2$,

Виробнича функція буде мати вигляд:

$$Y = \exp(1,11) \cdot X_1^{0,124} \cdot X_2^{-0,365}$$

$$Y = 3,034 \cdot X_1^{0,124} \cdot X_2^{-0,365}$$

Задача.

Маємо вибірку даних, яка характеризує роботу підприємства за останні 10 місяців. У цій вибірці кожному значенню Y – вартість випущеної продукції, тис. грн. відповідають показники X_1 – вартість основних виробничих фондів, тис. грн. і X_2 – витрати праці, люд.-год. Потрібно побудувати множинну кореляційну економічну модель у вигляді функції Кобба-Дугласа; оцінити точність і достовірність моделі; визначити тісноту зв'язку між факторами; побудувати ізокванти взаємозамінності факторів моделі і зробити економічний аналіз отриманих результатів за всіма відомими характеристиками виробничих функцій.

Розрахунки виконуються на комп'ютері.

Завдання визначається за варіантом з додатку 19.

Приклад рішення задачі.

Потрібно побудувати виробничу функцію Кобба-Дугласа за статистичними спостереженнями:

Y – вартість випущеної продукції, тис. грн.; .

X_1 – вартість основних виробничих фондів, тис. грн.;

X_2 – витрати праці, люд-год.

Дані для розрахунків в табл. 11.1.

Виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд:

$$Y = A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2}$$

Проведемо логарифмування для отримання лінійної моделі:

$$\ln Y = \ln A_0 + A_1 \cdot \ln X_1 + A_2 \cdot \ln X_2.$$

Прийmemo такі позначення: $Y^* = \ln Y$; $A_0^* = \ln A_0$; $X_1^* = \ln X_1$; $X_2^* = \ln X_2$.

В результаті підстановки отримаємо: $Y^* = A_0^* + A_1 \cdot X_1^* + A_2 \cdot X_2^*$.

Таблиця 11.1

Вихідні дані для розрахунків

Y	X ₁	X ₂	lnY	lnX ₁	lnX ₂
10	28	4	1	1,447	0,602
16	29	8	1,176	1,462	0,903
17	30	10	1,230	1,477	1
21	31	12	1,322	1,491	1,079
24	32	16	1,380	1,505	1,204
25	34	18	1,398	1,531	1,255
27	36	19	1,431	1,556	1,279
29	37	17	1,462	1,568	1,230
33	39	19	1,519	1,591	1,279
37	39	20	1,568	1,591	1,301
238	335	143			

За допомогою програми множинної кореляції отримаємо таку регресійну модель: $Y = 0,052 \cdot X_1^{1,387} \cdot X_2^{0,458}$

$A_1 > 1$, тобто збільшення вартості основних виробничих фондів на 1 тис. грн. збільшує вартість випущеної продукції, а $0 < A_2 < 1$, тобто збільшення витрат праці зменшує вартість випущеної продукції.

Коефіцієнт кореляції = 0,98, зв'язок між змінними в моделі дуже тісний. За показниками точності і достовірності модель можна використовувати для аналізу виробничого процесу.

Проведемо аналіз отриманих результатів:

1) Середня продуктивність при фіксованих обсягах становить:
(у формули підставимо середні значення X_1 і X_2)

$$C_2 = \frac{Y}{X_2} = A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2-1} = 0,053 \cdot X_1^{1,387} \cdot X_2^{-0,542} = 1,634$$

$$C_1 = \frac{Y}{X_1} = A_0 \cdot X_1^{A_1-1} \cdot X_2^{A_2} = 0,053 \cdot X_1^{0,387} \cdot X_2^{0,458} = 0,698$$

C_1 – середня фондівдача; C_2 – середня продуктивність праці.

2) Гранична продуктивність при фіксованих обсягах інших ресурсів або середня кількість продукції на одиницю X_1 або X_2 :

$$\Gamma_2 = A_0 \cdot A_2 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2-1} = 0,053 \cdot 0,458 \cdot X_1^{1,387} \cdot X_2^{-0,542} = 2,282;$$

$$\Gamma_1 = A_0 \cdot A_1 \cdot X_1^{A_1-1} \cdot X_2^{A_2} = 0,053 \cdot 1,387 \cdot X_1^{0,387} \cdot X_2^{0,458} = 0,974.$$

Γ_1 показує скільки додаткових одиниць продукції дає 1 тис. грн. витраченим фондів при незмінних витратах праці; Γ_2 показує скільки додаткових одиниць продукції дає 1 люд-год. при фіксованих основних виробничих фондах.

3) Відносна зміна результатів виробництва на одиницю:

$$E_1 = A_1 = 1,387;$$

$$E_2 = A_2 = 0,458.$$

E_1 показує, що зміна основних виробничих фондів на 1% при незмінних витратах праці, викликає зміну обсягу продукції на 1,387%. E_2 показує, що зміна витрат праці на 1 % при незмінних витратах основних фондів викликає зміну обсягу продукції на 0,458%.

Витрати основних фондів більше впливають на зміни вартості випущеної продукції ніж витрати праці.

4) Потреба у будь-якому ресурсі за умов що відомі величини випуску і обсягів інших ресурсів:

$$X_2 = \left(\frac{Y}{A_0 \cdot X_1^{A_1}} \right)^{\frac{1}{A_2}} = \left(\frac{Y}{0,053 \cdot X_1^{1,387}} \right)^{\frac{1}{0,458}}$$

$$X_1 = \left(\frac{Y}{A_0 \cdot X_2^{A_2}} \right)^{\frac{1}{A_1}} = \left(\frac{Y}{0,053 \cdot X_2^{0,458}} \right)^{\frac{1}{1,387}}$$

X_1 показує скільки потрібно основних виробничих фондів для того, щоб отримати відомий випуск продукції – Y , якщо відома кількість витрат праці.

X_2 показує скільки потрібно витрат праці для того, щоб отримати відомий випуск продукції – Y , якщо відома кількість витрат основних фондів.

5) Співвідношення заміни та взаємодії ресурсів, а саме фондоозброєність – це взаємодія трудових ресурсів і основних фондів:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\left(\frac{Y}{A_0 \cdot X_2^{A_2}}\right)^{\frac{1}{A_1}}}{X_2} = A_0^{-\frac{1}{A_1}} \cdot Y^{\frac{1}{A_1}} \cdot X_2^{-1-\frac{A_2}{A_1}} = 0,053^{\frac{-1}{1,387}} \cdot Y^{\frac{1}{1,387}} \cdot X_2^{-1-\frac{0,458}{1,387}} = 2,374.$$

X_1/X_2 – середня фондоозброєність, це взаємодія основних фондів і витрат праці.

б) Гранична норма заміни ресурсів, а саме гранична норма заміни витрат праці виробничими фондами (знак мінус означає, що при сталому обсязі виробництва збільшення одного ресурсу відповідає зменшенню другого і навпаки):

$$h_{1,2} = -\frac{A_2 \cdot X_1}{A_1 \cdot X_2} = -\frac{0,458 \cdot X_1}{1,387 \cdot X_2} = -0,33 \frac{X_1}{X_2}.$$

При сталому обсязі виробництва збільшення основних виробничих фондів відповідає зменшенню трудових ресурсів, чим вище X_1/X_2 , тобто фондоозброєність, тим вища і норма заміни ручної праці фондами.

7) Ефект одночасного пропорційного збільшення обох видів ресурсів обчислюється сумарним коефіцієнтом еластичності:

$A=1,387+0,458=1,845>1$, тобто збільшення ресурсів у k разів призведе до збільшення випуску продукції більше ніж у k разів, а саме у $k^{1,845}$ разів.

8) Темпи приросту показника виражаються лінійно через темпи приросту факторів:

$$\Delta Y = A_1 \Delta X_1 + A_2 \Delta X_2 = 1,387 \Delta X_1 + 0,458 \Delta X_2.$$

9) Для наочного уявлення взаємозамінюваності факторів побудуємо ізокванту (рис. 11.1), для цього спочатку обчислимо значення параметра b .

$$b = \frac{Y_0^{\frac{1}{A_1}}}{A_0^{\frac{1}{A_1}}} = \left(\frac{37}{0,053}\right)^{\frac{1}{1,387}} = 112,3092$$

$$X_1 = \frac{b}{X_2^{\frac{A_2}{A_1}}} = \frac{112,3092}{X_2^{0,33}}$$

Графік будуюмо за точками, обчисленими в табл.11.2.

Таблиця 11.2

Точки для побудови ізокванти взаємодії ресурсів обладнання і праці

Y	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37
X ₁	71,08	56,55	52,53	49,46	44,98	43,27	42,50	44,09	42,50	41,79
X ₂	4	8	10	12	16	18	19	17	19	20

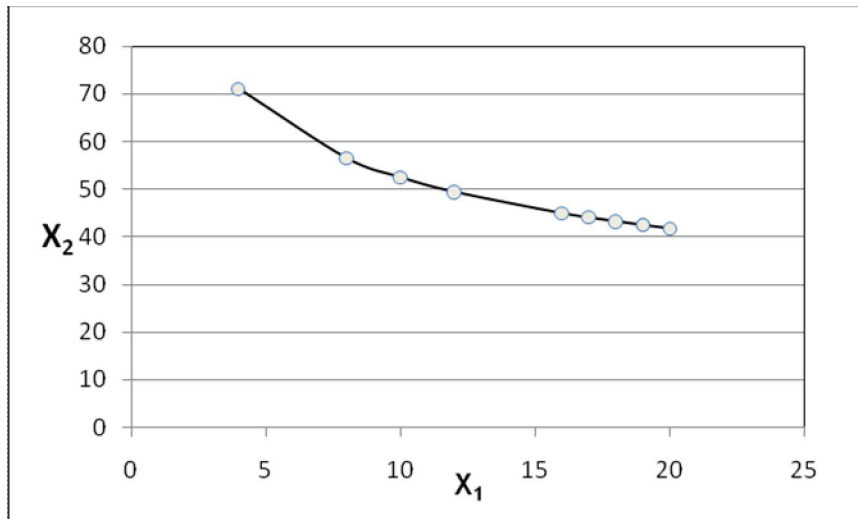


Рис. 11.1. Ізокванта

Контрольні запитання

1. Дати визначення лінійної багатofакторної регресійної моделі.
2. Суть та складові частини лінійної моделі з двома змінними?
3. Основні етапи побудови лінійних моделей?
4. Роль коефіцієнтів еластичності в кількісному аналізі лінійних моделей?
5. Характеристика системи оцінок і критеріїв для перевірки статистичної достовірності моделі?
6. З якою метою розраховуються стандартні похибки оцінок параметрів?
7. Дати визначення нелінійної багатofакторної регресійної моделі.
8. Суть та складові частини нелінійної економетричної моделі з двома змінними?
9. Основні етапи побудови нелінійних економетричних моделей?
10. Складові частини нелінійної моделі пропозиції продукції?
11. Етапи побудови нелінійної моделі попиту на продукцію?
12. Роль та значення коефіцієнтів еластичності в аналізі моделей попиту і пропозиції продукції
13. Роль коефіцієнтів еластичності в кількісному аналізі нелінійних економетричних моделей?

Література [3 с.257-267; 5, с. 465-534; 8, с. 39-57, 89-100; 9, с. 96-99, 145-150; 10, с. 171-227, 249-272; 11, с. 46-68, 140-149, 46-68, 95-97, 245-265; 12, с. 93-105, 142-154].

Табличні значення критерію Фішера

Число ступенів вільності f_2	Число ступенів вільності f_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
<i>F-розподіл, 5 %-ї точки ($F^{0,95}$)</i>																			
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	9,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,74	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,5	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	3,97	3,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,3	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,64	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,82	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	3,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,4	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,01	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

F-розподіл, 1 %-ї точки ($F^{0,99}$)

1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	31,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	72,1	26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,3	26,2	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,6	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	4,64
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,28	4,13	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,19	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,19	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,45
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,53	2,45	2,36	2,27	2,17
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

***t*-розподіл Ст'юдента [критичні значення $t(\alpha, k)$]**

Тести	Рівень значущості α (у процентах)							
Двосторонній	50%	20%	10%	5%	2%	1%	0,2%	0,1%
Односторонній	25%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	0,1%	0,05%
<i>k</i>								
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,62
2	0,861	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,043
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

χ^2 - розподіл
(критичні значення χ^2 для рівня значущості α та k ступенів вільності)

k	Рівень значущості α (у процентах)						
	0,1%	1%	2,5%	5%	9,5%	97,5%	99%
1	10,8	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,001	0,0002
2	13,86	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,02
3	16,2	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	18,5	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	20,5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	22,5	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	24,3	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,2
8	26,1	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,7
9	27,9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,1
10	29,6	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,6
11	31,3	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,1
12	32,9	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,6
13	34,5	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,1
14	36,1	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,7
15	37,7	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,2
16	39,3	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,8
17	40,8	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,4
18	42,3	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,0
19	43,8	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,6
20	45,3	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,3
21	46,8	38,9	35,5	32,4	11,6	10,3	8,9
22	48,3	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,5
23	49,7	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	51,2	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	52,6	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	54,1	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	55,5	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	56,9	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	58,3	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	59,7	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Основні вбудовані функції системи Excel

(знаходяться у “ майстри функцій f_x ”)

1. Математичні функції

КОРЕНЬ(.) – знаходить корінь квадратний із числа.

НАКЛОН(.,.) – знаходить нахил лінії простої лінійної регресії. Вхідними даними є масиви даних Y та X, а вихідним параметром – параметр b^* нашої регресійної прямої $Y = a^* + b^*X$.

ОТРЕЗОК(, .) – знаходить відрізок, що відсікає на вісі OY лінія простої лінійної регресії. Вхідними даними є масиви даних Y та X, а вихідним параметром – параметр a^* нашої регресійної прямої $Y = a^* + b^*X$.

СУММ(.) – знаходить суму всіх чисел указанного масиву (наприклад, стовпчика).

СУММКВ(.) – знаходить суму квадратів усіх чисел указанного масиву.

МУМНОЖ(, .) – знаходить добуток матриць. Для цього треба:

- 1) відмітити поле, де буде знаходитись результат добутку матриць;
- 2) увійти у "майстер функцій f_x ". У категоріях вибираємо "математичні", а в функціях – МУМНОЖ. Вводимо адреси матриць, добуток яких знаходимо;
- 3) для того, щоб отримати на екрані значення добутку матриць, натискаємо спершу клавішу **F2**, а потім **Ctrl+Shift+Enter**.

МОБР(.) – знаходить матрицю, обернену до квадратної матриці. Процедура знаходження оберненої матриці аналогічна процедурі МУМНОЖ.

LN(.) – знаходить натуральний логарифм числа.

2. Категорія «Ссылки и массивы»

ТРАНСП (.) – повертає транспоновану матрицю.

3. Статистичні функції

МІН (число1; число2; ...) – повертає найменше значення в списку аргументів.

Число1, число2,... – від 1 до 30 чисел, серед яких потрібно знайти найменше.

МАКС (число1; число2; ...) – повертає найбільше значення з набору значень.

Число1, число2,... – від 1 до 30 чисел, серед яких потрібно знайти найбільше.

СРЗНАЧ(. ; .; ...) – функція обчислення середнього арифметичного.

ФРАСПОБР(α , k_1 , k_2) Вхідними параметрами є рівень значущості α і ступені вільності k_1 і k_2 , а вихідним параметром $F_{\text{крит}}$ – критичне значення розподілу Фішера–Снедекора з ступенями вільності k_1 і k_2 .

СТЬЮДРАСПОБР(.,.) Вхідними параметрами є рівень значущості α і ступені вільності $n-k$, а вихідним параметром $t_{\text{крит}}$ – критичне значення розподілу Ст'юдента.

ХИ2ОБР(.,.) Повертає значення, зворотне одnobічної ймовірності розподілу χ^2 -квадрат. Вхідними параметрами є імовірність α і число ступенів вільності.

Додаток 5

Варіант 1

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Один. виміру	Види карамелі				
		Апельсин	Фрукт.-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос
Шукаємий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03
Оптова ціна за 1 т	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100
Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700
Попит max	т	89	110	80	99	102
min	т	59	71	51	80	67
Кількість варильних апаратів – 1						
Продуктивність лінії:	т/рік	1075				

Варіант 2

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Один. виміру	Види карамелі				
		Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Апельсин
Шукаємий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Базовий випуск	т	90,1	89,1	82,1	84,3	73,1
Оптова ціна за 1 т	грн.	2166,67	1815	2178	2136	1958,33
Собівартість 1 т	грн.	1600	1570	1836,6	1945,63	1680
Попит max	т	99	104	105	114	89
min	т	74	66	67	72	59
Кількість варильних апаратів – 1						
Продуктивність лінії:	т/рік	800				

Варіант 3*Вихідні дані для побудови робочої моделі*

Показники	Один. виміру	Види карамелі				
		Фрукт.- ягідний десерт	Десертн а	Яблуко	Абрикос	Вікторія
Шукаемий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Базовий випуск	т	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1
Оптова ціна за 1 т	грн.	2546,26	2175	2175	2100	2166,67
Собівартість 1 т	грн.	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600
Попит max	т	110	80	99	102	99
min	т	71	51	80	67	74
Кількість варильних апаратів – 1						
Продуктивність лінії:	т/рік	1075				

Варіант 4*Вихідні дані для побудови робочої моделі*

Показники	Один. виміру	Види карамелі				
		Слива	Лимон	Малина	Апельсин	Фрукт.- ягідний десерт
Шукаемий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Базовий випуск	т	89,1	82,1	84,3	73,1	90,17
Оптова ціна за 1 т	грн.	1815	2178	2136	1958,33	2546,26
Собівартість 1 т	грн.	1570	1836,6	1945,63	1680	2121,89
Попит max	т	104	105	114	89	110
min	т	66	67	72	59	71
Кількість варильних апаратів – 2						
Продуктивність ліній: Лінія № 1	т/рік	350				
Лінія № 2	т/рік	350				

Варіант 5

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Один. виміру	Види карамелі				
		Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива
Шукаємий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Базовий випуск	т	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1
Оптова ціна за 1 т	грн.	2175	2175	2100	2166,67	1815
Собівартість 1 т	грн.	1591,79	1828,3	1700	1600	1570
Попит max	т	80	99	102	99	104
min	т	51	80	67	74	66
Кількість варильних апаратів – 2						
Продуктивність ліній: Лінія № 1	т/рік	260				
Лінія № 2	т/рік	815				

Варіант 6

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Один. виміру	Види карамелі				
		Лимон	Малина	Апельсин	Фрукт.- ягідний десерт	Десертна
Шукаємий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Базовий випуск	т	82,1	84,3	73,1	90,17	70,4
Оптова ціна за 1 т	грн.	2178	2136	1958,33	2546,26	2175
Собівартість 1 т	грн.	1836,6	1945,63	1680	2121,89	1591,79
Попит max	т	105	114	89	110	80
min	т	67	72	59	71	51
Кількість варильних апаратів – 1						
Продуктивність ліній:	т/рік	1075				

Варіант 7

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Один. виміру	Види карамелі				
		Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон
Шукаємий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Базовий випуск	т	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1
Оптова ціна за 1 т	грн.	2175	2100	2166,67	1815	2178
Собівартість 1 т	грн.	1828,3	1700	1600	1570	1836,6
Попит max	т	99	102	99	104	105
min	т	80	67	74	66	67
Кількість варильних апаратів – 1						
Продуктивність лінії:	т/рік	800				

Варіант 8

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Один. виміру	Види карамелі				
		Малина	Апельсин	Фрукт.- ягідний десерт	Десертна	Яблуко
Шукаємий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Базовий випуск	т	84,3	73,1	90,17	70,4	87,2
Оптова ціна за 1 т	грн.	2136	1958,33	2546,26	2175	2175
Собівартість 1 т	грн.	1945,63	1680	2121,89	1591,79	1828,3
Попит max	т	114	89	110	80	99
min	т	72	59	71	51	80
Кількість варильних апаратів – 1						
Продуктивність лінії:	т/рік	1075				

Варіант 9*Вихідні дані для побудови робочої моделі*

Показники	Один. виміру	Види карамелі				
		Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина
Шукаємий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Базовий випуск	т	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3
Оптова ціна за 1 т	грн.	2100	2166,67	1815	2178	2136
Собівартість 1 т	грн.	1700	1600	1570	1836,6	1945,63
Попит max	т	102	99	104	105	114
min	т	67	74	66	67	72
Кількість варильних апаратів – 2						
Продуктивність ліній: Лінія № 1	т/рік	750				
Лінія № 2	т/рік	325				

Варіант 10*Вихідні дані для побудови робочої моделі*

Показники	Один. виміру	Види карамелі				
		Апельсин	Десертна	Абрикос	Слива	Малина
Шукаємий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Базовий випуск	т	73,1	70,4	82,03	89,1	84,3
Оптова ціна за 1 т	грн.	1958,33	2175	2100	1815	2136
Собівартість 1 т	грн.	1680	1591,79	1700	1570	1945,63
Попит max	т	89	80	102	104	114
min	т	59	51	67	66	72
Кількість варильних апаратів – 2						
Продуктивність ліній: Лінія № 1	т/рік	250				
Лінія № 2	т/рік	300				

Додаток 6

Норми витрат та ціни за 1 т сировини

Види сировини	Норми витрат на 1 т карамелі, кг/т									Ціна за 1 т сировини, грн.
	Апельсин	Фрукт.-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	
Цукор-пісок	633,72	637,79	640,37	643,31	643,18	645,3	643,18	637,69	615,67	750
Патока	317,82	320,75	322,17	321,66	323,95	324,53	324,14	319,81	309,99	153
Пюре фруктове	153,07	163,65	164,72	165	180,98	165,58	180,98	154,03	161,46	1800
Есенція	0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0	0,96	0,96	0,92	14400
Кислота молочна	6,03	6	6,03	6,04	6,07	6,07	6,07	6,07	5,5	1980
Кислота лимонна	3,06	2	4,02	6,52	3,08	2,02	3,08	3,08	3,3	2100

Варіанти визначення a_{ij} і c_{ij} за видами продукції для побудови моделі

Види продукції	a_{ij}			c_{ij}		
	a_{1j}	a_{2j}	a_{3j}	c_{1j}	c_{2j}	c_{3j}

Варіант 1

1	0,22	0,33	0,50	30	45	28
2	0,23	0,34	0,45	25	36	41
3	0,25	0,25	0,44	29	38	35
4	0,26	0,29	0,42	31	24	27
5	0,27	0,35	0,56	25	50	39

Варіант 2

1	0,23	0,34	0,45	25	36	41
2	0,25	0,25	0,44	29	38	35
3	0,26	0,29	0,42	31	24	27
4	0,27	0,35	0,56	25	50	39
5	0,29	0,45	0,52	26	39	41

Варіант 3

1	0,25	0,25	0,44	29	38	35
2	0,26	0,29	0,42	31	24	27
3	0,27	0,35	0,56	25	50	39
4	0,29	0,45	0,52	26	39	41
5	0,21	0,40	0,51	34	26	25

Варіант 4

1	0,26	0,29	0,42	31	24	27
2	0,27	0,35	0,56	25	50	39
3	0,29	0,45	0,52	26	39	41
4	0,21	0,40	0,51	34	26	25
5	0,20	0,32	0,44	48	37	35

Варіант 5

1	0,27	0,35	0,56	25	50	39
2	0,29	0,45	0,52	26	39	41
3	0,21	0,40	0,51	34	26	25
4	0,20	0,32	0,44	48	37	35
5	0,30	0,35	0,43	26	28	45

Варіант 6

1	0,29	0,45	0,52	26	39	41
2	0,21	0,40	0,51	34	26	25
3	0,20	0,32	0,44	48	37	35
4	0,30	0,35	0,43	26	28	45
5	0,32	0,36	0,40	34	52	29

Варіант 7

1	0,21	0,40	0,51	34	26	25
2	0,20	0,32	0,44	48	37	35
3	0,30	0,35	0,43	26	28	45
4	0,32	0,36	0,40	34	52	29
5	0,25	0,27	0,39	25	49	34

Варіант 8

1	0,20	0,32	0,44	48	37	35
2	0,30	0,35	0,43	26	28	45
3	0,32	0,36	0,40	34	52	29
4	0,25	0,27	0,39	25	49	34
5	0,29	0,21	0,37	27	29	40

Варіант 9

1	0,30	0,35	0,43	26	28	45
2	0,32	0,36	0,40	34	52	29
3	0,25	0,27	0,39	25	49	34
4	0,29	0,21	0,37	27	29	40
5	0,32	0,26	0,52	27	36	35

Варіант 10

1	0,32	0,36	0,40	34	52	29
2	0,25	0,27	0,39	25	49	34
3	0,29	0,21	0,37	27	29	40
4	0,32	0,26	0,52	27	36	35
5	0,28	0,38	0,54	35	34	39

Додаток 8

**Варіанти визначення A_i і B_j для побудови моделі оптимального
завантаження обладнання**

Варіант	Фонд робочого часу і-го обладнання A_i			Завдання по випуску j-го виду продукції B_j				
	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
1	800	400	500	320	150	400	640	520
2	900	800	600	180	650	700	220	300
3	600	400	450	220	450	800	740	350
4	700	300	850	140	160	190	100	200
5	500	700	750	600	500	700	450	580
6	900	900	260	350	480	620	330	310
7	1000	600	800	800	400	600	700	400
8	600	500	300	550	530	440	680	720
9	400	700	700	150	230	180	290	110
10	700	800	900	330	490	450	300	500

Додаток 9

Варіант 1

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
1	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
5	Батон святковий в уп.	1300	957,5	50	500	275	400	1,3
7	Булка дніпропетровська	15000	1267,5	0	50	25	10	2
11	Булочка родзинка	2000	1700	25	75	50	70	2
12	Булочка Світанок	2083	1770,83	25	75	50	70	6
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
33	Ріжки з повидлом	1840	1610	10	150	80	140	9, 10
42	Хліб білий	950	855,	100	500	300	300	4, 5
43	Хліб висівковий	750	675	100	500	300	300	4, 5
44	Хліб гірчичний	916,67	825	100	500	300	300	4, 5

Варіант 2

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
1	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
6	Батон святковий	1100	907,5	50	500	275	400	1,3
8	Булка дніпропетровська в уп.	1650	1394,25	0	50	25	5	2
11	Булочка родзинка	2000	1700	25	75	50	70	2
13	Булочка столична	1666,67	1416,67	25	75	50	70	6
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
34	Ріжки з повидлом	2100	1837,5	10	150	80	140	9, 10
42	Хліб білий	950	855,	100	500	300	300	4, 5
45	Хліб пшеничний	826,67	744	100	500	300	300	4, 5
47	Хліб святошинський	650	585	100	500	300	300	6

Варіант 3

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
1	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
4	Батон дорожній в уп.	950	783,75	50	500	275	400	1,3
9	Булка дніпропетровська в уп.	1650	1394,25	0	50	25	5	2
11	Булочка родзинка	2000	1700	25	75	50	70	2
14	Булочка столична в уп.	1833,33	1558,33	25	75	50	35	2
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
34	Ріжки з повидлом	2100	1837,5	10	150	80	140	9, 10
42	Хліб білий	950	855,	100	500	300	300	4, 5
48	Хліб святошинський в уп.	712,5	641,25	100	500	300	150	6
49	Хліб хотинський	541,67	487,5	100	500	300	300	6

Варіант 4

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
2	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
5	Батон святковий в уп.	1300	957,5	50	500	275	400	1,3
10	Булка Завиток	1111	938,89	0	50	25	10	2
11	Булочка родзинка	2000	1700	25	75	50	70	2
15	Булочка харківська	2000	1700	25	75	50	70	6
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
36	Ріжки з повидлом в уп.	1993	1743,88	10	150	80	60	9, 10
42	Хліб білий	950	855,	100	500	300	300	4, 5
51	Хлібці з висівками	940	846	100	500	300	300	6
52	Хлібці з висівками в уп.	1040	936	100	500	300	300	6

Варіант 5

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
2	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
6	Батон святковий	1100	907,5	50	500	275	400	1,3
11	Булочка родзинка	2000	1700	25	75	50	70	2
16	Булочка харківська в уп.	2250	1912,50	25	75	50	35	6
17	Вироби здібні з повидлом	1666,67	1408,34	0	50	25	0	9, 10
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
37	Ріжки з повидлом в уп.	1666,67	1458,34	10	150	80	50	9, 10
43	Хліб висівковий	750	675	100	500	300	300	4, 5
45	Хліб пшеничний	826,67	744	100	500	300	300	4, 5
48	Хліб святошинський в уп.	712,5	641,25	100	500	300	150	6

Варіант 6

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
2	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
4	Батон дорожній в уп.	950	783,75	50	500	275	400	1,3
12	Булочка Світанок	2083	1770,83	25	75	50	70	6
13	Булочка столична	1666,67	1416,67	25	75	50	70	6
18	Витушка київська	1766,67	1492,84	0	50	25	0	9, 10
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
38	Рогалик маковий	2750	2406,25	10	150	80	100	7, 8
43	Хліб висівковий	750	675	100	500	300	300	4, 5
46	Хліб пшеничний	890	801	100	500	300	300	4, 5
49	Хліб хотинський	541,67	487,5	100	500	300	300	6

Варіант 7

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
3	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
5	Батон святковий в уп.	1300	957,5	50	500	275	400	1,3
12	Булочка Світанок	2083	1770,83	25	75	50	70	6
14	Булочка столична в уп.	1833,33	1558,33	25	75	50	35	6
19	Здоба з повидлом	2300	1943,5	0	50	25	5	9, 10
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
39	Рогалі козацькі	1184,3	1036,26	10	150	80	75	7, 8
43	Хліб висівковий	750	675	100	500	300	300	4, 5
47	Хліб святошинський	650	585	100	500	300	300	6
50	Хліб хотинський в уп.	593,75	534,38	100	500	300	300	6

Варіант 8

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
3	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
6	Батон святковий	1100	907,5	50	500	275	400	1,3
12	Булочка Світанок	2083	1770,83	25	75	50	70	6
15	Булочка харківська	2000	1700	25	75	50	70	6
20	Здоба столична	2500	2112,5	0	50	25	10	9, 10
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
40	Рогалі козацькі в уп.	1335	1168,13	10	150	80	30	7, 8
44	Хліб гірчичний	916,67	825	100	500	300	300	4, 5
45	Хліб пшеничний	826,67	744	100	500	300	300	4, 5
49	Хліб хотинський	541,67	487,5	100	500	300	300	6

Варіант 9

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
3	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
4	Батон дорожній в уп.	950	783,75	50	500	275	400	1,3
12	Булочка Світанок	2083	1770,83	25	75	50	70	6
16	Булочка харківська в уп.	2250	1912,50	25	75	50	35	6
21	Здоба столична в уп.	2700	2281,5	0	50	25	5	9, 10
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
41	Ріжки з маком	2033	1779,05	10	150	80	75	7, 8
44	Хліб гірчичний	916,67	825	100	500	300	300	4, 5
47	Хліб святошинський	650	585	100	500	300	300	6
51	Хлібці з висівками	940	846	100	500	300	300	6

Варіант 10

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
1	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
5	Батон святковий в уп.	1300	957,5	50	500	275	400	1,3
13	Булочка столична	1666,67	1416,67	25	75	50	70	6
14	Булочка столична в уп.	1833,33	1558,33	25	75	50	35	6
22	Калач український	2100	1774,5	0	100	50	0	7, 8
33	Ріжки з повидлом	1840	1610	10	150	80	140	9, 10
36	Ріжки з повидлом в уп.	1993	1743,88	10	150	80	60	9, 10
45	Хліб пшеничний	826,67	744	100	500	300	300	4, 5
50	Хліб хотинський в уп.	593,75	534,38	100	500	300	300	6
52	Хлібці з висівками в уп.	1040	936	100	500	300	300	6

Додаток 10

Річна продуктивність печей, т/рік.

1	Піч БН-50 № 1	8970
2	Піч БН-50 № 2	8970
3	Піч БН-50 № 3	8970
4	Піч БН-50 № 4	8970
5	Піч БН-50 № 5	8970
6	Піч БН-50 № 6	8970
7	Піч БН-50 № 7	8970
8	Піч БН-50 № 8	8970
9	ПКЄ-9-03	547,2
10	ПКЄ-9-03	548,2

Додаток 11

Ціна на сировину

№ п/п	Назва сировини	Одиниця виміру	Ціна за одиницю сировини
1	Борошно вищ.гат.	тн	516,67
2	Борошно 1 гат.	тн	413,98
3	Ванілін	кг	62,42
4	Висівки	тн	79,17
5	Дріжджі конц.	кг	0,91
6	Дріжджі прес.	кг	1,03
7	Мак	кг	5,67
8	Маргарин	кг	2,76
9	Масло гірчичне	кг	1,65
10	Меланж	кг	3,75
11	Молоко сухе	кг	2,94
12	Олія	кг	2,42
13	Оцет	л	0,87
14	Плівка	тн	1043,12
15	Повидло	кг	1,4
16	Сабза	кг	3,08
17	Сіль	тн	60
18	Цукор	тн	930
19	Цукрова пудра	тн	940

Витрати сировини на 1 т хлібобулочних виробів

№	Види продукції	Вихід продукції, кг	Борошно вищ. гат.	Борошно 1 гат.	Ванілін	Віскі	Дріжджі конц.	Дріжджі прес.	Мак	Маргарин	Масло гірчичне	Меланж	Молоко сухе	Олія	Оцет	Плівка	Повидло	Сабза	Сіль	Цукор	Цукрова пудра
1	Батон дорожній	131,7	100				1,2							2,125					1,3	2	
2	Батон дорожній	131,7	100					3,0		0,1				2,125					1,3	2	
3	Батон дорожній	131,7	100				2,0												1,5	6	
4	Батон дорожній в уп.	131,7	100				2,0									7			1,5	6	
5	Батон святковий в уп.	143,5	100				1,2							2,125		5		7	1,3	8	
6	Батон святковий	142,5	100				1,6						2,0	2,550				7	1,4	5	
7	Булка дніпропетровська	163,0	100		0,020		1,3					0,8	2,0					12	1,4	17	
8	Булка дніпропетровська в уп.	163,0	100		0,020		3,2			13,0		0,8	2,0			7		12	1,0	17	
9	Булка дніпропетровська в уп.	163,0	100		0,020		4,0			13,0		0,8	2,0			7		12	1,0	17	
10	Булка Завиток	137,0	100		0,020		3,2			13,0		0,8						12	1,0	5	
11	Булочка родзинка	158,5	100				1,2		1,5					3,400				15	1,5	6	
12	Булочка Світанок	150,0	100				2,4			8,9		5,0	2,2					15	1,0	14	1,0
13	Булочка столична	150,0	100		0,050		4,0			20,0		3,0	3,0						1,0	15	2,0
14	Булочка столична в уп.	150,0	100		0,050		4,0			12,0		3,0	3,0			7			1,0	20	2,0
15	Булочка харківська	151,0	100		0,050		4,0			12,0		3,0	3,0						1,0	20	1,0
16	Булочка харківська в уп.	151,0	100		0,020		2,0			10,0		3,0	3,0			14			1,0	15	1,0
17	Вироби здібні з повидлом	155,0	100		0,020		2,0			10,0		3,0					15		1,0	15	1,0
18	Витушка київська	131,0	100		0,020		2,4			10,0		3,0			0,3		10		1,0	14	1,5
19	Здоба з повидлом	165,3	100				1,2							2,125			20		1,3	20	
20	Здоба столична	150,0	100		0,050		3,2			12,7		4,0	3,0						1,0	16	
21	Здоба столична в уп.	150,0	100		0,050		4,0			12,0		3,0	3,0			14			1,0	20	
22	Калач український	136,5	100		0,050		4,0			12,0		3,0	3,0					5	1,0	20	

Продовження додатку 12

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
23	Калач український в уп.	136,5	100		0,025		2,4			7,0			1,0			9		5	1,0	12	
24	Паляниця столична	129,0	100		0,025		2,4			7,0			1,0	0,85					1,0	12	
25	Паляниця столична в уп.	129,0	100		0,025		1,6					1,5	1,0	0,85		7			1,5	12	
26	Плетінка з маком	135,0	100				1,6		1,0			1,5		0,85					1,5	10	
27	Плетінка з маком	135,0	100				0,8		1,0					2,125	0,3				1,5	10	
28	Плетінка з маком в уп.	135,0	100				0,8		1,0					2,125	0,3	7			1,5	7	
29	Плетінка українська	150,0	100				0,8		1,0					2,125					1,5	4	
30	Плюшка московська	155,0	100		0,025			3,2		9,0		6,0	2,0						1,0	17	
31	Плюшка московська в уп.	155,0	100		0,025		3,2			15,2		6,8	3,0			14			1,0	22	
32	Ріжки дніпровські	132,5	100		0,025		3,2			15,2		6,0	3,0						1,0	22	
33	Ріжки з повидлом	161,1	100				3,2						9,0				20		1,5	15	
34	Ріжки з повидлом	161,7	100					3,0		10,0			9,0				20		1,0	15	2,0
35	Ріжки з повидлом	161,7	100				3,0			10,0			9,0				20		1,0	15	2,0
36	Ріжки з повидлом в уп.	161,1	100				2,4			10,0			9,0			14	20		1,0	15	2,0
37	Ріжки з повидлом в уп.	161,7	100					3,0		10,0			9,0			14	20		1,0	15	2,0
38	Рогалик маковий	165,0	100				2,4		20,0	10,0									1,0	15	2,0
39	Рогалі козацькі	132,0	100		0,050		4,0			8,0				2,0	0,3				1,0	28	2,0
40	Рогалі козацькі в уп.	132,0	100		0,050		2,4			5,0				2,0	0,3	7			1,5	2	
41	Ріжки з маком	153,3	100					2,4	10,0	5,0				2,0					1,5	12	
42	Хліб білий	129,5	100				2,4			8,0		3,0						12	1,0	7	
43	Хліб висівковий	132,5	100		0,020		4,0			13,0		0,8							1,0	2	
44	Хліб гірчичний	140,0	100				1,2				6				0,3				1,3		
45	Хліб пшеничний	127,0	100				0,8								0,3				1,3		
46	Хліб пшеничний	129,2	100				1,0								0,3				1,3		
47	Хліб святошинський	132,5	90			10	1,6							3,0	0,3				1,5	1	
48	Хліб святошинський в уп.	132,5	90			10	2,0							3,0	0,3	7			1,5	1	
49	Хліб хотинський	131,5		100			1,2							1,7					1,5		
50	Хліб хотинський в уп.	131,5		100			1,2							1,7		6			1,5		
51	Хлібці з висівками	132,5		50		50	1,2												1,5		
52	Хлібці з висівками в уп.	131,5		50		50	1,2									6			1,5		

Додаток 13

№ вар.	Витрати на перевезення одиниці вантажу																								
	А ₁					А ₂					А ₃					А ₄					А ₅				
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅
1.	1	2	3	4	4	3	5	6	4	3	6	2	1	2	3	4	4	3	5	6	4	3	6	2	4
2.	2	9	6	7	3	5	4	2	3	5	4	9	2	9	6	7	3	5	4	2	3	5	4	9	3
3.	7	6	5	6	2	4	3	1	5	3	6	8	7	6	5	6	2	4	3	1	5	3	6	8	2
4.	6	9	4	3	1	5	6	8	5	7	1	4	6	9	4	3	1	5	6	8	5	7	1	4	1
5.	4	2	3	5	4	3	5	7	4	3	6	2	4	2	3	5	4	3	5	7	4	3	6	2	4
6.	5	8	6	9	1	2	4	7	3	5	8	5	5	8	6	9	1	2	4	7	3	5	8	5	1
7.	4	6	9	4	5	7	6	8	4	9	3	2	4	6	9	4	5	7	6	8	4	9	3	2	5
8.	2	5	3	6	8	5	9	6	4	5	2	1	2	5	3	6	8	5	9	6	4	5	2	1	8
9.	7	5	3	1	5	9	8	6	2	4	5	7	7	5	3	1	5	9	8	6	2	4	5	7	5
10.	2	5	8	4	6	5	7	5	3	1	5	9	2	5	8	4	6	5	7	5	3	1	5	9	6

Закінчення додатку 13

№ вар.	Запаси постачальників					Потреби споживачів				
	А ₁	А ₂	А ₃	А ₄	А ₅	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅
1.	25	25	55	40	55	40	30	25	15	35
2.	50	50	85	20	85	20	75	15	25	70
3.	10	10	25	45	25	45	65	40	10	20
4.	30	30	10	25	10	25	45	15	60	10
5.	25	25	40	65	40	65	10	35	40	15
6.	65	65	15	20	15	20	35	40	75	10
7.	20	20	85	45	85	45	15	35	65	55
8.	50	50	40	35	40	35	10	75	45	40
9.	35	35	40	15	40	15	20	35	30	10
10.	25	25	50	70	50	70	85	30	40	65

Варіант 1

Розмір інвестицій млн. грн., X	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	45	60	55	70
100	110	90	85	105
150	160	165	170	155
200	210	215	225	230

Варіант 2

Розмір інвестицій млн. грн., X	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	50	55	60	65
100	100	100	90	109
150	165	170	175	162
200	220	225	230	240

Варіант 3

Розмір інвестицій млн. грн., X	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	40	65	55	75
100	110	90	80	110
150	170	160	165	150
200	215	220	225	235

Варіант 4

Розмір інвестицій млн. грн., X	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	45	70	60	65
100	115	115	85	105
150	165	175	170	155
200	225	230	235	245

Варіант 5

Розмір інвестицій млн. грн., X	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	55	60	55	70
100	120	90	85	105
150	170	165	175	155
200	210	215	225	230

Варіант 6

Розмір інвестицій млн. грн., X	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	35	60	55	70
100	112	90	85	105
150	158	165	175	155
200	215	235	240	250

Варіант 7

Розмір інвестицій млн. грн., X	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	55	60	65	70
100	120	105	90	105
150	170	155	175	155
200	200	215	225	255

Варіант 8

Розмір інвестицій млн. грн., X	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	55	60	55	70
100	120	90	85	105
150	170	165	175	155
200	210	215	225	240

Варіант 9

Розмір інвестицій млн. грн., X	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	55	60	55	70
100	120	90	85	105
150	170	165	175	155
200	210	215	225	250

Варіант 10

Розмір інвестицій млн. грн., X	Приріст продукції, млн. грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	55	60	65	70
100	125	10	95	115
150	160	170	175	160
200	205	210	220	255

Задачі для лабораторної роботи № 7

Варіант 1. Маємо вибірку даних за 8 років, які характеризують обсяг продажу шампанського, млн. бут. (Y) в залежності від чисельності дорослого населення (X). Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$.

Обсяг продажу, млн. бут.	Чисельність дорослого населення, млн. осіб
Y	X
143,56	34,027
144,78	33,768
165,99	33,453
167,23	33,152
171,22	32,97
185,67	32,634
191,45	32,41
195,64	32,2

Варіант 2. Маємо вибірку даних за 10 років, які характеризують обсяг продажу шампанського, млн. бут. (Y) в залежності від середнього доходу населення, тис. грн./чол. в рік (X). Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$.

Обсяг продажу, млн. бут.	Середній дохід населення, тис. грн./чол. в рік
Y	X
143,56	2,63264
144,78	3,24427
165,99	3,81594
167,23	4,49317
171,22	5,76137
185,67	8,06351
191,45	10,21981
195,64	12,357
206,1	12,589
213,97	13,981

Варіант 3. Маємо вибірку даних за 12 років, які характеризують обсяг продажу шампанського, млн. бут. (Y) в залежності від обсягу збору винограду, тис. т (X). Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$.

Обсяг продажу, млн. бут.	Обсяг збору винограду, тис. т
Y	X
142,7	39,8
143,56	39,04
144,78	38,56
165,99	37,04
167,23	36,04
171,22	35,48
185,67	36,6
191,45	36,48
195,64	36,6
198,8	34,82
205,34	36,3
220,21	32,21

Варіант 4. Маємо вибірку даних за 12 років, які характеризують обсяг продажу шампанського, млн. бут. (Y) в залежності від курсу долара, грн. (X). Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X$.

Обсяг продажу, млн. бут.	Курс долара, грн.
Y	X
142,7	3,8
143,56	5,44
144,78	5,37
165,99	5,32
167,23	5,33
171,22	5,31
185,67	5,12
191,45	6,5
195,64	6,8
198,8	7,85
205,34	7,9
220,21	8,01

Варіант 5. Маємо вибірку даних за 12 років, які характеризують виручку від реалізації підприємства ТОВ «Меркс Груп», тис. грн. (Y) в залежності від чисельності працюючих, чол. (X). Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$.

Виручка від реалізації тис. грн.	Чисельність персоналу, чол.
Y	X
225	325,7
231	360,6
229	209,4
233	267,5
283	473,7
279	772,8
286	573,4
290	673,1
321	1841,2
322	866,4
325	1299,6
324	1407,9

Варіант 6. Маємо вибірку даних за 12 років, які характеризують виручку від реалізації підприємства ТОВ «Меркс Груп», тис. грн. (Y) в залежності від курсу долара, грн. (X). Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$.

Виручка від реалізації тис. грн.	Курс долара, грн.
Y	X
225	3,8
231	5,44
229	5,37
233	5,32
283	5,33
279	5,31
286	5,12
290	6,5
321	6,8
322	7,85
325	7,9
324	8,01

Варіант 7. Маємо вибірку даних за 8 років, які характеризують виручку від реалізації хлібокомбінату № 11, тис. грн. (Y) в залежності від обсягу виробленої продукції, тис. грн. (X). Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X$.

Виручка від реалізації тис. грн.	Обсяг виробленої продукції тис. грн.
Y	X
74726,2	56254,9
56044,6	42191,2
51817,4	37503,3
24984,7	20314,3
59673,3	45840,5
78660,3	60426,2
81372,7	62509,7
51536	39589,5

Варіант 8. Маємо вибірку даних за 8 років, які характеризують виручку від реалізації хлібокомбінату № 11, тис. грн. (Y) в залежності від чисельності працюючих, чол. (X). Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X$.

Виручка від реалізації тис. грн.	Чисельність працюючих, чол.
Y	X
74726,2	456
56044,6	342,3
51817,4	304
24984,7	164,7
59673,3	277
78660,3	365,1
81372,7	377,7
51536	239,2

Варіант 9. Маємо вибірку даних за 8 років, які характеризують чистий дохід підприємства «Тойота Центр Київ», тис. грн. (Y) в залежності від вартості основних виробничих фондів (ОВФ), тис. грн. (X). Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$.

Чистий дохід тис. грн. Y	Вартість ОВФ тис. грн. X
115380	40480
150200	48120
125430	56479
103676	60659
125486	60659
136400	49482
145700	33454
233811	16027,5

Варіант 10. Встановити залежність заробітної плати (Y) від кваліфікаційного розряду (X). Візьмемо денну заробітну плату і кваліфікаційний розряд десяти робітників підприємства КП ШЕУ Подільського району м. Києва. Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $Y = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X$.

Денна зарплата, грн. Y	Кваліфікаційний розряд X
45	2
50	3
50	3
60	4
70	5
60	4
80	6
70	5
70	6
80	5

Вихідні дані для лабораторної роботи № 6

	Варіант 1		Варіант 2		Варіант 3		Варіант 4		Варіант 5	
	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
1	20,6	27,75	25,85	102,1	26,79	86,82	24,55	88,82	134,47	14,3
2	19,55	28,37	22,28	101,85	24,59	85,42	24,15	87,1	119,25	15,15
3	16,35	34,45	19,96	97,85	22,2	81,45	23,59	84	112,17	16,63
4	14,03	41,32	17,78	94,25	19,89	76,5	23,7	80,02	104,09	18,87
5	12,65	48,5	15,33	85,31	18,07	71	24,07	74,25	90,03	21,42
6	12,38	52,45	14,39	71,32	16,25	64,62	24,37	67,5	68,75	23,82
7	11,46	55,55	12,89	58,32	15,15	60	24,75	62,55	56,18	27,67
8	11,58	62,25	12,7	46,45	13,79	51,4	20,77	53,55	47,4	29,45
9	11,43	73,01	12,49	42,8	14,9	46,32	21,29	47,87	45,52	32,27
10	12,19	76,42	12,37	35	14,67	38,25	19,83	40,22	38,47	36,07
11	11,19	86,32	12,25	33,42	15,37	36,3	20,55	38,32	33,9	44,2
12	10,9	88,45	11,95	30	15,75	32,55	19,38	35,07	33,3	47,57
13			11,69	19,6	16,37	26,65	18,1	28,75	29,57	50,58
14			13	15,72	17,79	19,87	16,92	22,87	30,1	57,3
15			13,87	12	18,83	15,22	16,47	17,57	29,37	67,37
16					18,4	9,72	16,71	11,88	27,77	72,23
17					18,92	4,41	16,11	6,46	26,64	78,85
18									25,5	85,46
19									24,39	92,07
20									23,27	98,68

Закінчення додатку 16

	Варіант 6		Варіант 7		Варіант 8		Варіант 9		Варіант 10	
	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
1	135	15,23	7,35	85,15	46,52	1,25	1,48	2,82	1,68	18,2
2	119,52	15,22	8,25	81,17	46,48	1,37	2,61	8,71	1,94	18,28
3	112,27	16,64	9,53	71,04	44,91	1,45	2,33	15,05	3,45	18,12
4	104,19	19,59	10,65	64,43	43,84	2,32	4,49	22,52	4,28	15,95
5	90,68	21,59	11,58	58,42	41,89	2,5	4,35	24,65	4,17	14,78
6	68,75	24,82	12,96	53,67	39,28	3,45	5,5	27,63	4,48	14,2
7	56,46	27,77	13,58	50,7	36,67	3,55	5,62	38,25	4,9	14,35
8	47,9	31	14,23	48,25	32,47	4,25	7,33	44,62	7,64	9,62
9	45,92	32,37	15,69	35,86	26,03	5,01	8,19	67,65	8,16	8,27
10	39,07	36,17	16,39	31,25	17,51	5,42	8,34	69,7	7,46	6,34
11	34,25	44,38	17,5	29,4	16,5	6,32	7,8	72,35	6,98	6,25
12	33,53	47,64	18,09	23,64	9,4	6,45	8,65	76,35	6,95	5,03
13	30,41	52,11	19,17	18,9	8,81	6,69	10,24	79,6	8,04	4,2
14	30,83	57,57	19,75	12,01	7	7	9,86	82,97	9,07	2,72
15	29,52	68,1			6,4	7,07	10,27	89,1		
16	26,8	71,36			5,64	7,98				
17	25,08	77,18			5,51	8,42				
18	23,33	83			5	9,18				
19					4,42	9,85				

Вихідні дані для лабораторних робіт № 8 та 9

t (час)	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Об'єм реаліза ції тис. грн.	Прибу ток фірми, тис. грн.	Витра ти на рекла му, грн.	Попит на продук цію ,т	Витра ти на подат ки, тис. грн.	Попит на олію, тис. л	Попит на молоко , тис. л	Середн ій дохід на душу наसेле ння, тис. грн.	Собіва ртість 1 т продук ці, тис. грн.	Чисель ність працю ючих, чол.
У ₁	У ₂	У ₃	У ₄	У ₅	У ₆	У ₇	У ₈	У ₉	У ₁₀	
1	1251	23,52	1251	500,0	1109,1	29,244	16,9	3,9	5,6	24
2	1053,1	34,1	1053,1	979,5	979,5	29,54	14,1	3,8	5	26
3	1023,2	36,3	1023,2	896,8	896,8	25,58	14,8	4	5,6	25
4	862,3	27,1	862,3	650,0	824,0	21,16	15,8	4,8	6,4	28
5	804,9	25,2	804,9	723,1	723,1	18,04	15,8	4	6,8	27
6	804,9	25	804,9	652,2	652,2	25	15,5	4,5	6,8	29
7	559,5	14,3	559,5	578,3	856,0	17,16	12,5	4,2	6,8	28
8	592,3	14,2	592,3	669,2	669,2	23,2	18,1	4,5	7,4	29
9	583,1	11,5	583,1	755,6	755,6	27,18	19,1	4,6	6,6	27
10	832,1	24,3	832,1	1026,3	1026,3	30,52	18,8	5	6,2	27
11	851,7	21,5	851,7	605,0	811,0	16	16,4	4,8	7	26
12	1395,1	44,5	1395,1	800,0	1094,5	29,94	18,1	5	6,8	27
13	1086,3	34,1	1086,3	894,5	894,5	23,84	19,9	5,1	6,6	26
14	802,1	28,2	802,1	780,8	780,8	20,92	17,3	5,4	8	27
15	795,1	22,7	795,1	738,9	1000,0	19,26	19,5	5,4	8,4	28
16	745,3	20,2	745,3	671,0	671,0	32			7,8	33
17	676,3	14	676,3	559,7	559,7	15,48				35
18	591,5	19,5	591,5	451,3	650,0	14,64				32
19	411,4	19,9	411,4	354,6	354,6	12,68				34
20	351,1	13,9	351,1	285,8	285,8	12,48				33
21	301,3	10,1	301,3	219,4	219,4					35
22	205,1	9,8	205,1	172,9	600,0					33
23	151,9	9,7	151,9	319,4	319,4					34
24	161,7	18,9	161,7							32
25	644,5	35,2	644,5							32
26										29
27										31
28										29
29										30
30										30

Вихідні дані для лабораторної роботи № 10

Варіант 1			Варіант 2			Варіант 3			Варіант 4			Варіант 5		
Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂
38,9	5,2	15	31,1	4,7	15	31,7	4,7	23	23,8	5,2	15	38,9	4,8	15
39,8	5,3	16	32,2	5,7	16	31,8	5,7	24	25	5,3	16	39,8	5,6	16
40,2	4,8	17	32,3	5,7	17	31,9	5,7	24	25	4,8	17	40,2	5,9	17
41,4	5,6	18	32,4	5,2	18	32,1	5,2	26	25,2	5,6	18	41,4	4,9	18
41,7	5,6	18	32,5	5,0	18	32,5	5,0	26	25,3	5,6	18	41,7	5,1	18
43,4	5,6	19	32,7	5,2	19	32,7	5,2	27	25,6	5,6	19	43,4	4,9	19
44,3	4,9	20	32,8	5,2	20	33,0	5,2	28	25,6	4,9	20	44,3	5,8	20
46,7	6	20	33,4	5,3	20	41,7	5,3	28	25,9	6	20	46,7	6,5	20
47,3	6,1	20	33,6	5,7	20	41,9	5,7	29	26,1	6,1	20	47,3	6,5	20
49	6	21	33,6	5,9	21	42,0	5,9	30	26,1	6	21	49	5,9	21
49,3	6,1	21	33,9	6,0	21	42,1	6,0	30	26,3	6,1	21	49,3	6,3	21
51,2	6,5	21	34,4	6,6	21	52,5	6,6	30	26,8	6,5	21	51,2	6,0	21
51,3	6,6	21	34,9	7,6	21	53,6	7,6	30	26,8	6,6	21	51,3	6,4	21
51,6	6,9	22	35,1	7,2	22	54,6	7,2	32	27,3	6,9	22	51,6	6,7	22
51,7	6,4	23	36,2	7,3	23	55,6	7,3	32	27,8	6,4	23	51,7	6,8	23

Варіант 6			Варіант 7			Варіант 8			Варіант 9			Варіант 10		
Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂
31,1	4,8	15	31,7	5,4	23	23,8	5,4	15	38,9	5,2	15	31,7	4,7	15
32,2	5,6	15	31,8	6,0	24	25	6,0	20	39,8	5,3	15	31,8	5,7	20
32,3	5,9	17	31,9	6,3	24	25	6,3	24	40,2	4,8	17	31,9	5,7	24
32,4	4,9	17	32,1	5,5	26	25,2	5,5	22	41,4	5,6	17	32,1	5,2	22
32,5	5,1	18	32,5	5,6	26	25,3	5,6	27	41,7	5,6	18	32,5	5,0	27
32,7	4,9	18	32,7	5,5	27	25,6	5,5	31	43,4	5,6	18	32,7	5,2	31
32,8	5,8	19	33,0	6,3	28	25,6	6,3	29	44,3	4,9	19	33,0	5,2	29
33,4	6,5	19	41,7	6,9	28	25,9	6,9	33	46,7	6	19	41,7	5,3	33
33,6	6,5	19	41,9	7,0	29	26,1	7,0	29	47,3	6,1	19	41,9	5,7	29
33,6	5,9	20	42,0	6,7	30	26,1	6,7	26	49	6	20	42,0	5,9	26
33,9	6,3	20	42,1	7,0	30	26,3	7,0	26	49,3	6,1	20	42,1	6,0	26
34,4	6,0	20	52,5	6,8	30	26,8	6,8	27	51,2	6,5	20	52,5	6,6	27
34,9	6,4	21	53,6	7,1	30	26,8	7,1	28	51,3	6,6	21	53,6	7,6	28
35,1	6,7	21	54,6	7,4	32	27,3	7,4	38	51,6	6,9	21	54,6	7,2	38
36,2	6,8	22	55,6	7,5	32	27,8	7,5	40	51,7	6,4	22	55,6	7,3	40

Вихідні дані для лабораторної роботи № 11

Варіант 1			Варіант 2			Варіант 3			Варіант 4			Варіант 5		
Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂
151	10,53	19,4	172	11,10	19,4	170	11,10	19,5	17,6	10,53	19,4	151	10,84	19,4
157	11,80	20,1	180	11,64	20,1	182	11,64	20,2	19,1	11,80	20,1	157	11,74	20,1
163	11,45	20,9	191	11,17	20,9	192	11,17	20,8	19,5	11,45	20,9	163	11,78	20,9
172	11,10	21,1	192	11,97	21,1	191	11,97	20,7	19,2	11,10	21,1	172	11,54	21,1
197	12,31	21,5	205	12,17	21,5	199	12,17	21,5	20,6	12,31	21,5	197	12,60	21,5
208	12,86	22,6	209	12,89	22,6	214	12,89	22,2	21,9	12,86	22,6	208	12,92	22,6
213	13,96	23,4	222	13,44	23,4	215	13,44	23,5	22,5	13,96	23,4	213	13,67	23,4
229	12,31	24,1	233	12,98	24,1	233	12,98	24,4	23,8	12,31	24,1	229	12,70	24,1
254	13,93	25,3	260	13,45	25,3	263	13,45	24,9	27	13,93	25,3	254	13,69	25,3
269	12,69	25,9	277	12,61	25,9	273	12,61	25,9	28,1	12,69	25,9	269	12,93	25,9
307	13,23	27,2	312	13,38	27,2	308	13,38	27,6	31,0	13,23	27,2	307	13,04	27,2
308	13,26	28,4	312	13,96	28,4	313	13,96	28,3	32	13,26	28,4	308	13,09	28,4
319	14,77	30,8	324	14,65	30,8	324	14,65	30,8	32,7	14,77	30,8	319	14,61	30,8
405	15,35	30,4	412	15,00	30,4	413	15,00	30,9	41,4	15,35	30,4	405	15,62	30,4
416	16,20	31,1	412	16,39	31,1	414	16,39	30,9	42,2	16,20	31,1	416	16,05	31,1

Варіант 6			Варіант 7			Варіант 8			Варіант 9			Варіант 10		
Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂	Y	X ₁	X ₂
172	11,26	19,6	17,6	11,26	19,4	17,6	10,84	19,6	170	10,53	19,5	151	11,10	19,4
180	11,83	20,9	19,1	11,83	20,1	19,1	11,74	20,9	182	11,80	20,2	157	11,64	20,1
191	11,80	21,1	19,5	11,80	20,9	19,5	11,78	21,1	192	11,45	20,8	163	11,17	20,9
192	11,27	21,3	19,2	11,27	21,1	19,2	11,54	21,3	191	11,10	20,7	172	11,97	21,1
205	12,94	21	20,6	12,94	21,5	20,6	12,60	21	199	12,31	21,5	197	12,17	21,5
209	12,35	22,2	21,9	12,35	22,6	21,9	12,92	22,2	214	12,86	22,2	208	12,89	22,6
222	13,05	23,6	22,5	13,05	23,4	22,5	13,67	23,6	215	13,96	23,5	213	13,44	23,4
233	12,86	24,5	23,8	12,86	24,1	23,8	12,70	24,5	233	12,31	24,3	229	12,98	24,1
260	13,27	25,4	27	13,27	25,3	27	13,69	25,4	263	13,93	24,9	254	13,45	25,3
277	12,97	26,4	28,1	12,97	25,9	28,1	12,93	26,4	273	12,69	25,9	269	12,61	25,9
312	13,08	27	31,0	13,08	27,2	31,0	13,04	27	308	13,23	27,6	307	13,38	27,2
312	13,93	28,5	32	13,93	28,4	32	13,09	28,5	313	13,26	28,3	308	13,96	28,4
324	14,42	30,9	32,7	14,42	30,8	32,7	14,61	30,9	324	14,77	30,8	319	14,65	30,8
412	15,18	31,3	41,4	15,18	30,4	41,4	15,62	31,3	413	15,35	30,9	405	15,00	30,4
412	16,44	30,8	42,2	16,44	31,1	42,2	16,05	30,8	414	16,20	30,9	416	16,39	31,1

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. *Бугір М.К.* Математика для економістів: Посібник. – К.: ВЦ «Академія», 2003. – 520 с.
2. *Воронин В.Г.* Экономико-математические методы и модели планирования и управления в пищевой промышленности. – М.: Агропромиздат, 1986. – 303 с.
3. *Воронин В.Г., Денискин В.В., Сирота С.М.* Экономико-математические методы планирования на предприятиях пищевой промышленности. – М.: Лег. и пищ. пром-сть, 1982. – 272с.
4. *Грубер Й.* Эконометрия: Введение в эконометрию: Учеб. пособие. – К.: Астарта, 1996. – 398 с.
5. *Иващук О. Т.* Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник/ За ред. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
6. *Катренко А.В.* Дослідження операцій: Підручник. – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 549 с.
7. *Кутковецький В.Я.* Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: ВД «Професіонал», 2005. – 264 с
8. *Лецинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О.* Економетрія: Навч. посіб для студ. вищ. навч. закл. – К.: МАУП, 2003. – 208 с.
9. *Лугінін О.Є., Білоусова С.В., Білоусов О.М.* Економетрія: Навч. посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 254 с.
10. *Лук'яненко І., Краснікова Л.* Економетрика. – К.: Знання, 1998. – 493 с.
11. *Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П.* Економетрія: Підручник. – К.: КНЕУ, 2004. – 520 с.
12. *Толбатов Ю.А.* Економетрика: Підруч. – К.: Четверта Хвиля, 1997. – 319 с.
13. *Чемерис А., Юринець Р., Мицишин О.* Методи оптимізації в економіці: Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 152 с.

Додаткова

14. *Барковський В., Барковська Н., Лопатін О.* Математика для економістів. – К.: Національна академія управління, 1999.– 400 с. – Т.1,2 (Сер. навч. літ-ри „Економіст”).
15. *Винн Р., Холден К.* Введение в прикладной эконометрический анализ. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 294 с.
16. *Грубер Й.* Економетрія. Том 2. Економічні прогнозні та оптимізаційні моделі: Навчальний посібник. – К.: Нічлава, 1999. – 296 с.

17. *Джонстон Д.* Эконометрические методы: Пер. с англ. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.

18. *Економіко-математичні методи і моделі в управлінні і плануванні: Метод. Вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни для студентів спеціальності 7.050201 «Менеджмент у виробничій сфері» денної та заочної форм навчання /Укл. В.С.Флон, І.В.Федулова, В.М.Марченко, М.П.Васильчук.* – К.:УДУХТ,1997. – 32с.

19. *Лециньський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О., Юртин І.І.* Практикум з економітриї. – К.: ДП «Персонал», 2009. – 256 с.

20. *Мазник Л.В.* Моделі і методи прийняття рішень в аналізі та аудиті: Конспект лекцій для студентів спеціальності 7.050106 “Облік і аудит” напряму 0501 “Економіка підприємництва” всіх форм навчання. – К.: НУХТ, 2010. – 115с.

21. *Математическая экономика на персональном компьютере/ Под ред. М. Кубоница.* – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.

22. *Математические методы и модели в планировании и управлении: Метод. указания по курсу /Уклад. В.С.Флон, А.П.Шереметинский.* – КТИПП, 1984.

23. *Назаренко О.М.* Основи економітики. Підручник. – К.: Центр навч. Літератури, 2004. – 392 с.

24. *Наконечний С.І., Терещенко Т.О.,* Економітрия: Навч.методичний посібник. Для самостійного вивчення дисципліни. – К.: КНЕУ, 2001. – 192 с.

25. *Теория прогнозирования и принятия решений.* /Под ред. С.А Саркисяна. – М.: Высш. шк., 1998. – 351 с.

26. *Тинтнер Г.* Введение в эконометрию. – М.: Статистика, 1984. – 304 с.

27. *Толбатов Ю.А.* Математична статистика та задачі оптимізації в алгоритмах і програмах. – К.: Вища шк., 1994.

Навчальне видання

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
до вивчення дисципліни,
виконання лабораторних та контрольних робіт
для студентів за напрямом підготовки
6.030509 «Облік і аудит» та 6.030508 «Фінанси і кредит»
всіх форм навчання

Укладачі: Мазник Ліана Валеріївна,
Коннова Любов Олександрівна,
Чорноус Людмила Василівна.

Підп. до друку р. Обл. - вид. арк.
Наклад пр. Вид. № . Зам. №

РВЦ НУХТ, 01033, Київ – 33, вул. Володимирська, 68
www.book.nuft.edu.ua

Свідоцтво про реєстрацію серія ДК № від р.