

УДК 681.513.5

Б.М. ГОНЧАРЕНКО, доктор технічних наук

О.П. ЛОБОК, кандидат фізико-математичних наук

Національний університет харчових технологій

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ СПОСТЕРІГАЧІВ ПОВНОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ БАГАТОВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ

В даній роботі пропонується розв'язок задачі побудови спостерігаючих пристроїв у вигляді (деяких) систем звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок яких є оптимальною за деякими критеріями оцінкою вектора стану багатовимірного об'єкта керування. Ці спостерігачі можуть бути використані для аналітичного конструювання (синтезу) оптимальних регуляторів.

В данной работе предлагается решение задачи построения наблюдающих устройств в виде некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых является оптимальной по некоторым критериям оценкой вектора состояния многомерного объекта управления. Эти наблюдатели могут быть использованы для аналитического конструирования (синтеза) оптимальных регуляторов.

Ключові слова: *регулятор, спостерігаючий пристрій, спостерігачі повного порядку, оцінка стану, похибка оцінювання, оптимізація, принцип максимуму Понтрягіна, метод множників Лагранжа.*

Ключевые слова: *регулятор, наблюдающее устройство, наблюдатели полного порядка, оценка состояния, погрешность оценивания, оптимизация, принцип максимуму Понтрягина, метод множителей Лагранжа.*

Синтез регуляторів, зокрема оптимальних регуляторів в задачах АКОР [1,4], вимагає вимірів всіх параметрів вектора стану об'єкта. Але на практиці часто не всі параметри (фазові координати) доступні для вимірювання або через відсутність вимірювальних приладів, або взагалі через неможливість вимірювання, або для вимірювань доступні тільки деякі параметри стану. Вимірюють, як правило, вихідні змінні об'єкта керування, які є тільки деякими компонентами вектора стану об'єкта або їх комбінацією, а це породжує труднощі розв'язання задач керування. В цьому випадку необхідно спочатку на основі доступних вимірів відновити або оцінити вектор стану об'єкта, а потім вже переходити до побудови регуляторів за оцінками стану. В даній роботі розглядається перша задача – задача побудови так званих спостерігачів для оцінки вектора стану за доступними неповними вимірами. Під терміном “спостерігач” або “спостерігаючий пристрій” будемо розуміти деяку математичну модель, вихід (розв'язок) якої дозволяє оцінити координати вектора стану об'єкта.

Розглянемо деякий (узагальнений) багатопараметричний динамічний об'єкт, який описується наступною системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), & t_0 < t \leq T, \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (1)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n - вимірний вектор параметрів стану об'єкта, наприклад, x_1 – температура, x_2 – тиск, x_3 – концентрація речовини і т.д. (тут і далі " T " – операція транспонування вектора або матриці), A – матриця розмірності $n \times n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ – m - вимірний вектор керування, B – матриця розмірності $n \times m$, що визначає канали керування, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ – початковий вектор стану об'єкта, t_0, T – початковий та кінцевий момент часу спостереження (або керування) за параметрами об'єкта.

Зауважимо, що система (математична модель) (1) може бути одержана, наприклад, шляхом лінеаризації в околі стану спокою вихідної нелінійної математичної моделі об'єкта керування, яка описує деякий процес, апарат, явище тощо.

Допустимі спостереження за параметрами стану об'єкта опишемо наступною моделлю

$$y(t) = Cx(t), \quad t_0 < t \leq T, \quad (2)$$

де $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T$ – вектор результатів вимірів (спостереження) деяких параметрів об'єкта, C – задана матриця спостереження розмірності $p \times n$, яка визначає множину вимірювальних параметрів або їх комбінацію.

Задача полягає в тому, щоб за результатами вимірів (2), відновити всі параметри об'єкта, тобто знайти оцінку $\tilde{x}(t)$ вектора стану $x(t)$, яка з плином часу наближалась би до вектора $x(t)$, тобто за умови $\lim_{t \rightarrow T} \tilde{x}(t) = x(t)$.

Спостерігаючий пристрій можна побудувати за аналогією з математичною моделлю об'єкта (1), тобто оцінку $\tilde{x}(t)$ будемо шукати в класі спостерігачів виду [1,3,5], тобто у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + K(t)(y(t) - C\tilde{x}(t)), \\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0, \end{cases} \quad (3)$$

де $K(t)$ – матриця підсилення спостерігача розмірності $n \times p$, \tilde{x}^0 – заданий початковий стан спостерігача.

Зауважимо, що в даному випадку розмірності об'єкта і спостерігаючого пристрою однакові, тобто розглядаються спостерігачі так званого повного порядку [1,5].

Матрицю підсилення $K(t)$ зазвичай [1,4,5] шукають з умови забезпечення асимптотичної стійкості рівняння похибки оцінювання спостерігача (3)

$$\begin{cases} \frac{de(t)}{dt} = (A - KC)e(t), \\ e(t_0) = e^0, \end{cases} \quad (4)$$

де $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ – вектор похибок оцінювання спостерігача, $e^0 = x(t_0) - \tilde{x}(t_0) = x^0 - \tilde{x}^0$.

Якщо б початкові умови об'єкта $x(t_0)$ і спостерігача $\tilde{x}(t_0)$ співпадали, тобто $x(t_0) = \tilde{x}(t_0)$, то з (4) випливало б, що $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) = 0$ або $x(t) = \tilde{x}(t)$ для всіх $t > t_0$, тобто спостерігач (3) точно відновлював би всі параметри вектора стану. Однак реально в силу різних причин такого співпадання досягти практично неможливо. У зв'язку з цим існує динамічна похибка спостереження $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \neq 0$, яка є особливо великою для нестійких об'єктів.

Асимптотична стійкість системи диференціальних рівнянь (4) буде забезпечена при виборі такої матриці K , при якій матриця $A - KC$ буде мати власні значення з від'ємними дійсними частинами [3,5]. Деякі підходи для визначення матриці K розглянуті в роботах [1,3,4,5]. В даній роботі пропонується визначення оптимальної в деякому сенсі матриці K .

Для побудови оптимального спостерігача розглянемо наступний критерій – інтегральну квадратичну похибку оцінювання

$$\begin{aligned}
 I(K) &= \int_{t_0}^T (x(t) - \tilde{x}(t))^T P(t) (x(t) - \tilde{x}(t)) dt + (x(T) - \tilde{x}(T))^T Q (x(T) - \tilde{x}(T)) = \\
 &= \int_{t_0}^T e(t)^T P(t) e(t) dt + e(T)^T Q e(T), \tag{5}
 \end{aligned}$$

де $P(t), Q$ – задані симетричні додатно визначені вагові матриці розмірності $n \times n$.

Спостерігаючий пристрій (3) будемо вважати оптимальним, якщо матриця підсилення K вибирається з умови мінімізації критерію (5), тобто з умови $I(K) \rightarrow \min_K$.

З врахуванням рівняння похибки (4), критерій (5) можна представити у вигляді

$$I(K) = (e^0)^T H(t_0) e^0, \tag{6}$$

де $H(t)$ – симетрична додатно визначена матриця, значення якої в початковий момент часу t_0 визначає об’єм еліпсоїда розсіювання похибок оцінювання і яка є розв’язком наступного матричного диференціального рівняння

$$\begin{cases} \frac{dH(t)}{dt} = -(A - KC)^T H(t) - H(t)(A - KC) - P(t), \\ H(T) = Q. \end{cases} \quad (7)$$

Таким чином, початкова задача визначення оптимального спостерігача зводиться до задачі оптимального вибору матриці K з умови мінімізації критерію (6) на розв’язках рівняння (7). Аналіз цієї задачі показує, що $I(K) \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$, тобто ця задача є некоректною. У зв’язку з цим, модифікуємо критерій (6), а саме, доповнимо його доданком, який буде відігравати роль обмеження на матрицю K , тобто розглянемо критерій

$$I(K) = (e^0)^T H(t_0) e^0 + \int_{t_0}^T \text{tr} [K^T(t) G(t) K(t)] dt, \quad (8)$$

де $\text{tr} \dots$ – слід матриці, тобто сума її діагональних елементів [2], $G(t)$ – задана вагова матриця.

Для розв’язання оптимізаційної задачі (8), (7) використаємо матричний варіант принципу максимуму Понтрягіна, у відповідності до якого побудуємо функцію Гамільтона виду

$$J(K, H, \Lambda) = -\text{tr} [K^T(t) G(t) K(t)] + \text{tr} \left[\Lambda \left[-(A - KC)^T H - H(A - KC) - P \right] \right], \quad (9)$$

де Λ – розв’язок спряженої системи рівнянь

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{\partial J(K, H, \Lambda)}{\partial H} = -\Lambda(A - KC)^T - (A - KC)\Lambda \quad (10)$$

з початковою умовою

$$\Lambda(t_0) = \frac{\partial (e^0)^T H(t_0) e^0}{\partial H(t_0)} = e^0 (e^0)^T. \quad (11)$$

При знаходженні спряженої системи використовувався апарат визначення матричних похідних [2].

У відповідності до принципу максимуму, оптимальну матрицю K знайдемо з умови $J(K, H, \Lambda) \rightarrow \max_K$. Використовуючи необхідну умову

екстремуму функціоналу $J(K, H, \Lambda)$, ($\frac{\partial J(K, H, \Lambda)}{\partial K} = 0$), одержимо оптимальну

матрицю підсилення спостерігача у вигляді

$$K_{opt} = G^{-1} H \Lambda C^T. \quad (12)$$

Підставляючи цю матрицю в рівняння (7) та (10), одержимо систему спряжених матричних рівнянь для визначення невідомих матриць H та Λ

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = -A - G^{-1} H \Lambda C^T C^T H - H A - G^{-1} H \Lambda C^T C - P, & H(T) = Q, \\ \frac{d\Lambda}{dt} = A - G^{-1} H \Lambda C^T C \Lambda + \Lambda A - G^{-1} H \Lambda C^T C^T, & \Lambda(t_0) = e^0 (e^0)^T. \end{cases} \quad (13)$$

Зауваження. Якщо в якості вагової матриці G покласти $G = H$, то $K_{opt} = \Lambda C^T$, де Λ – розв’язок матричного диференціального рівняння типу Ріккати

$$\begin{cases} \frac{d\Lambda}{dt} = A\Lambda + \Lambda A^T - \Lambda C^T C \Lambda, \\ \Lambda(t_0) = e^0 (e^0)^T. \end{cases} \quad (14)$$

Доведено (можна показати), що розв’язок останнього рівняння (14) можна представити у вигляді $\Lambda = l(t)l^T(t)$, де $l(t)$ задовольняє наступній векторній системі звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dl(t)}{dt} = \left(A - \frac{1}{2} l(t)l^T(t)C^T C \right) l(t), \\ l(t_0) = e^0. \end{cases} \quad (15)$$

Розглянемо тепер випадок нескінченного часу спостереження, тобто коли $T \rightarrow \infty$. Тоді якщо $Q = 0$, то $H(t) \equiv H = const$, причому H задовольняє наступному матричному алгебраїчному рівнянню

$$(A - KC)^T H + H(A - KC) + P = 0, \quad (16)$$

а критерій (6) набуває вигляду

$$I(K) = (e^0)^T H e^0. \quad (17)$$

Оптимізаційна задача з критерієм (17) та з обмеженнями (16) також є некоректною. Тому розглянемо такий критерій якості оцінювання вектора стану об'єкта

$$I(K) = (e^0)^T H e^0 + \text{tr}[K^T G K], \quad (18)$$

з відомою ваговою матрицею G , який обмежує нескінченне зростання коефіцієнтів матриці підсилення K .

Оптимізаційна задача (18), (16) відноситься до класу задач нелінійного програмування з обмеженнями-рівностями. Для її розв'язання використаємо метод множників Лагранжа, у відповідності до якого оптимальна матриця K знаходиться з умови мінімізації функції Лагранжа

$$L(K, H, \Psi) = (e^0)^T H e^0 + \text{tr}[K^T G K] + \text{tr}[\Psi (A - KC)^T H + H(A - KC) + P],$$

де Ψ – матриця множників Лагранжа.

Використовуючи необхідну умову екстремуму функції $L(K, H, \Psi)$

$$\frac{\partial L(K, H, \Psi)}{\partial K} = 0, \quad \frac{\partial L(K, H, \Psi)}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial L(K, H, \Psi)}{\partial \Psi} = 0$$

і враховуючи, що

$$\frac{\partial L(K, H, \Psi)}{\partial K} = 2GK - 2H\Psi C^T, \quad \frac{\partial L(K, H, \Psi)}{\partial H} = e^0(e^0)^T + \Psi A - KC^T + A - KC \Psi,$$

одержимо шукану оптимальну матрицю підсилення спостерігача у вигляді $K_{opt} = G^{-1}H\Psi C^T$, де матриці H і Ψ є розв'язками наступної системи матричних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} A - G^{-1}H\Psi C^T C^T H + H A - G^{-1}H\Psi C^T C + P = 0, \\ A - G^{-1}H\Psi C^T C \Psi + \Psi A - G^{-1}H\Psi C^T C^T + e^0(e^0)^T = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Можна показати, що одержана матриця K_{opt} задовольняє також і достатнім умовам мінімуму функції $L(K, H, \Psi)$.

Зауваження. Якщо покласти $G = H$, то $K_{opt} = \Psi C^T$, де Ψ – симетрична додатно визначена матриця – розв'язок матричного алгебраїчного рівняння Ріккати виду

$$A\Psi + \Psi A^T - \Psi C^T C \Psi + e^0(e^0)^T = 0. \quad (20)$$

За допомогою математичного пакету MatLab була виконана числова реалізація побудованих оптимальних спостерігачів та проводилась обчислювальні експерименти при наступних даних:

$$A = \begin{pmatrix} 1.02 & 0.25 & 4.98 \\ 0.06 & -7.98 & -10.05 \\ -0.97 & 1.51 & -1.03 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$P = \text{diag}(1,1,1)$ – одинична матриця, $Q = \text{diag}(0,0,0)$ – нульова матриця, $u(t) = 0.5$, $t_0 = 0$, $T = 2$, $y(t) = x_1(t)$, тобто спостерігається тільки перший параметр об'єкта (а інші параметри – недосяжні для вимірів).

Обчислення проводились для скінченного та нескінченного часу спостереження. Для скінченного часу спостереження одержано мінімальне значення критерію (8) $I_{\min} = 7.37$ при оптимальній вектор-функції підсилення спостерігача $K_{opt} = (k_{1opt}, k_{2opt}, k_{3opt})^T$, графіки компонент якого зображені на Рис. 1.

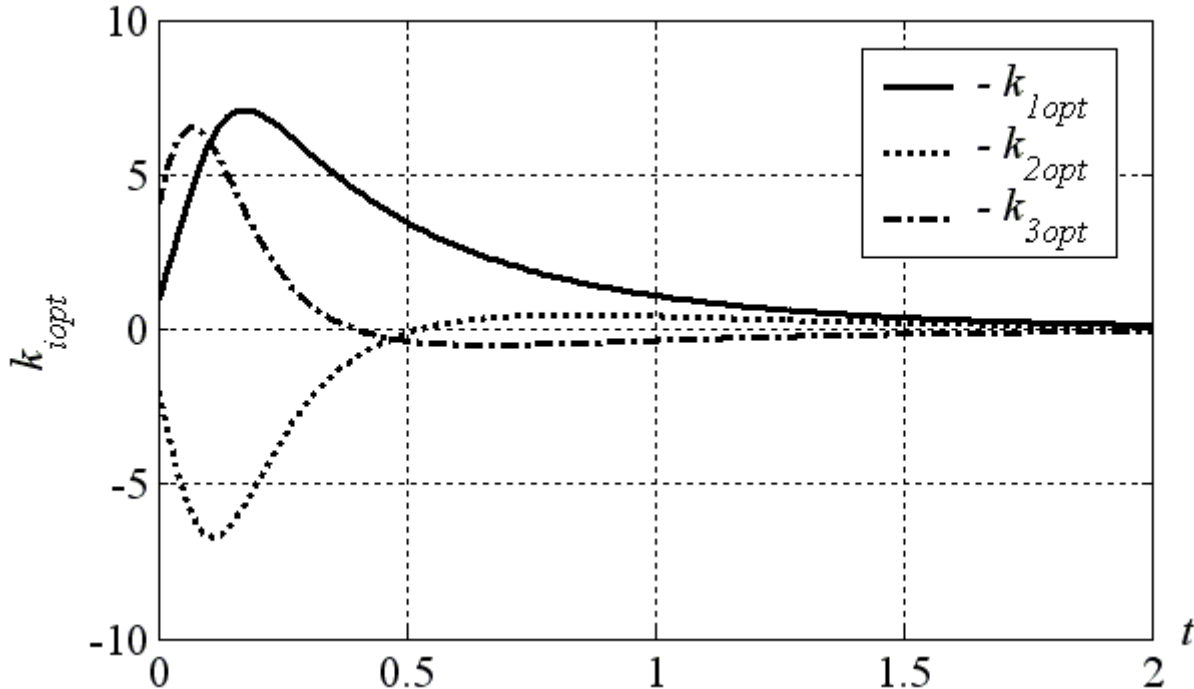
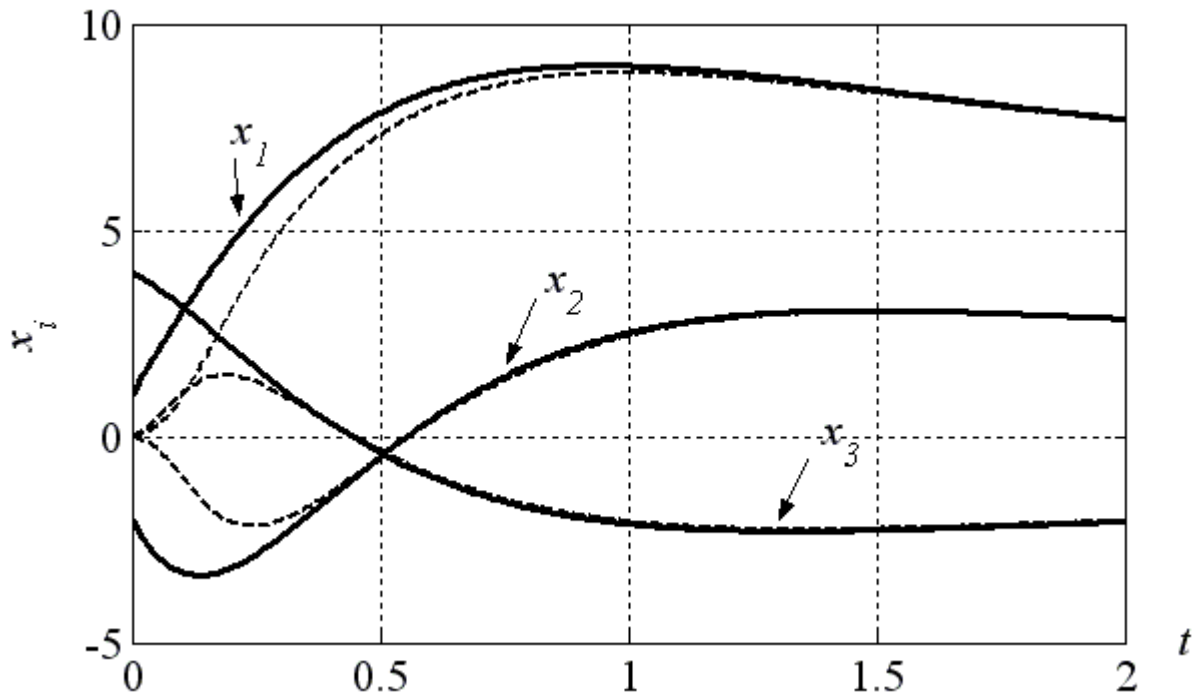


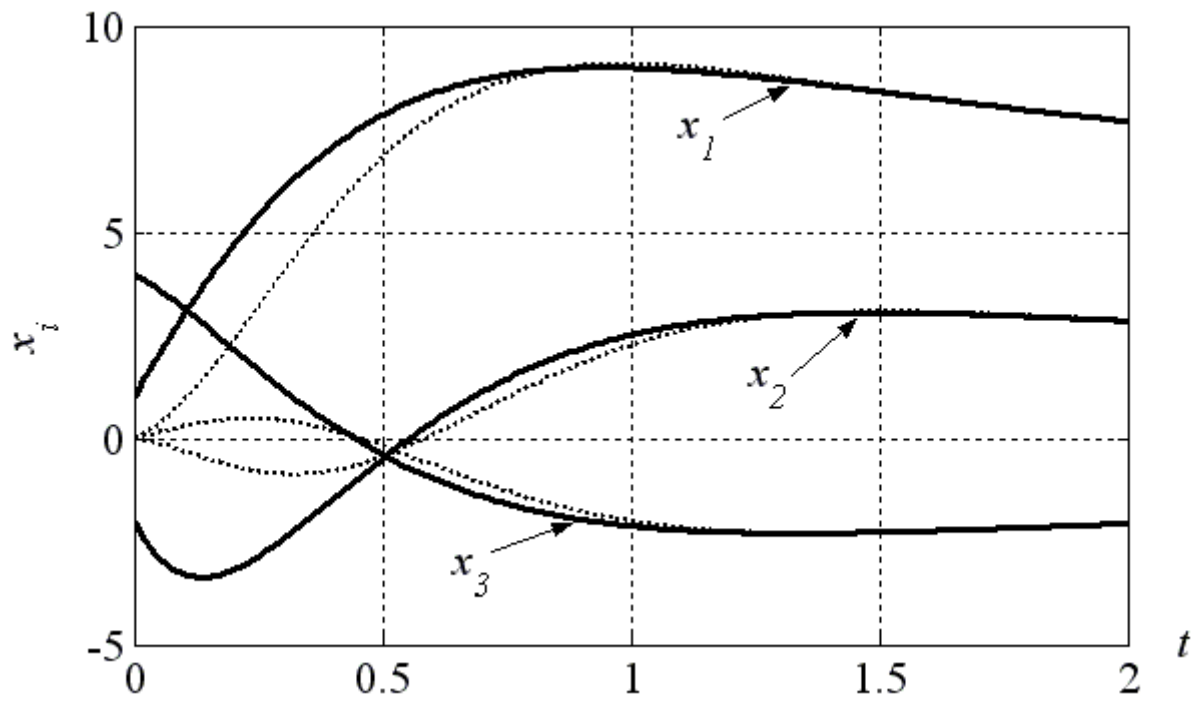
Рис. 1. Графіки компонент оптимального вектора підсилення спостерігача

Для нескінченного часу спостереження мінімальне значення критерію (18) дорівнює $I_{\min} = 9.88$ і одержане при оптимальному векторі підсилення спостерігаючого пристрою $K_{opt} = 4.81, -2.22, 1.35^T$.

Нижче наведені графіки компонентів вектору стану, їх оцінки (Рис. 2) та динамічні похибки оцінювання вектору стану (Рис. 3) при скінченому (а) та нескінченому (б) часі спостереження.

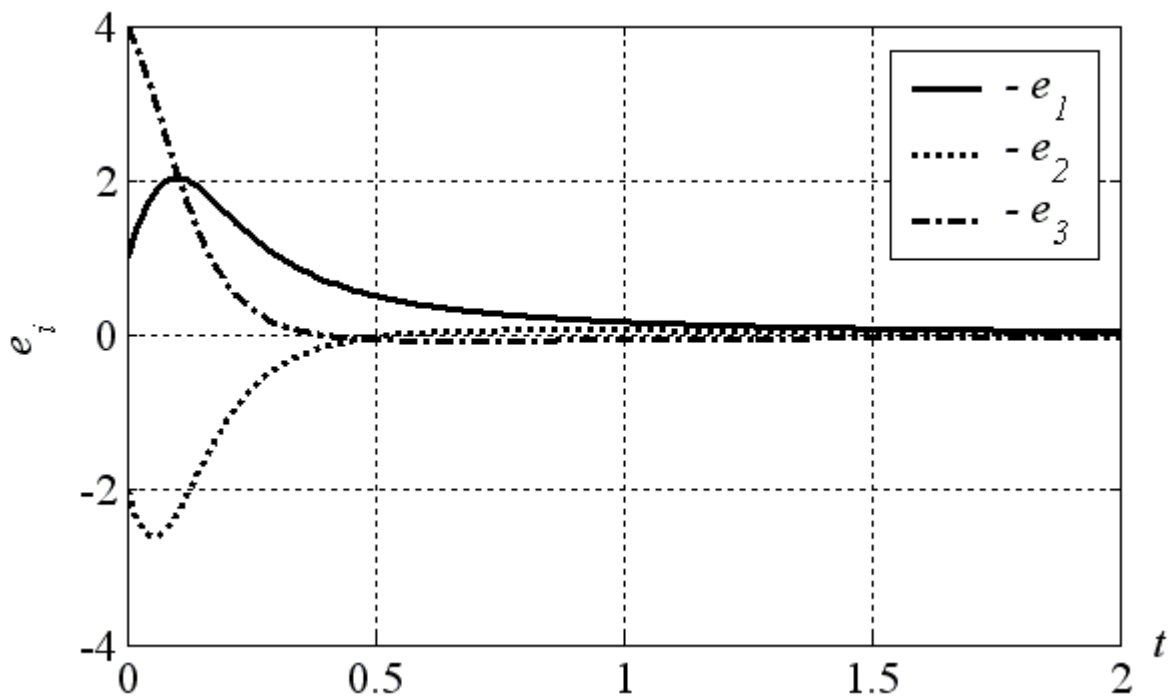


(a)

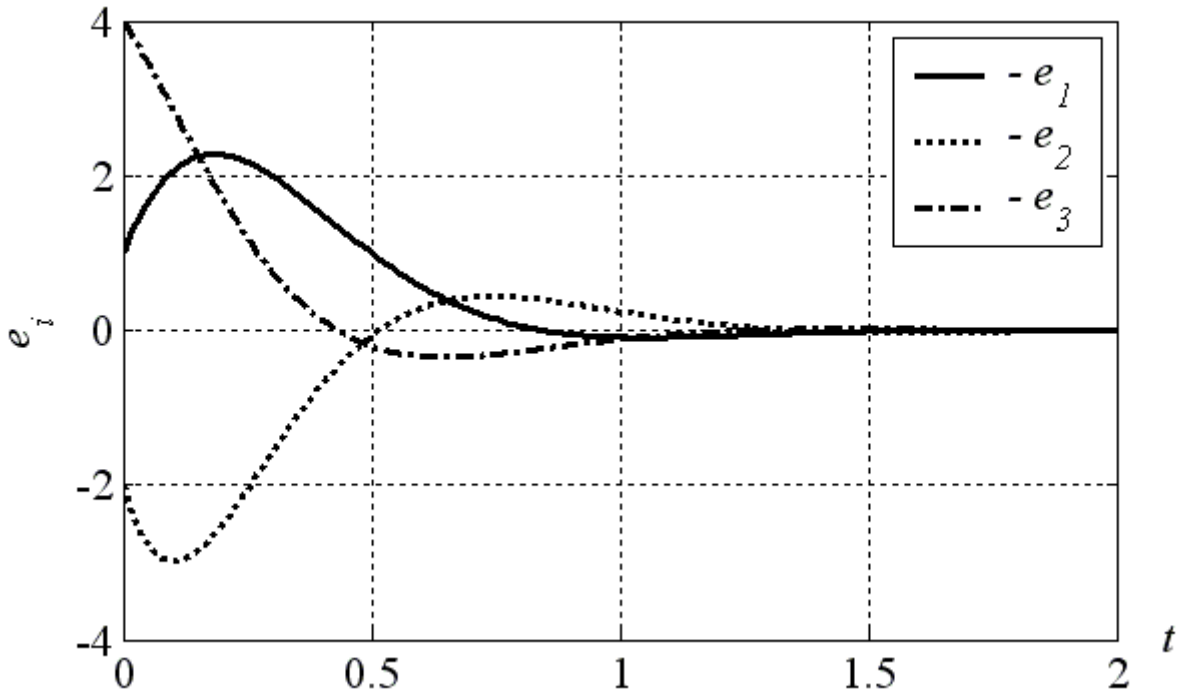


(б)

Рис. 2. Графіки параметрів стану об'єкта (суцільні лінії) та їх оцінки (пунктирні лінії) при скінченному (а) та нескінченному (б) часі спостереження



(а)



(б)

Рис. 3. Графіки динамічних похибок оцінювання параметрів стану для скінченного (а) та нескінченного (б) часу спостереження

Обчислювальні експерименти показали перевагу оптимальних спостерігачів при скінченому часі спостереження у порівнянні зі спостерігачами з нескінченим часом спостереження.

Висновок. Побудовані оптимальні спостерігачі (особливо із скінченим часом спостереження) забезпечують швидке згасання динамічної похибки оцінювання вектору стану об'єкта, дозволяють отримати інформацію про решту, крім вимірних, параметрів об'єкта і можуть бути використані для побудови (синтезу) регуляторів, які в свою чергу забезпечують бажані якісні характеристики перехідних процесів параметрів об'єкта керування під час керування ними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высшая школа, 1989. – 263 с.

2. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. – М.: Статистика, 1979. – 349 с.
3. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – К.: Выща школа, 1978. – 184 с.
4. Рей У. Методы управления технологическими процессами. – М.: Мир, 1983. – 368 с.
5. Тютюнник А.Г. Оптимальні і адаптивні системи автоматичного керування. – Житомир.: ЖІТІ, 1998. – 512 с.

Одержана редколегією 18.03.08 р.